Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

С. М. Новоселова

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ПРОДОЛЬНЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В работах [1–2] построена система нелинейных уравнений для нормальных частот и собственных функций сечения волновода с двумя продольными упругими перегородками, соединенными продольным рядом пружин. Эта акустическая система моделирует микроструктуру среднего канала улитки внутреннего уха млекопитающих. Целью настоящей работы является численное решение полученных ранее уравнений и графический анализ результатов.

1. Введение

Известно из теории систем со многими степенями свободы [3], что если между двумя резонаторами существует связь, спектры собственных частот каждого из резонаторов испытывают изменения, существенно зависящие от свойств связи. Каждая собственная частота каждого резонатора расщепляется на пару частот колебаний, присущих всей системе в целом. Эти результирующие свободные колебания получили название нормальных. Собственные частоты изолированных резонаторов принято называть в этом контексте парциальными частотами. Каждая пара нормальных частот располагается по обе стороны исходной парциальной частоты. Более высокая нормальная частота характеризует колебания, противофазные по отношению к другому связанному резонатору, синфазные колебания имеют более низкую частоту.

Некоторое приложение этой теории к волноводу с плавно и медленно меняющимися свойствами, поперечное сечение которого

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00107).

показано на Рис. 1, рассмотрено в [1] и [2]. Данная работа посвящена численному решению системы нелинейных уравнений, полученных в [2].

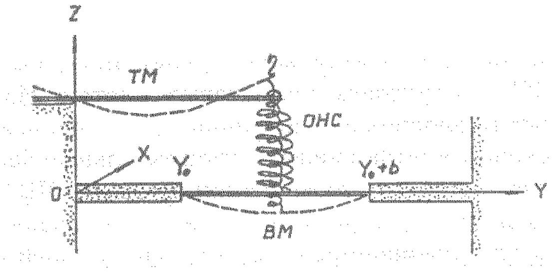

Рис. 1. Поперечное сечение волновода, моделирующего микроструктуру улитки. TM – упругая пластинка, левый конец которой оперт на неподвижную опору, а правый – на пружину ОНС; BM – упругая пластинка, свободно опертая с двух концов.

2. Постановка задачи и решение

Система нелинейных уравнений для нормальных частот и собственных функций сечения волновода (Рис. 1), выведенная в [2], может быть преобразована к более удобному для численного решения виду:

$$\omega_n^2 = \frac{\Delta x/m}{\pm\frac{Y_t(\eta)}{D_t\frac{\partial^3 Y_1(\eta)}{\partial y^3}} \pm \frac{Y_b(\eta)}{D_b\left(\frac{\partial^3 Y_b(\eta-0)}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 Y_b(\eta+0)}{\partial y^3}\right)}} + \omega_c^2, \tag{1}$$

$$Y_t = \sin k_t y + \frac{\sin\lambda_t - \lambda_t\cos\lambda_t}{\sinh\lambda_t - \lambda_t\cosh\lambda_t}\,\sinh k_t y, \tag{2}$$

$$Y_b = \begin{cases} \sin k_b(y-y_0)\frac{\cos\lambda_b}{\cosh\lambda_b}\,\sinh k_b(y-y_0), \\ \qquad\qquad \text{если} \quad y_0 \leqslant y \leqslant \eta, \\ \sin k_b(y_0+b-y) - \frac{\cos\lambda_b}{\cosh\lambda_b}\,\sinh k_b(y_0+b-y), \\ \qquad\qquad \text{если} \quad \eta \leqslant y \leqslant y_0+b, \end{cases} \tag{3}$$

$$k_b = \sqrt[4]{\frac{D_b}{\mu_b}\omega_n^2}, \quad k_t = \sqrt[4]{\frac{D_t}{\mu_t}\omega_n^2}, \quad \lambda_t = k_t\eta, \quad \lambda_b = \frac{k_b b}{2}, \quad \eta = b,$$

где ω_c – парциальная частота пружинки, m – ее масса, Δx – расстояние между двумя соседними пружинками, D_b и D_t – жесткости на изгиб базилярной и текториальной мембран, Y_b и Y_t –

их собственные функции, $y = \eta$ – координата пружинки на оси Y; k_b и k_t – волновые числа базилярной и текториальной мембран соответственно, λ_b и λ_t – соответствующие им собственные значения, μ_b и μ_t означают поверхностную плотность каждой из мембран.

Наибольший интерес в этой конструкции представляет роль пружинок ОНС – наружных волосковых клеток. Известно из многочисленных биологических источников, что повреждение наружных волосковых клеток снижает избирательные свойства сечения. Известно также, что даже изолированные ОНС способны изменять свою длину и ширину под действием различных факторов, благодаря пружинообразному строению своей клеточной оболочки. Изменение формы клетки влечет за собой изменение ее жесткости и, следовательно, парциальной частоты. Поэтому представляется интересным исследовать свойства системы в зависимости от парциальной частоты наружных волосковых клеток.

Отмечено в ряде биологических публикаций, что форма волосковой клетки в некоторых случаях может зависеть от состояния всей системы в целом, но случай подобной обратной связи в данной работе не рассматривается.

Будем рассматривать только систему наинизших нормальных частот спектра свободных колебаний сечения, порожденные наинизшими парциальными частотами упругих перегородок. Легко заметить из уравнения (1), что каждому значению парциальной частоты наружной волосковой клетки соответстуют в общем случае 4 нормальные частоты свободных колебаний сечения. Варьируя парциальную частоту пружинки при различных предполагаемых параметрах модели, можно сделать некоторые заключения о свойствах системы и сопоставить результаты с экспериментальными данными.

Наиболее приемлемым методом решения системы уравнений (1)–(4) оказался метод простых итераций, благодаря его универсальности. Список численных значений входных параметров, взятых из биологических источников, опубликован в работе [4].

3. Результаты

3.1. Свободные колебания сечения. На Рис. 2 показаны графики нормальных частот сечения двух пластинок при различных допущениях об их свойствах. Если парциальные частоты пластинок равны, все четыре нормальные частоты пересекаются в одной точке – там, где парциальные частоты пластинок равны парциальной частоте пружинки. Если парциальная частота текториальной мембраны выше, чем парциальная частота базилярной мембраны, образуются две точки пересечения нормальных частот. Одна из них расположена там, где парциальная частота пружинки равна парциальной частоте BM, другая – соответственно на парциальной частоте TM.

Однако, если парциальная частота BM выше, чем таковая у текториальное мембраны, все нормальные частоты пересекаются только в одной точке: на парциальной частоте текториальной мембраны. Это наводит на мысль, что именно свойства текториальной мембраны определяют позицию резонанса в улитке уха.

Образцы собственных функций колебания пластинок показаны на Рис. 3. Если парциальная частота пружинки далека от таковой какой-либо из пластинок, обе мембраны испытывают колебания, включающие синфазные (Рис. 3, A) и противофазные (Рис. 3, B) моды. На парциальной частоте какой-либо из мембран одна лишь резонирующая мембрана колеблется, забирая всю энергию на себя и тем самым увеличивая амплитуду своих вибраций. (Условимся для простоты называть в данном контексте "резонансом" случай совпадения парциальной частоты одной из мембран с частотой пружинки. Другая условная терминология – использовать время от времени биологические термины "базилярная" и "текториальная мембрана", хотя с точки зрения механики это скорее всего упругие пластинки.)

Наибольший интерес представляет собой случай резонанса текториальной мембраны. Как видно из графика (Рис. 3, D), в то время, когда средняя часть текториальной мембраны опускается вниз, ее внешний конец поднимается вверх, тем самым жидкость из субтекториального пространства выталкивается наружу. В следующем полупериоде средняя часть поднимается вверх, но внешний край падает вниз, перекрывая обратный поток. Одностороннее течение в субтекториальном пространстве было отмечено в экспериментальных исследованиях [5] и обсуждалось Стилом [6], предложившим очень похожую картину из морфологических и общефизических соображений. Поскольку есть данные за то, что преобразование механических вибраций в электрический

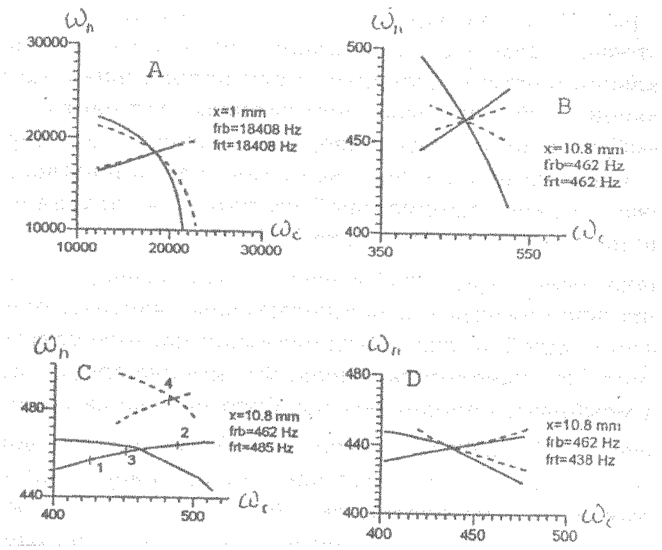

Рис. 2. Зависимость нормальных ω_n частот свободных колебаний пластинок от парциальной частоты, соединяющей их пружинки ω_c. Сплошные линии: нормальные частоты синфазных и противофазных колебаний пластинок, образованные расщеплением парциальной частоты базилярной мембраны; пунктирные линии – расщепление парциальной частоты текториальной мембраны.

A,B: случай равных парциальных частот двух пластинок, вычисленный в начальной и средней частях улитки.

C: парциальная частота текториальной мембраны превосходит таковую BM. Наблюдаются две точки пересечения нормальных частот. Расщепленные частоты текториальной мембраны пересекаются в точке, где парциальные частоты OHC и TM совпадают. Соответственно, нормальные частоты BM пересекаются на частоте резонанса BM.

D: парциальная частота TM меньше парциальной частоты BM. Все нормальные частоты пересекаются в одной и той же точке: на частоте резонанса текториальной мембраны.

импульс происходит именно за счет субтекториальных течений, появляется еще один аргумент в пользу того, что именно резонанс текториальной мембраны определяет позицию восприятия звука.

3.2. Вынужденные колебания. Для того, чтобы исследовать

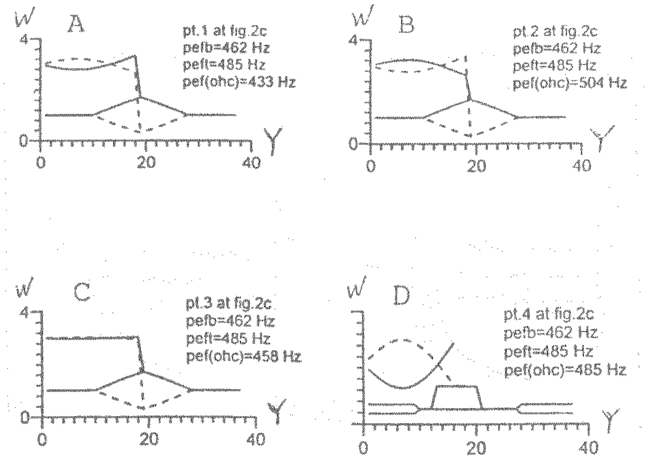

Рис. 3. Собственные функции колебания пластин. Синфазные (A) и противофазные (B) вибрации двух мембран, вычисленные в точках 1 и 2 на Рис. 2C. C: резонанс базилярной мембраны (т.3 на Рис. 2C). D: резонанс текториальной мембраны (т.4 на Рис. 2C).

отклик рассматриваемой системы на входной акустический сигнал, необходимо построить полную трехмерную модель, а не вырезанное плоское поперечное сечение. Однако, некоторые предварительные оценки можно сделать уже сейчас. Предположим, что плоская волна с частотой ω падает нормально снизу на сечение базилярной мембраны. При таком допущении фазовые характеристики будут явно искажены, однако, ошибки в амплитудных характеристиках будут не столь существенны, ибо известно, что большая часть акустической энергии монохроматической волны достигает своего резонансного сечения и там ассимилируется. Используя уравнения (3.1)–(3.3) из работы [2], подсчитаем амплитудные отклики на внешний сигнал при различных соотношениях между парциальными частотами пружинки и базилярной мембраны для случаев A и B на Рис. 2:

$$u_b(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{bn} \sin k_b(y-y_0) \exp(i\omega t) \quad k_{bn} = \pm(2n+1)\pi/b,$$

$$c_{bn} \cong \frac{2P_0(1-(-1)^n)}{n\pi\mu_b(\omega_n^2-\omega^2)},$$

где $u_b(y,t)$ – амплитуда вынужденных колебаний, P_0 – амплитуда падающей волны.

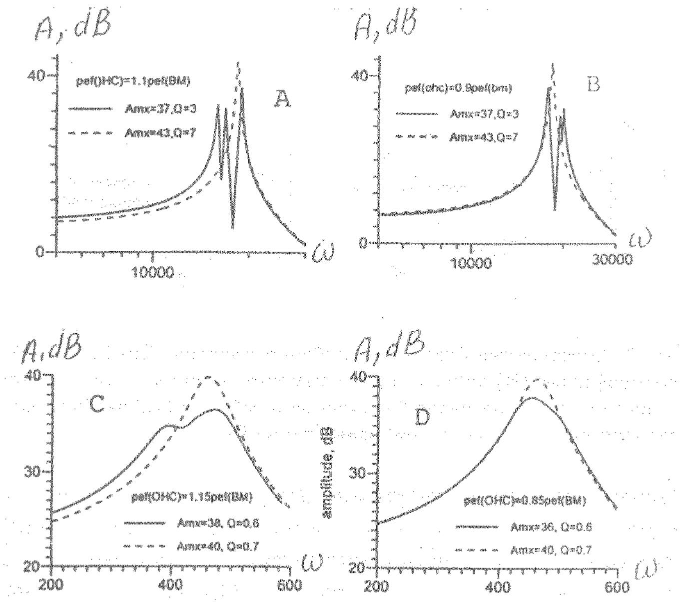

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики с параметрами, отображенными на Рис. 2а и 2в. Пунктирные линии показывают случай, когда парциальные частоты наружной восковой клетки и базилярной мембраны равны. Сплошные линии показывают отклик модели со смещенной частотой наружной восковой клетки. A – амплитуда в децибелах, ω – внешняя частота.

Наиболее острый и высокий пик наблюдается при полном совпадении парциальных частот OHC и BM. Смещение парциальной частоты пружинки относительно частоты мембраны в ту или иную сторону ведет к расщеплению пика и расширению полосы пропускания системы, при этом высота огибающей снижается вследствие расползания энергии вширь. Аналогичные явления наблюдались неоднократно в эксперименте [7, 8].

В рассмотренной модели не использовалась популярная гипотеза активного усиления амплитуды колебаний сечения в резонансной области. В данном случае никакая внутренняя энергия не добавляется непосредственно к быстрым вибрациям базилярной мембраны. Только лишь медленная вариация формы наружных волосковых клеток изменяет фильтрующие свойства сечения.

Литература

1. S. M. Novoselova, *An analysis of mechanical interaction between the outer hair cell and two adjacent cochlear membranes.* in: *Proceedings of the International Simposium on Diversity in Auditory Mechanics*, eds.: E. R. Lewis G. R. Long, R. F. Lion, P. M. Marins, C. R. Steele, E. Hecht-Poinar. World Scientific, 1997, pp. 448–454.
2. S. M. Novoselova, *A system of linked resonators in cochlea.* Zap. Nauchn. Semin. POMI, **239** (1997), 197–210.
3. С. Э. Хайкин, *Физические основы механики.* М., 1971.
4. S. M. Novoselova, *Cochlear partition examined with the theory of multi-degree-of--freedom systems.* in: *Symposium on Recent Developments in Auditory Mechanics*, Sendai, Japan, 25th–30th July, 1999.
5. H. Spoendlin, *Primary structural changes in the organ of Corti after acoustic overstimulation.* Acta Otolaryngol, **71** (1971), 166–176.
6. C. R. Steele, *A possibility for subtectorial fluid motion.* in: *Basic mechanisms in hearing*, Academic press, New York (1973), 69–94.
7. N. P. Cooper, W. S. Rhode, *Nonlinear mechanics at the apex of the guinea-pig cochlea.* Hearing Research, **82** (1995), 225–243.
8. M. Ulfendahl, *Mechanical responces in the mammalian cochlea.* Progress in neurobiology, **53** (1997), 331–380.

Novoselova S. M. A study of an acoustical wave-guide with longitudinal partitions using the theory of the multi-degree-of-freedom systems.

A system of nonlinear equations for the normal frequencies and the eigenfunctions of a cross section of an acoustic wave-guide with two longitudinal elastic partitions, linked with a raw of springs has been derived in the papers [1–2]. Such acoustic system supposed to be a model of the microstructure of the media canal of the mammalian cochlea. A numerical solution of these equations and a graphical analysis are undertaken in the present paper.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 15 декабря 1999 г.