Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. В. Перель, И. В. Фиалковский, А. П. Киселев

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНОЙ И СДВИГОВОЙ МОД В НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКЕ ТИМОШЕНКО

1. Введение

Мы рассматриваем распространение изгибной и сдвиговой мод в балке Тимошенко [1] с гладко зависящими от длины параметрами. Эти моды распространяются независимо друг от друга с различными фазовыми скоростями и могут быть найдены в адиабатическом (ВКБ) приближении, если масштаб изменения параметров балки много больше длины волны, при условии что их фазовые скорости различны [2, 3]. Однако, адиабатическое приближение неприменимо, если в некоторой точке кривые фазовых скоростей этих волн пересекаются. Адиабатика, при условии различия или тождественного совпадения скоростей, построена в [4]. Там же отмечены трудности, возникающие при нарушении этих условий.

В настоящей работе дано асимптотическое описание распространения высокочастотных волн при наличии точки пересечения фазовых скоростей. Показано, что при пересечении их под конечным углом волна одного типа, идущая в направлении точки пересечения скоростей x_0, после прохождения x_0 порождает и волну другого типа, причем отношение ее амплитуды к амплитуде падающей волны пропорционально $1/\sqrt{\omega}$, ω – частота. Построены асимптотические формулы, описывающие поле в окрестности точки совпадения скоростей.

Близкая к данной по используемому математическому аппарату квантовомеханическая задача о пересечении термов в двухатомных молекулах была рассмотрена впервые Ландау и Зинером [5]. Аналогичные формулы возникают при решении задачи о туннелировании электрона через узкую запрещенную зону в кристалле [6]. Имеются обширные исследования по распространению волн различной природы вблизи точек пересечения или сближения фазовых скоростей. Так, распространению радиоволн в ионосфере посвящены работы [7–10]; распространение акустических волн в слое жидкости обсуждается в [11]; взаимодействие упругих объемных и поверхностных волн в слабо анизотропной неоднородной упругой среде описано в [12, 13]. Из литературы, имеющей математическую мотивацию, отметим [14, 15].

В данной работе применяется математический аппарат, аналогичный [10] и заимствованный из квантовой механики (см. [5]). Уравнения для поперечных мод в балке Тимошенко в гармоническом режиме сводятся к системе четырех уравнений первого порядка, которая принимает тот же вид, что и система уравнений Максвелла в [10]. Решение вблизи точки пересечения фазовых скоростей строится методом пограничного слоя [16], с введением растянутой координаты. Применение преобразования Фурье к высокочастотному асимптотическому разложению гармонического решения, дает разложение волны по гладкости в духе [17].

Все рассуждения ведутся на уровне формальных асимптотик.

2. Гармонические волны

Распространение монохроматических изгибных и сдвиговых волн в балке Тимошенко описывается системой

$$\begin{aligned} -m\omega^2 W &= \left[G\kappa A(W_x+U)\right]_x, \\ -I_m\omega^2 U &= (EIU_x)_x - G\kappa A(W_x+U), \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь x – координата вдоль балки, ω – угловая частота колебаний; $W=W(x,\omega)$ и $U=U(x,\omega)$ – соответственно прогиб оси балки относительно положения равновесия $W=0$ и угол отклонения нормали к поперечному сечению от оси (продольные колебания описываются уравнениями, не зависимыми от выписанных), m – линейная плотность балки, I_m и I – соответственно момент инерции сечения балки и момент инерции сечения балки с единичной плотностью, G и E – модуль сдвига и модуль Юнга, κ – коэффициент Тимошенко и A – площадь поперечного сечения балки. Параметры балки гладко зависят от горизонтальной координаты x и не зависят от ω. Временная зависимость $\exp\left\{-i\omega t\right\}$ опускается.

Можно считать, что уравнения (2.1) записаны в безразмерных переменных. Введем величины размерности скорости

$$c_1 = \sqrt{GkA/m}, \quad c_2 = \sqrt{EI/I_m}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем окажется, что c_1 и c_2 являются при $\omega \to \infty$ скоростями распространения волн двух типов в балке. Мы предполагаем, что существует точка $x = x_0$, в которой $c_1(x_0) = c_2(x_0) \equiv c_0$. Величину c_0 будем считать характерным масштабом скорости. В задаче имеется также параметр размерности длины $L = \sqrt{I_m/m}$, тогда параметр размерности времени имеет вид L/c_0. Обозначая безразмерные переменные тильдой, получим

$$\widetilde{x} = x/L, \ \widetilde{\omega} = \omega L/c_0, \ \widetilde{W} = Wc_0/L^2, \ \widetilde{U} = Uc_0/L, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{m} = m/m_0, \quad \widetilde{I_m} = I_m/(I_m)_0, \quad \widetilde{E} = E/E_0, \quad \widetilde{I} = I/I_0, \\ \widetilde{G} = G/G_0, \quad \widetilde{k} = k/k_0, \quad \widetilde{A} = A/A_0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $_0$ означает, что соответствующий параметр взят в точке x_0. В дальнейшем будем предполагать, что все величины безразмерны, и будем опускать тильду. Только в разделах 8,9 при описании окончательного результата вернемся к размерным переменным.

Сведем систему уравнений (2.1) к системе четырех уравнений первого порядка, вводя в рассмотрение четырехкомпонентный вектор-столбец

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}(x,\omega), \ \mathbf{\Psi} = (-i\omega W, \ -i\omega U, \ EIU_x, \ GkA(W_x + U))^T, \tag{2.5}$$

где ^{T} – транспонирование. Компоненты $\mathbf{\Psi}$ суть скорость изгибных колебаний при заданном x, скорость изменения угла отклонения нормали к поперечному сечению от оси балки, перерезывающая сила и момент поперечных деформаций, соответственно.

Вектор-функция $\mathbf{\Psi}(x,\omega)$ удовлетворяет системе четырех линейных уравнений, которая может быть записана в виде, напоминающем уравнение Шредингера

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}(x) + \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{V}})\mathbf{\Psi} = -i\varepsilon \mathbf{\Gamma} \frac{d\mathbf{\Psi}}{dx}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega} \ll 1. \tag{2.6}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \operatorname{diag}\left(m, \ I_m, \ (EI)^{-1}, \ (G\kappa A)^{-1}\right), \tag{2.7}$$

а

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Безразмерный параметр $\varepsilon = 1/\omega$, обратный к безразмерной частоте, является малым (напоминаем, что тильда в обозначении безразмерных переменных в дальнейшем опускается), что означает, что длина волны c_0/ω много меньше характерного масштаба длины L. При этом все компоненты вектора $\mathbf{\Psi}$ оказываются одного порядка.

Отметим, что элементы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ зависят, а элементы $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ и $\mathbf{\Gamma}$ не зависят от x.

Матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ и $\mathbf{\Gamma}$ самосопряженные. Поэтому $(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Gamma\Psi}) = Const$, что имеет смысл закона сохранения потока энергии ($(\cdot,\cdot)$ – стандартное скалярное произведение, $(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{4} f_j^* g_j$).

3. Высокочастотные волны в однородной балке

Решения системы уравнений (2.1) в предположении, что свойства балки не зависят от x, хорошо известны [1]. Приведем их в обозначениях (2.6). Они могут быть найдены в виде

$$\mathbf{\Psi}(x, 1/\varepsilon) = \mathbf{\Phi}(\varepsilon)\, \exp\left\{i\beta(\varepsilon)x/\varepsilon\right\},$$

где $\mathbf{\Phi}$ и β, соответственно, собственный вектор и собственное число следующей спектральной задачи

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}} + \varepsilon\boldsymbol{\mathcal{V}})\mathbf{\Phi} = \beta\mathbf{\Gamma\Phi} \quad \text{или} \quad \mathbf{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{\mathcal{H}} + \varepsilon\boldsymbol{\mathcal{V}})\mathbf{\Phi} = \beta\mathbf{\Phi}. \tag{3.1}$$

Собственные числа β, как легко показать, удовлетворяют биквадратному уравнению и находятся явно. Собственные векторы и собственные числа являются функциями ε, что указывает на наличие дисперсии. Она исчезает при $\varepsilon \to 0$. При малых ε, $\mathbf{\Phi}$ и β могут быть разложены в ряды Тейлора. Для удобства дальнейшего изложения будем сразу искать β и $\mathbf{\Phi}$ виде разложений

$$\beta(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon\beta^{(1)} + \varepsilon^2\beta^{(2)} + \ldots, \quad \mathbf{\Phi}(\varepsilon) = \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon\mathbf{\Phi}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{\Phi}^{(2)} + \ldots. \tag{3.2}$$

Для краткости записи введены отдельные обозначения для нулевых приближений собственных чисел и собственных векторов.

Нулевые приближения $\boldsymbol{\varphi}$, λ находятся из спектральной задачи

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}, \quad \text{или} \quad \mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}, \tag{3.4}$$

и определяются формулами

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{c_{1,2}}, \quad \lambda_{3,4} = -\lambda_{1,2} \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(p_1^{-1},\, 0,\, 0,\, \mp p_1\right)^T, \quad \boldsymbol{\varphi}_{2,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0,\, p_2^{-1},\, \mp p_2,\, 0\right)^T, \quad (3.6)$$

$$p_1 = \sqrt{mc_1}, \qquad p_2 = \sqrt{I_m c_2}. \quad (3.7)$$

Предполагаем, что фазовые скорости c_1, c_2 конечны и не обращаются в нуль.

Собственные функции $\boldsymbol{\varphi}_i$ ортогональны,

$$(\boldsymbol{\varphi}_i, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j) = \delta_{ij} N_i, \quad (3.8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а

$$N_i = 1, \quad \text{если } i = 1,2 \quad \text{и} \quad N_i = -1, \ \text{если} \ \ i = 3,4. \quad (3.9)$$

Собственные функции $\boldsymbol{\varphi}_{1,3}$ соответствуют падающей (бегущей направо) и отраженной (бегущей налево) волнам изгибного типа, а $\boldsymbol{\varphi}_{2,4}$ – соответственно, сдвигового. Для волн, бегущих направо, нормировочные множители N_i положительны, а для волн, бегущих налево, отрицательны. Это согласуется с тем, что N_i имеет смысл потока энергии.

Все последующие приближения определяются из теории возмущений и выражаются в терминах матричных элементов $\mathcal{V}_{ij} = (\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{\varphi}_j)$. Процедура неоднозначна, т. к. собственный вектор определен с точностью до умножения на произвольный ряд по степеням ε, и на каждом шаге возникают произвольные коэффициенты. Мы устраняем произвол условием

$$(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}^{(k)}) = 0. \quad (3.10)$$

Для решения уравнения (2.6), соответствующего падающей изгибной волне, получаем

$$\mathbf{\Psi}_1 = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 + \varepsilon\left(\frac{\mathcal{V}_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}\boldsymbol{\varphi}_2 - \frac{\mathcal{V}_{41}}{\lambda_1 + \lambda_2}\boldsymbol{\varphi}_4\right) + \ldots\right] \times \quad (3.11)$$
$$\times \exp\left\{\frac{ix}{\varepsilon}\left(\lambda_1 + \varepsilon^2\left(\frac{\mathcal{V}_{21}\mathcal{V}_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\mathcal{V}_{41}\mathcal{V}_{14}}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + \ldots\right)\right\}.$$

Аналогично строятся решения, соответствующие падающей сдвиговой волне и получаются явные выражения для волн, идущих в обратном направлении в сторону отрицательных x.

Решения $\{\mathbf{\Psi}_i\}_{i=1}^4$, разумеется, линейно независимы и образуют фундаментальную систему.

4. Адиабатическое решение

Анзатц и рекуррентная система. Будем теперь искать решение уравнения (2.6) в виде адиабатического (ВКБ) разложения

$$\mathbf{\Psi}(x,1/\varepsilon)=\mathbf{\Phi}(x,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int^{x}\beta(x,\varepsilon)\,dx\right\}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\beta(x,\varepsilon)&=\lambda(x)+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}\beta^{(k)}(x),\\ \mathbf{\Phi}(x,\varepsilon)&=\boldsymbol{\varphi}(x)+\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k}\mathbf{\Phi}^{(k)}(x).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Нижний предел интегрирования в (4.1) будет фиксирован позднее. Введение разложений и для β, и для векторной амплитуды $\mathbf{\Phi}$ связано с дополнительным произволом. Мы устраняем его введением условия

$$\Big(\boldsymbol{\varphi}(x),\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}^{(k)}(x)\Big)=0, \tag{4.3}$$

аналогичного условию (3.10) для однородной среды. Благодаря ему амплитуды $\mathbf{\Phi}^{(n)}$ будут зависеть только от локальных свойств среды, а все интегральные характеристики войдут в показатель экспоненты.

Подставляя (4.1),(4.2) в (2.6) и приравнивая коэффициенты при равных степенях ε в правой и левой частях (2.6), получим

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}-\lambda\mathbf{\Gamma})\,\boldsymbol{\varphi}=0, \tag{4.4}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}-\lambda\mathbf{\Gamma})\,\mathbf{\Phi}^{(1)}=\beta^{(1)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{\varphi}-i\mathbf{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{4.5}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}-\lambda\mathbf{\Gamma})\,\mathbf{\Phi}^{(2)}=\beta^{(2)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{V}}\mathbf{\Phi}^{(1)}-i\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{\Phi}}^{(1)}+\beta^{(1)}\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}^{(1)}, \tag{4.6}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}-\lambda\mathbf{\Gamma})\,\mathbf{\Phi}^{(n)}=\beta^{(n)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\mathcal{V}}\mathbf{\Phi}^{(n-1)}-i\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{\Phi}}^{(n-1)}+\sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\beta^{(k)}\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Phi}^{(n-k)}, \tag{4.7}$$

где точка означает дифференцирование по x.

Нулевое приближение. Спектральная задача (4.4) отличается от (3.4) лишь наличием в $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ зависимости от координаты x. Собственные значения λ_j и собственные функции $\boldsymbol{\varphi}_j$ определяются теми же формулами (3.5), (3.6), но зависят теперь от x как от параметра. По-прежнему $\boldsymbol{\varphi}_j$ удовлетворяют условию нормировки (3.8). Если в качестве нулевых приближений β и $\mathbf{\Phi}$ выбраны, соответствено, собственное число λ_j и собственная функция $\boldsymbol{\varphi}_j$, то и все последующие приближения будем снабжать нижним индексом j.

Первая поправка. Условие разрешимости (4.5) есть ортогональность правой части к решению однородного уравнения, т. е. к $\boldsymbol{\varphi}_j$. Отсюда легко получить, что

$$\beta_j^{(1)} = \frac{1}{N_j}\left(\mathcal{V}_{jj} + iS_{jj}\right). \tag{4.8}$$

Здесь S_{ij} – коэффициенты связи мод номеров i и j

$$S_{ij} \equiv (\boldsymbol{\varphi}_i, \mathbf{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_j). \tag{4.9}$$

Покажем, что если выполнено условие нормировки (3.8), то $S_{jj} = 0$. В самом деле, из вещественности $\boldsymbol{\varphi}_j, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_j, \mathbf{\Gamma}$ и самосопряженности $\mathbf{\Gamma}$ получаем

$$\left(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{\Gamma}\frac{d\boldsymbol{\varphi}_j}{dx}\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{\varphi}_j}{dx}, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j\right) = \frac{1}{2}\frac{d\,(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j)}{dx},$$

тогда

$$S_{jj} = \left(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{\Gamma}\frac{d\boldsymbol{\varphi}_j}{dx}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\,(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j)}{dx} = 0, \tag{4.10}$$

так как, вследствие (3.8) и (3.9) $(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j) = N_j = \mathrm{Const}$.

Из определения матрицы $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ следует, что

$$\mathcal{V}_{jj} = 0. \tag{4.11}$$

Таким образом, (4.8),(4.10) и (4.11) дают

$$\beta_j^{(1)} = 0. \tag{4.12}$$

Ищем первое приближение для векторной амплитуды $\mathbf{\Phi}_j$, соответствующей собственному значению λ_j, с учетом условия (4.3), в виде

$$\mathbf{\Phi}_j^{(1)} = \sum\nolimits_{i\neq j} a_{ji}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_i. \tag{4.13}$$

Подставляя (4.13) в (4.5), получаем

$$\sum\nolimits_{m\neq j}(\lambda_m - \lambda_j)a_{jm}^{(1)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_m = \beta^{(1)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_j - \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{\varphi}_j - i\mathbf{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_j. \tag{4.14}$$

Используя условие ортогональности (3.8), находим,

$$a_{ji}^{(1)} = \frac{1}{N_i(\lambda_j - \lambda_i)} \left(\mathcal{V}_{ij} + iS_{ij}\right), \quad i \neq j. \tag{4.15}$$

Уже отсюда видно, что наше построение сталкивается с трудностями при совпадении фазовых скоростей.

Условие разрешимости уравнения (4.6) дает

$$\beta_j^{(2)} = \frac{1}{N_j} \sum\nolimits_{i \neq j} a_{ji}^{(1)} \left(\mathcal{V}_{ji} + iS_{ji}\right). \tag{4.16}$$

Итак,

$$\beta_j = \lambda_j + \varepsilon^2 \sum\nolimits_{i \neq j} \frac{\left(\mathcal{V}_{ij} + iS_{ij}\right)\left(\mathcal{V}_{ji} + iS_{ji}\right)}{N_j N_i(\lambda_j - \lambda_i)} + \ldots\ , \tag{4.17}$$

$$\mathbf{\Phi}_j = \boldsymbol{\varphi}_j + \varepsilon \sum\nolimits_{i \neq j} \frac{\mathcal{V}_{ij} + iS_{ij}}{N_i(\lambda_j - \lambda_i)} \boldsymbol{\varphi}_i + \ldots\ .$$

Асимптотическое разложение, описывающее идущую в положительном направлении изгибную волну, имеет вид

$$\mathbf{\Psi}_1 = \mathbf{\Phi}_1 \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int_{x_\pm}^{x} \beta_1\, dx\right\}, \tag{4.18}$$

$$\beta_1 = \lambda_1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{V}_{21}\mathcal{V}_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{S_{13}S_{31}}{2\lambda_1} - \frac{\mathcal{V}_{41}\mathcal{V}_{14}}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + \ldots$$

$$\mathbf{\Phi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_1 + \varepsilon \left(\frac{\mathcal{V}_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} \boldsymbol{\varphi}_2 - \frac{iS_{31}}{2\lambda_1} \boldsymbol{\varphi}_3 - \frac{\mathcal{V}_{41}}{\lambda_1 + \lambda_2} \boldsymbol{\varphi}_4\right) + \ldots\ .$$

Нижние пределы интегрирования, x_+ при $x > 0$ и x_- при $x < 0$ могут быть произвольными, с единственным ограничением, что промежуток интегрирования не содержит точки вырождения x_0.

Формула (4.18) превращается в (3.11), если среда однородна по x, так как в такой среде коэффициенты связи мод $S_{i,j}$ обращаются в нуль.

Асимптотическое разложение, соответствующее идущей в положительном направлении сдвиговой волне, принимает вид:

$$\mathbf{\Psi}_2 = \mathbf{\Phi}_2 \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int_{x_\pm}^{x} \beta_2\, dx\right\}, \tag{4.19}$$

$$\beta_2 = \lambda_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\mathcal{V}_{21}\mathcal{V}_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\mathcal{V}_{32}\mathcal{V}_{23}}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{S_{42}S_{24}}{2\lambda_2} \right) + \dots,$$

$$\mathbf{\Phi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2 + \varepsilon \left(\frac{\mathcal{V}_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1}\boldsymbol{\varphi}_1 - \frac{\mathcal{V}_{32}}{\lambda_1 + \lambda_2}\boldsymbol{\varphi}_3 - \frac{iS_{42}}{2\lambda_2}\boldsymbol{\varphi}_4 \right) + \dots .$$

Высшие приближения. Построение поправок можно продолжить. Для определенности, рассмотрим падающую изгибную волну $\mathbf{\Psi}_1$. Из условия разрешимости уравнения (4.7) получаем

$$\beta_1^{(n)} = \sum\nolimits_{l \neq 1} a_{1l}^{(n-1)} (\mathcal{V}_{1l} + iS_{1l}) \tag{4.20}$$

Ищем $\mathbf{\Phi}_1^{(n)}$ в виде

$$\mathbf{\Phi}_1^{(n)} = \sum\nolimits_{l=2}^{4} a_{1l}^{(n)} \boldsymbol{\varphi}_l. \tag{4.21}$$

Подставляя (4.21) в (4.7) и скалярно умножая обе части равенства на $\boldsymbol{\varphi}_i$, $i \neq 1$, получаем для $a_{1i}^{(n)}$, аналогично (4.14),

$$(\lambda_1 - \lambda_i) a_{1i}^{(n)} = i\dot{a}_{1i}^{(n-1)} + \frac{1}{N_i} \sum\nolimits_{l=2}^{4} a_{1l}^{(n-1)} (\mathcal{V}_{il} + iS_{il}) - \sum\nolimits_{k=1}^{n-1} \beta^{(k)} a_{1i}^{(n-k)}. \tag{4.22}$$

Поскольку $\lambda_{3,4} \neq \lambda_1$, $a_{13}^{(n)}$ и $a_{14}^{(n)}$ находятся однозначно из уравнения (4.22). Однако, для определения $a_{12}^{(n)}$ требуется дополнительное условие: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Формулы (4.20), (4.21) и (4.22) показывают, что все приближения $\beta_1^{(n)}$ и $\mathbf{\Phi}_1^{(n)}$ зависят только от локальных свойств балки в точке с координатой x.

Для получения выражений для сдвиговой моды достаточно поменять местами в (4.20)-(4.22) нижние индексы 1 и 2.

Замечания.

Мы построили формальные асимптотические разложения решений. Согласно теореме Биркгофа [18], существуют решения системы (2.6), имеющие асимптотики вида (4.18), (4.19) на любом интервале изменения x, не содержащем точку вырождения x_0, в частности, в случае полубесконечной балки $x \geqslant 0$, при $x \in [0, x_0 - \sqrt{\epsilon}]$ и при $x \in [x_0 + \sqrt{\varepsilon}, l]$ при любом $l > x_0 + \sqrt{\varepsilon}$. Однако решения, асимптотики которых задаются одними и теми же формулами правее и левее точки x_0 различны. В дальнейшем мы выясним, что решение, имеющее асимптотику (4.18) левее точки вырождения x_0, представляет собой линейную комбинацию решений с асимптотиками (4.18),(4.19) правее точки вырождения.

При вычислении преобразования Фурье потребуются асимптотики этих решений не только при положительных, но и при отрицательных ω. Поэтому важно, что, согласно теореме Биркгофа, построеные решения являются регулярными функциями частоты и имеют одни и те же асимптотики (4.18), (4.19) при всех ω, лежащих в верхней полуплоскости, вплоть до вещественной оси включительно. Таким образом, эти решения имеют асимптотики (4.18), (4.19), как при положительных, так и при отрицательных ε и ω.

Заметим, что решения с асимптотиками Ψ_1, Ψ_2 в верхней полуплоскости частоты соответствуют волнам, идущим в положительном направлении оси x, причем решение, соответствующее волне с меньшей скоростью распространения, однозначно восстанавливается по асимптотике, а решение, соответствующее волне с большей скоростью, восстанавливается по асимптотике неоднозначно. К любому такому решению можно добавить решение, соответствующее волне с меньшей скоростью, умноженное, например, на $\exp\{-1/\varepsilon\}$. В дальнейшем, когда мы будем говорить о волне, идущей с меньшей скоростью, мы будем иметь в виду любое решение с соответствующей асимптотикой.

Набор $\mathbf{\Psi}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ образует фундаментальную систему решений. Руководствуясь структурой нулевого приближения амплитуды, мы называем эти решения изгибными и сдвиговыми.

5. Область применимости адиабатического решения

Для определенности, будем иметь дело с изгибной модой. Формулы (4.20)-(4.22) показывают, что адиабатика неприменима вблизи точек совпадения фазовых скоростей, т. к. старшие приближения $\mathbf{\Phi}_1^{(k)}(x)$ и $\beta_1^{(k+1)}(x)$, $k > 0$ имеют особенность при $\lambda_1(x) - \lambda_2(x) \to 0$, т. е. при $x \to x_0$. Рассмотрение первого приближения $\mathbf{\Phi}_1^{(1)}(x)$ поля изгибной моды показывает, что особенность при $x \to x_0$ имеется только у коэффициента $a_{12}^{(1)}(x)$ при векторе $\boldsymbol{\varphi}_2$, отвечающем за сдвиговую компоненту волны

$$\mathbf{\Phi}_1^{(1)}(x) = a_{12}^{(1)}(x)\boldsymbol{\varphi}_2(x) + O(1), \quad a_{12}^{(1)}(x) = \mathcal{V}_{21}(x)/\big(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)\big).$$

Главная особенность в старших приближениях $\mathbf{\Phi}_1^{(n)}(x)$ для амплитуды, как нетрудно показать с помощью (4.22), тоже возникает из коэффициента $a_{12}^{(n)}(x)$ при $\boldsymbol{\varphi}_2$, так что

$$\boldsymbol{\Phi}_1^{(n)}(x) = \mathbf{d}_1^{(n)}(x) / \big(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)\big)^{2n-1}, \tag{5.1}$$

причем вектор $\mathbf{d}_1^{(n)}(x)$ остается конечным при $x \to x_0$ (хотя может обращаться в нуль, если $\dot\lambda_1(x_0) = \dot\lambda_2(x_0)$). Нетрудно найти его явно

$$\mathbf{d}_1^{(n)}(x) = \ i^{1-n}(2n-3)!! \left(\dot\lambda_1(x) - \dot\lambda_2(x)\right)^{n-1} \ \mathcal{V}_{21}(x) \ \boldsymbol{\varphi}_2(x) \\ + \ \ o\left(\left(\dot\lambda_1(x) - \dot\lambda_2(x)\right)^{n-1}\right), \tag{5.2}$$

где $k!!$ – произведение всех нечетных чисел вплоть до k при $k > 0$, и $k!! = 1$ при $k \leqslant 0$. Старшие приближения $\beta_1^{(n)}(x)$ для фазы, как можно показать, имеют при $x \to x_0$ более слабую особенность, чем $\boldsymbol{\Phi}_1^{(n)}(x)$

$$\beta_1^{(n)}(x) = b_1^{(n)}(x) / \big(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)\big)^{2n-3}, \tag{5.3}$$

$$b_1^{(n)}(x) = \ i^{2-n}(2n-5)!! \left(\dot\lambda_1(x) - \dot\lambda_2(x)\right)^{n-2} \ \mathcal{V}_{12}(x)\mathcal{V}_{21}(x) \\ + o\left(\left(\dot\lambda_1(x) - \dot\lambda_2(x)\right)^{n-2}\right).$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{2n}} \mathbf{d}_1^{(n)}, \tag{5.4}$$

$$\beta_1 = \lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{2n}} b_1^{(n)}. \tag{5.5}$$

Формулы (5.4), (5.5) показывают, что размер окрестности точки x_0, в которой неприменима адиабатика, зависит от того, каким образом стремится к нулю разность $\lambda_1(x) - \lambda_2(x)$ при $x \to x_0$. В дальнейшем мы будем считать, что в точке x_0 кривые зависимости собственных чисел $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ пересекаются, но не касаются

$$\lambda_1(x) - \lambda_2(x) = \sigma(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x - x_0 \to 0 \tag{5.6}$$

где

$$\sigma \equiv \dot\lambda_1(x_0) - \dot\lambda_2(x_0) \neq 0. \tag{5.7}$$

Адиабатические разложения (5.4), (5.5), как легко видеть, имеют асимптотический характер при

$$|x - x_0| = \varepsilon^{1/2-\gamma} \gg \varepsilon^{1/2} \tag{5.8}$$

для любого $\gamma > 0$. Это соотношение подсказывает, что вблизи x_0 естественно искать решение (2.6) в виде разложения по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ в терминах растянутой переменной

$$\tau = (x - x_0)/\sqrt{\varepsilon}. \tag{5.9}$$

Будем называть область применимости адиабатики *волновой зоной*, а окрестность точки вырождения *резонансной зоной*, а решение в резонансной зоне – *резонансным*.

6. Резонансное решение

Анзатц и рекуррентная система. После замены (5.9) уравнение (2.6) перепишется в виде

$$\Big(\boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) + \varepsilon\boldsymbol{\mathcal{V}}\Big)\boldsymbol{\Upsilon} = -i\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\Gamma}\frac{d\boldsymbol{\Upsilon}}{d\tau}. \tag{6.1}$$

Подставляя сюда разложение $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в ряд Тейлора при $\sqrt{\varepsilon}\tau \to 0$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(x) \equiv \boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}\tau\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)} + (\sqrt{\varepsilon}\tau)^2\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(2)} + \dots\ ,$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(n)} \equiv \frac{1}{n!}\frac{d^n\boldsymbol{\mathcal{H}}}{dx^n}\Big|_{x=x_0}, \tag{6.2}$$

получим

$$\Big(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}\tau\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)} + \varepsilon(\tau^2\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{V}}) + \dots\Big)\boldsymbol{\Upsilon} = -i\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\Gamma}\frac{d\boldsymbol{\Upsilon}}{d\tau} \tag{6.3}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{\phi}\ \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\tau \eta\, d\tau\right\}, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^{(0)}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\eta^{(1)}(\tau) + \varepsilon\eta^{(2)}(\tau) + \dots, \\ \boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\phi}^{(0)}(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\tau) + \dots\ . \end{aligned} \tag{6.5}$$

Наложим условие, аналогичное (3.10),

$$(\boldsymbol{\phi}^{(0)}, \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\phi}^{(k)}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots\ . \tag{6.6}$$

Подставляя (6.4) в уравнение (6.3) и приравнивая коэффициенты при равных степенях $\sqrt{\varepsilon}$, получаем

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \eta^{(0)}\mathbf{\Gamma}\right) \boldsymbol{\phi}^{(0)} = 0, \tag{6.7}$$

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \eta^{(0)}\mathbf{\Gamma}\right) \boldsymbol{\phi}^{(1)} = -\tau\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)}\boldsymbol{\phi}^{(0)} + \eta^{(1)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\phi}^{(0)} - i\mathbf{\Gamma}\acute{\boldsymbol{\phi}}^{(0)}, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \eta^{(0)}\mathbf{\Gamma}\right) \boldsymbol{\phi}^{(2)} = &-\tau\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)}\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \eta^{(1)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\phi}^{(1)} - i\mathbf{\Gamma}\acute{\boldsymbol{\phi}}^{(1)} - \\ &- \left(\tau^2\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(2)} + \boldsymbol{\mathcal{V}}\right)\boldsymbol{\phi}^{(0)} + \eta^{(2)}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\phi}^{(0)}, \ \ldots\end{aligned} \tag{6.9}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по τ.

Нулевое приближение. Спектральная задача (6.7) не содержит зависимости от τ, так как $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} \equiv \boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0)$. Поскольку в точке x_0 совпадают фазовые скорости различных типов волн, $c_1(x_0) = c_2(x_0) = c_0$, матрица $\boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0)$ имеет два двукратных собственных числа $\pm\lambda_0 \equiv 1/c_0$, причем знаку $+$ соответствует линейная комбинация собственных функций $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$ и $\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)$, а знаку минус – $\boldsymbol{\varphi}_3(x_0)$ и $\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)$. Мы предполагаем в дальнейшем сшить решение с изгибной волной, распространяющейся слева направо, поэтому положим

$$\eta_1^{(0)} = \lambda_0, \quad \boldsymbol{\phi}_1^{(0)} = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0). \tag{6.10}$$

Первая поправка. Уравнение (6.8) разрешимо, если его правая часть ортогональна к $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$ и $\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)$. Условие ортогональности к $\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)$ выполняется автоматически, условие ортогональности к $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$ с учетом того, что $\acute{\eta}_1^{(0)} = 0$, дает

$$\eta_1^{(1)}(\tau) = \tau\mathcal{H}_{11}^{(1)}. \tag{6.11}$$

Согласно (6.6), будем искать $\boldsymbol{\phi}_1^{(1)}(\tau)$ в виде линейной комбинации всех собственных функций матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)}$ кроме $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$,

$$\boldsymbol{\phi}_1^{(1)}(\tau) = \alpha_{12}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2(x_0) + \alpha_{13}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_3(x_0) + \alpha_{14}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_4(x_0). \tag{6.12}$$

Коэффициенты $a_{13}(\tau)$, $a_{14}(\tau)$ найдем, подставляя (6.12) в (6.8), умножая затем результат скалярно на $\boldsymbol{\varphi}_3(x_0)$ и на $\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)$ и пользуясь (3.8),

$$\alpha_{13}(\tau) = -\tau\mathcal{H}_{31}^{(1)}/(2\lambda_0), \quad \alpha_{14} = 0. \tag{6.13}$$

Условие ортогональности правой части (6.9) к $\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)$ дает

$$\acute{\alpha}_{12} - i\tau\left(\dot{\lambda}_2(x_0) - \dot{\lambda}_1(x_0)\right)\alpha_{12} = -i\mathcal{V}_{21}(x_0).$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\alpha_{12}(\tau) = i\mathcal{V}_{21}(x_0)\exp\left\{-i\sigma\tau^2/2\right\}(\mathcal{F}(\tau) + \mathrm{Const}\ ), \tag{6.14}$$

где σ определяется формулой (5.7), а

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau}\exp\left\{i\sigma s^2/2\right\}ds. \tag{6.15}$$

Мы выбираем произвольную постоянную интегрирования Const$=$ 0, что обеспечит в дальнейшем сшивание резонансного решения с адиабатическим разложением изгибной волны (4.1).

Вторая поправка $\eta_1^{(2)}(\tau)$ определяется из условия ортогональности правой части (6.9) к $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$,

$$-\tau^2\mathcal{H}_{11}^{(2)} - \tau\mathcal{H}_{13}^{(1)}\alpha_{13} + \eta_1^{(2)} = 0.$$

С учетом (6.13), имеем

$$\eta_1^{(2)}(\tau) = \tau^2\left(\mathcal{H}_{11}^{(2)} - \mathcal{H}_{31}^{(1)}\mathcal{H}_{13}^{(1)}/(2\lambda_0)\right). \tag{6.16}$$

Используя результаты Приложения, резонансное решение, описывающее падающую изгибную волну, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\Upsilon}_1(\tau,\varepsilon) = \boldsymbol{\phi}_1(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\tau}\eta_1(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right\}, \tag{6.17}$$

$$\boldsymbol{\phi}_1(\tau,\varepsilon) = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\tau\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\alpha_{12}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2(x_0) + O(\varepsilon), \tag{6.18}$$

$$\eta_1(\tau,\varepsilon) = \lambda_1(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\tau\dot{\lambda}_1(x_0) + \varepsilon\ddot{\lambda}_1(x_0)\frac{\tau^2}{2} + O(\varepsilon^{3/2}), \tag{6.19}$$

а $\alpha_{12}(\tau)$ дается формулами (6.14), (6.15). Сдвиговая волна строится аналогично.

Высшие приближения и условия применимости резонансного разложения. Покажем, что уравнения для последующих приближений разрешимы и оценим их порядок при $|\tau| \to \infty$.

Условия разрешимости уравнения n-ого приближения дают поправку

$$\eta_1^{(n)}(\tau) = \tau^n \mathcal{H}_{11}^{(n)} + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathcal{H}_{13}^{(k)} \alpha_{13}^{(n-k)} \tau^k - \mathcal{V}_{12}\alpha_{12}^{(n-2)} - \mathcal{V}_{14}\alpha_{14}^{(n-2)} \quad (6.20)$$

и уравнение для $\alpha_{12}^{(n-1)}(\tau)$, которое можно записать в виде

$$\acute{\alpha}_{12}^{(n-1)} + i\tau\left(\mathcal{H}_{11}^{(1)} - \mathcal{H}_{22}^{(1)}\right)\alpha_{12}^{(n-1)} = R(\tau). \quad (6.21)$$

Его правая часть R выражается через найденные ранее приближения $\eta_1^{(k)}(\tau)$, $k = 2,..,n$, $\alpha_{12}^{(k)}(\tau)$, $k = 1,..,n-2$, $\alpha_{13}^{(k)}(\tau)$ и $\alpha_{14}^{(k)}(\tau)$ при $k = 1,..,n-1$:

$$R = -i\mathcal{V}_{23}^{(0)}\alpha_{13}^{(n-2)} + \sum\nolimits_{k=2}^{n} \alpha_{12}^{(n-k)}(\eta_1^{(k)} - \mathcal{H}_{22}^{(k)}\tau^k) -$$

$$-\sum\nolimits_{k=1}^{n} \tau^k(\alpha_{13}^{(n-k)}\mathcal{H}_{23}^{(k)} + \alpha_{14}^{(n-k)}\mathcal{H}_{24}^{(k)}).$$

Уравнение (6.21) легко интегрируется

$$\alpha_{12}^{(n-1)}(\tau) = \exp\left\{-i\sigma\tau^2/2\right\}\int^{\tau}\exp\left\{i\sigma s^2/2\right\}R(s)\,ds. \quad (6.22)$$

Отсюда $\alpha_{12}^{(n-1)}(\tau) = O(\tau R(\tau))$. Поправку номера n ищем в виде

$$\boldsymbol{\phi}_1^{(n)}(\tau) = \alpha_{12}^{(n)}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2(x_0) + \alpha_{13}^{(n)}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_3(x_0) + \alpha_{14}^{(n)}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_4(x_0),$$

причем коэффициенты $\alpha_{13}^{(n)}(\tau)$, $\alpha_{14}^{(n)}(\tau)$, как обычно, определяются после скалярного умножения уравнения для $\boldsymbol{\phi}^{(n)}$ на $\boldsymbol{\varphi}_3(x_0)$ и $\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)$ соответственно.

Из формул (6.10)-(6.16) легко получить, что $\boldsymbol{\phi}^{(0)}(\tau) = O(1)$, $\eta^{(0)}(\tau) = O(1)$, $\boldsymbol{\phi}^{(1)}(\tau) = O(\tau)$, $\eta^{(1)}(\tau) = O(\tau)$, а из приведенных выше формул видно, что при $n > 1$ $\eta^{(n)}(\tau) = O(\tau^n)$, $\boldsymbol{\phi}^{(n)}(\tau) = O(\tau^{n+2})$ при $|\tau| \to \infty$ Следовательно, условие асимптотичности имеет вид $\varepsilon^{1/2}\tau^3 = \varepsilon^{1/2-3\gamma} \ll 1$, т. е. $\gamma < 1/6$.

Таким образом, ширина резонансной зоны определяется соотношением

$$|\tau| \ll \varepsilon^{-1/6}. \quad (6.23)$$

7. Сшивание адиабатического и резонансного решений

Из (5.8) и (6.23), легко видеть что волновая и резонансная зоны перекрываются. Будем сшивать решения (4.18) и (6.17) в общей области применимости

$$\varepsilon^{1/2} \ll |x - x_0| \ll \varepsilon^{1/3} \quad \text{или} \quad \tau = O(\varepsilon^{-\gamma}), \quad 0 < \gamma < 1/6. \qquad (7.1)$$

Для этого мы (как это обычно делается в дифракционной теории пограничного слоя, см. [16]) переходим в адиабатических разложениях к растянутой переменной

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_j(x, 1/\varepsilon) &\equiv \mathbf{\Psi}_j(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon), \quad j = 1, 2, \\ \mathbf{\Psi}_j(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon) &= \mathbf{\Phi}_j(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_\pm}^{(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau)} \beta_j \, dx \right\}, \end{aligned} \qquad (7.2)$$

где нижними пределами интегрирования в экспоненте являются x_+ для $x > x_0$ и x_- для $x < x_0$. Мы раскладываем (7.2) в ряды по τ и группируем члены одного порядка по $\sqrt{\varepsilon}$. Мы проделаем это по обе стороны от x_0.

Для описания в главном порядке эффекта рождения новой волны, достаточно учесть при сшивании только слагаемые порядка $O(\sqrt{\varepsilon}\tau^3)$ в показателе экспоненты и $O(\sqrt{\varepsilon}\tau)$ в векторной амплитуде, т.е. те слагаемые, которые при $|\tau| \sim 1$ формально имеют порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$.

7.1 Перестройка адиабатических решений.

В показателе экспоненты имеем

$$\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_\pm}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau} \beta_1(x, \varepsilon) \, dx = \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_\pm}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau} (\lambda_1(x) + \varepsilon^2 \beta_1^{(2)}(x) + \dots) \, dx. \qquad (7.3)$$

Интеграл от нулевого приближения находится следующим образом

$$\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau} \lambda_1(x) \, dx = \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_\pm}^{x_0} \lambda_1(x) \, dx + \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_0}^{x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau} \lambda_1(x) \, dx = \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_{x_\pm}^{x_0} \lambda_1(x) \, dx$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_{0}^{\tau} \left(\lambda_1(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\tau \dot{\lambda}_1(x_0) + \varepsilon \ddot{\lambda}_1(x_0) \frac{\tau^2}{2} \right) d\tau + O(\varepsilon\tau^4). \qquad (7.4)$$

Следующие приближения $\beta_1^{(n)}, n \geqslant 2$, если мы интересуемся слагаемыми порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$, учитывать не надо, что следует из оценки $O(\beta^{(2)}\varepsilon^2/\sqrt{\varepsilon}) = O(\varepsilon^{3/2}/(\lambda_1(x) - \lambda_2(x)) = O(\varepsilon/\tau) = O(\varepsilon^{1+\gamma})$, если $x_\pm$ удовлетворяет (7.1).

Для векторной амплитуды $\mathbf{\Phi}_1(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{\Phi}_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon)$, согласно (5.4), имеем

$$\mathbf{\Phi}_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) +$$
$$+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \mathbf{d}_1^{(n)}(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau)}{(\lambda_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) - \lambda_2(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau))^{2n-1}}. \tag{7.5}$$

Подставив сюда тейлоровское разложение $\boldsymbol{\varphi}_1(x) \equiv \boldsymbol{\varphi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau) = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\tau\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(x_0) + O(\varepsilon\tau^2)$, следующую из (5.6), (5.7) и (5.9) формулу

$$\lambda_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) - \lambda_2(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) = \sqrt{\varepsilon}\sigma\tau + O(\varepsilon\tau^2), \tag{7.6}$$

и вытекающее из (5.2) разложение

$$\mathbf{d}_1^{(n)}(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau) = \mathbf{d}_1^{(n)}(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau), \tag{7.7}$$
$$\mathbf{d}_1^{(n)}(x_0) = (-i)^{n-1}(2n-3)!!\,\sigma^{n-1}\mathcal{V}_{21}(x_0)\boldsymbol{\varphi}_2(x_0),$$

найдем, что

$$\mathbf{\Phi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau, \varepsilon) = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0)+\sqrt{\varepsilon}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(x_0)\tau+\sqrt{\varepsilon}\mathcal{A}_{12}(\tau)\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)+O(\varepsilon), \tag{7.8}$$

где $\mathcal{A}_{12}$ дается асимптотическим при $\tau \to \infty$ рядом

$$\mathcal{A}_{12} = i\mathcal{V}_{21}(x_0)\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{i^n\,\sigma^n\,\tau^{2n-1}}. \tag{7.9}$$

В слагаемое порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ разложения (7.8) внесли вклад все приближения $\mathbf{\Phi}_1^{(n)}$. Формулы (7.8) и (7.9) справедливы в промежуточных областях как слева, так и справа от x_0.

7.2 Сшивание резонансного и адиабатического решений.

Рассмотрим решение, имеющее асимптотическое разложение $\mathbf{\Upsilon}_1(\tau,\varepsilon)$ в резонансной области (см. раздел 6). Покажем, что слева от x_0 при $\tau \to -\infty$ в области (7.1) оно выражается через асимптотическое разложение (4.18)

$$\mathbf{\Upsilon}_1(\tau,\varepsilon) = C_{1-}\mathbf{\Psi}_1(x_0 + \sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon) + O(\varepsilon\tau^2),\ \tau \to -\infty. \tag{7.10}$$

где $C_1^- = \exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_-}^{x_0}\lambda_1\,dx\right\}$. В правой промежуточной области $\tau \to +\infty$ его асимптотика, как выясняется, другая

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Upsilon}_1(\tau,\varepsilon) = C_1^+\boldsymbol{\Psi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon)+\\ +\ t_{12}\,C_2^+\boldsymbol{\Psi}_2(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon)+O(\varepsilon\tau^2),\end{aligned} \qquad (7.11)$$

где $C_1^+ = \exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_+}^{x_0}\lambda_1\,dx\right\}$, $C_2^+ = \exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\int_{x_+}^{x_0}\lambda_2\,dx\right\}$, а коэффициент возбуждения сдвиговой моды t_{12} будет описан ниже. Различие между (7.10) и (7.11) связано с разным видом асимптотик интеграла Френеля $\mathcal{F}(\tau)$ при $\tau\to-\infty$ и $\tau\to+\infty$.

Слева от точки вырождения. Из формул (6.19) и (7.4) и выражения для C_1^- следует, что фазовые функции в правой и левой частях (7.10) совпадают с точностью до членов порядка $O(\sqrt{\varepsilon}\tau^3) = O(\varepsilon^{1/2-3\gamma})$ включительно.

Векторные амплитуды $\boldsymbol{\phi}_1(\tau,\varepsilon)$ (6.18) и $\boldsymbol{\Phi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon)$ (7.8) разложены по базису $\boldsymbol{\varphi}_j(x_0)$, $j=1,\ldots,4$. Непосредственно видно, что коэффициенты в этих разложениях при $\boldsymbol{\varphi}_1(x_0)$, $\boldsymbol{\varphi}_3(x_0)$ и $\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)$ совпадают. Убедимся теперь в совпадении коэффициентов при $\boldsymbol{\varphi}_2(x_0)$, обозначенных через $\alpha_{12}(\tau)$ (6.14) и $\mathcal{A}_{12}(\tau)$ (7.9). Слева от точки x_0, т. е. при $\tau\to-\infty$, асимптотику интеграла Френеля, входящего в α_{12}, легко найти интегрированием по частям

$$\mathcal{F}(\tau) = \exp\left\{i\sigma\tau^2/2\right\}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{i^n\,\sigma^n\,\tau^{2n-1}}. \qquad (7.12)$$

Сравнивая теперь (6.14) с (7.9), видим, что

$$\alpha_{12}(\tau) = \mathcal{A}_{12}(\tau), \quad \tau\to-\infty \qquad (7.13)$$

со сверхстепенной точностью по $1/\tau = \varepsilon^\gamma$ и, следовательно, (7.10) в самом деле выполняется.

Справа от точки вырождения. Сразу ясно, что коэффициенты при $\boldsymbol{\varphi}_j(x_0)$, $j=1,3,4$ в разложении векторных амплитуд $\boldsymbol{\phi}_1(\tau,\varepsilon)$ (6.18) и $\boldsymbol{\Phi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon)$ (7.8) снова совпадают. Асимптотика интеграла Френеля $\mathcal{F}(\tau)$ при $\tau\to+\infty$ находится с помощью тождества

$$\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(+\infty) - \mathcal{F}(-\tau). \qquad (7.14)$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом, имеем для $-\mathcal{F}(-\tau)$ ту же формулу (7.12).

В результате, подставляя (7.14) в a_{12}, имеем при $\tau \to +\infty$

$$\alpha_{12}(\tau) = i\mathcal{V}_{21}(x_0)\mathcal{F}(+\infty)\exp\left\{-i\sigma\tau^2/2\right\} + \mathcal{A}_{12}(\tau). \tag{7.15}$$

Подставляя (7.15) в (6.18) и учитывая следующее из (5.7) и (6.19) равенство

$$\int_0^\tau \eta_2(\tau)\,d\tau = \int_0^\tau \eta_1(\tau)\,d\tau - \sigma\tau^2/2 + O(\sqrt{\varepsilon}\tau^3),$$

получим в самом деле

$$\boldsymbol{\Upsilon}_1(\tau,\varepsilon) = C_1^+\boldsymbol{\Psi}_1(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon) + t_{12}C_2^+\boldsymbol{\Psi}_2(x_0+\sqrt{\varepsilon}\tau, 1/\varepsilon) + O(\varepsilon\tau^2),$$

где коэффициент вобуждения сдвиговой моды t_{12} может быть найден в виде

$$t_{12} = i\mathcal{V}_{21}(x_0)\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\sigma|}}\exp\left\{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sigma)\right\}. \tag{7.16}$$

Отметим, что множитель $i\mathcal{V}_{21} = 1/2$ – вещественный.

В дальнейшем, при вычислении преобразования Фурье нам потребуется выражение коэффициента возбуждения сдвиговой волны не только при положительных, но и при отрицательных частотах. Построение резонансного решения и его сшивание с адиабатикой производится при отрицательной частоте ω, (а значит, при отрицательном ε) аналогично тому, как это было сделано при положительном ε. Для коэффициента возбуждения сдвиговой волны получается в результате формула, пригодная как при отрицательных так и при положительных ε

$$\begin{aligned} t_{12} &= i\mathcal{V}_{21}(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{i\sigma s^2}{2\varepsilon}\right\}ds \\ &= i\mathcal{V}_{21}(x_0)\sqrt{\frac{2\pi|\varepsilon|}{|\sigma|}}\exp\left\{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sigma\varepsilon)\right\}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

8. Резонансное взаимодействие мод

Возьмем точное решение системы (2.6), соответствующее изгибной волне, бегущей слева направо в направлении к точке вырождения и имеющее асимптотику

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}(x,1/\varepsilon) &\approx C_1^-\boldsymbol{\Psi}_1(x,1/\varepsilon)\exp\left\{i\Lambda_1(x_0)/\varepsilon\right\} \quad \text{при} \quad x_0 - x \gg \sqrt{\varepsilon}, \\ \widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}(x,1/\varepsilon) &= \boldsymbol{\varphi}_1(x)\exp\left\{i\Lambda_1(x)/\varepsilon\right\} + O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad x_0 - x \gg \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где мы ввели для эйконала, соответсвующего изгибной волне, обозначение

$$\Lambda_1(x) \equiv \int_0^x \lambda_1(y)\, dy.$$

Справа от резонансной зоны, то есть при $x - x_0 \gg \sqrt{\varepsilon}$, это решение представляет собой сумму двух мод

$$\widehat{\mathbf{\Psi}_1}(x, 1/\varepsilon) = \boldsymbol{\varphi}_1(x) \exp\left\{i\Lambda_1(x)/\varepsilon\right\} + \\ + \; t_{12}\, \boldsymbol{\varphi}_2(x) \exp\left\{i\Lambda_{12}(x)/\varepsilon\right\} + O(\varepsilon), \quad (8.2)$$

где

$$\Lambda_{12}(x) = \int_0^{x_0} \lambda_1 dx + \int_{x_0}^{x} \lambda_2 dx, \quad (8.3)$$

а коэффициент возбуждения сдвиговой волны t_{12} определяется формулой (7.17). Выразим его через размерные параметры балки и частоту ω

$$t_{12} = T\sqrt{\frac{\pi}{|\omega|}} \exp\left\{\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}(\sigma\omega)\right\}, \quad T = \frac{c_0}{L\sqrt{2|\dot{c}_1 - \dot{c}_2|}}_{x=x_0}. \quad (8.4)$$

Аналогично асимптотики решения, отвечающего сдвиговой волне $\widehat{\mathbf{\Psi}_2}(x, 1/\varepsilon)$, получаются заменой индексов 1 и 2 в формулах (8.1)-(8.3). Коэффициент возбуждения изгибной моды сдвиговой равен $t_{21} = t_{12}^*$.

9. Распространение сингулярностей

Применим теперь результаты о высокочастотных гармонических волнах к распространению сингулярностей в балке Тимошенко. Рассмотрим при $t > 0$ два связаных волновых уравнения

$$m w_{tt} = \left[G\kappa A\left(w_x + u\right)\right]_x, I_m u_{tt} = \left(EI u_x\right)_x - G\kappa A\left(w_x + u\right), \quad (9.1)$$

где t – время, $w(x,t)$ – прогиб балки, $u(x,t)$ – угол отклонения нормали к поперечному сечению от оси балки. Уравнения дополняются следующими начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,t)|_{t=0} = w(x,0) = w_t(x,t)|_{t=0} = 0, \quad (9.2)$$

$$w_t(0,t) = \delta(t), \quad u_x(0,t) = 0. \quad (9.3)$$

Решение задачи (9.1)-(9.3) существует и единственно в подходящем классе обобщенных функций, что нетрудно показать, следуя

[19], причем в граничных условиях допускаются и другие обобщенные функции. Заменим начальные условия (9.2) на

$$u(x,t) = u_t(x,t) = w(x,t) = w_t(x,t) = 0 \qquad \text{при} \quad t < 0.$$

Теперь систему (9.1) можно рассматривать на интервале $-\infty < t < +\infty$ и применять к ней преобразование Фурье по t

$$F[f](x,\omega) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{i\omega t}dt,$$

что сведет ее к системе (2.1). Вводя вектор

$$\boldsymbol{\psi} = (w_t,\ u_t,\ EIu_x,\ GkA(w_x+u))^T, \tag{9.4}$$

мы сведем задачу (9.1)-(9.3) к задаче

$$\boldsymbol{\mathcal{H}\psi}_t - i\boldsymbol{\mathcal{V}\psi} = -\boldsymbol{\Gamma\psi}_x, \tag{9.5}$$

$$\psi_{(1)}(0,t) = \delta(t), \quad \psi_{(3)}(0,t) = 0, \quad \boldsymbol{\psi}(x,t) = 0 \ \text{ при } \ t < 0, \tag{9.6}$$

где $\psi_{(j)}, j = 1,2,3,4$ - компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}$. Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{\Psi}(x,\omega)$=$F[\boldsymbol{\psi}](x,\omega)$ удовлетворяет системе (2.6) с условиями

$$\Psi_{(1)}(0,\omega) = 1, \qquad \Psi_{(3)}(0,\omega) = 0. \tag{9.7}$$

Ищем решение в виде

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = F^{-1}[B_1(\omega)\widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}(x,\omega)+B_2(\omega)\widehat{\boldsymbol{\Psi}_2}(x,\omega)](x,t), \tag{9.8}$$

$$B_j = b_{j0} + b_{j1}/\omega + \dots \quad j = 1,2$$

где $F^{-1}[f]$ - обратное преобразование Фурье, а $\widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}$ и $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_2$ - точные решения, имеющие асимптотические разложения (4.18), (4.19) для $0 \leqslant x < x_0$, при $\Im\omega \geqslant 0$ (см. Замечания к разделу 4). Коэффициенты $b_{jk}, k \geqslant 0, j = 1,2$, находим, требуя чтобы аргумент F^{-1} удовлетворял (9.7). Это условие даст рекуррентные соотношения для b_{jk}.

Мы привели выше построение лишь главных членов асимптотики решений $\widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}$ и $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_2$. Они позволяют нам описать распространение только главных сингулярностей. Полагая $b_{10} \equiv C = \sqrt{2m(0)c_1(0)}$, $b_{20} = 0$, мы удовлетворяем условию (9.7) в главном порядке. Пользуясь аналитическими свойствами решений и леммой Жордана, удовлетворяем начальным условиям. Итак,

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = SF^{-1}[\widehat{\boldsymbol{\Psi}_1}](x,t) + \boldsymbol{E}(x,t). \tag{9.9}$$

Мы обозначаем через $\boldsymbol{E}(x,t)$ четырехкомпонентную вектор-функцию, преобразование Фурье от каждой из компонент которой есть $O(1/\omega)$, а через $e(x,t)$ - такую скалярную функцию. Подставляя вместо $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_1(x,\omega)$ его асимптотику (8.1) при $x_0 - x \gg \sqrt{\epsilon}$, имеем

$$\psi(x,t) = \delta(t - \Lambda_1(x))\, C\, \boldsymbol{\varphi}_1(x) + \boldsymbol{E}(x,t). \tag{9.10}$$

Первая и третья компоненты этого вектора,

$$w_t = \sqrt{\frac{c_1(0)m(0)}{c_1(x)m(x)}}\ \delta\left(t - \int\limits_0^x \frac{dx}{c_1(x)}\right)\ +\ e(x,t), \quad u_t = e(x,t),$$

удовлетворяют граничным условиям в главном порядке по гладкости. Подставляя вместо $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_1(x,\omega)$ его асимптотику при $x - x_0 \gg \sqrt{\epsilon}$, получаем при $x > x_0$

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = \delta(t - \Lambda_1(x)) C \boldsymbol{\varphi}_1(x) + J(x,t) C \boldsymbol{\varphi}_2(x) + \boldsymbol{E}(x,t), \tag{9.11}$$

где $J(x,t)$ описывает форму появившейся волны

$$J(x,t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left\{i\omega(\Lambda_{12}(x) - t) + i\operatorname{sgn}(\omega\sigma)\pi/4\right\}}{|\omega|^{1/2}}\, d\omega. \tag{9.12}$$

Этот интеграл вычисляется стандартным образом. Окончательно

$$J(x,t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} 2 \sqrt{\frac{\pi}{|\Lambda_{12} - t|}} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(\sigma(\Lambda_{12}(x) - t))\right),$$

$$\begin{aligned} J(x,t) &= T(t - \Lambda_{12})_+^{-1/2} \quad \text{для} \quad \sigma > 0; \\ J(x,t) &= T(t - \Lambda_{12})_-^{-1/2} \quad \text{для} \quad \sigma < 0, \end{aligned} \tag{9.13}$$

где $z_\pm^{-1/2} = |z|^{-1/2}\Theta(\pm z)$, $\Theta(z) = 1$ при $z > 0$ и $\Theta(z) = 0$ при $z < 0$.

Записывая решение покомпонентно, находим для $x > x_0$

$$w_t = \sqrt{\frac{c_1(0)m(0)}{c_1(x)m(x)}}\, \delta\left(t - \int\limits_0^x \frac{dx}{c_1}\right) + e(x,t), \tag{9.14}$$

$$u_t = T\ \sqrt{\frac{c_1(0)m(0)}{c_2(x)I_m(x)}}\ (t - \Lambda_{12}(x))_+^{-1/2}\ + e(x,t) \quad \text{при} \quad \sigma > 0 \tag{9.15}$$

$$u_t = T\ \sqrt{\frac{c_1(0)m(0)}{c_2(x)I_m(x)}}\ (t - \Lambda_{12}(x))_-^{-1/2}\ + e(x,t) \quad \text{при} \quad \sigma < 0. \tag{9.16}$$

Обсуждение результатов. Таким образом, изгибная волна с дельта-образной особенностью, бегущая слева к точке вырождения x_0, порождает, после прохождения x_0, также и сдвиговую волну с особенностью вида $(t - \Lambda_{12}(x))_{\pm}^{-1/2}$.

В случае $\sigma > 0$ сдвиговая волна перегоняет изгибную в точке x_0. В этом случае дельта-функция в w_t после прохождения x_0 отстает от родившейся слева сдвиговой волны.

При $\sigma < 0$ ситуация обратная: слева от точки x_0 скорость изгибных волн меньше скорости сдвиговых, а справа наоборот. На этот раз, дельта-функция после прохождения x_0 обгоняет родившуюся в x_0 волну.

Мы изобразили на Рис.1 схематически появление сингулярности сдвиговой волны при падении на x_0 изгибной волны в виде ступеньки $w_t = \Theta(t - \Lambda_1(x))$. Это отвечает замене граничного условия для $w_t(0,t)$ на условие $w_t(0,t) = \Theta(t)$. Решение получаются интегрированием по t приведенных выше формул. На рис.1 а) изображен фронт волны при $0 \leqslant t < t_0 \equiv \Lambda_1(x_0)$. На Рис.1$b$), 1$c$) изображены фронты изгибной и сдвиговой волн при $t > t_0$ для случаев $\sigma < 0$ и при $\sigma > 0$ соответственно.

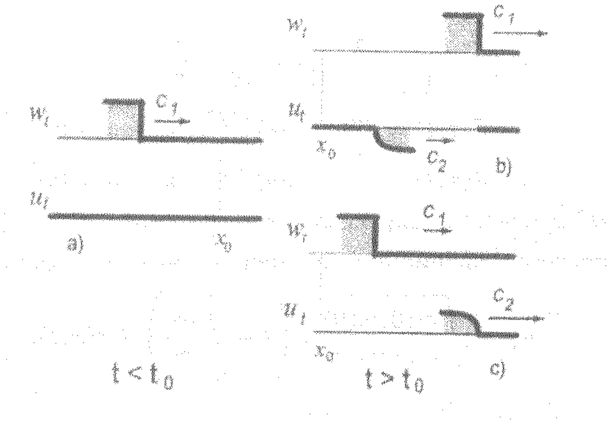

Рис. 1.

Авторы благодарны В. М. Бабичу, М. И. Белишеву, В. С. Булдыреву и М. М. Попову за полезное обсуждение результатов.

Приложение. Связь между $\dot\lambda_j(x_0)$, $\ddot\lambda_j(x_0)$ и $\dot{\boldsymbol\varphi}_j(x_0)$ и матричными элементами $\mathcal{H}_{lk}^{(n)}$

Рассмотрим спектральную задачу (3.4) в окрестности точки $x = x_0$,

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(x)\boldsymbol\varphi_j = \lambda_j \boldsymbol\Gamma \boldsymbol\varphi_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{A.1}$$

Разложим $\boldsymbol{\mathcal{H}}(x)$ в ряд Тейлора, вводя обозначение $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(n)}$ с помощью (6.2),

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(x) = \boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} + (x - x_0)\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)} + (x - x_0)^2\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(2)} + \ldots .$$

Будем искать $\boldsymbol\varphi_j(x)$ и $\lambda_j(x)$ в виде рядов

$$\boldsymbol\varphi_j(x) = \boldsymbol\varphi_j^{(0)} + (x - x_0)\boldsymbol\varphi_j^{(1)} + \ldots , \tag{A.2}$$

$$\lambda_j(x) = \lambda_j^{(0)} + (x - x_0)\lambda_j^{(1)} + (x - x_0)^2\lambda_j^{(2)} + \ldots \tag{A.3}$$

Из (A.1), (A.2) и (A.3) вытекает

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \lambda_j^{(0)}\boldsymbol\Gamma)\boldsymbol\varphi_j^{(0)} = 0, \tag{A.4}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \lambda_j^{(0)}\boldsymbol\Gamma)\boldsymbol\varphi_j^{(1)} = -\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)} - \lambda_j^{(1)}\boldsymbol\Gamma\right)\boldsymbol\varphi_j^{(0)}, \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} - \lambda_j^{(0)}\boldsymbol\Gamma)\boldsymbol\varphi_j^{(2)} = &-\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(1)} - \lambda_j^{(1)}\boldsymbol\Gamma\right)\boldsymbol\varphi_j^{(1)} \\ &-\left(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(2)} - \lambda_j^{(2)}\boldsymbol\Gamma\right)\boldsymbol\varphi_j^{(0)},\end{aligned} \tag{A.6}$$

Из (A.4) следует, что $\lambda_j^{(0)}$ – некоторое собственное число, а $\boldsymbol\varphi_j^{(0)}$ – линейная комбинация соответсвующих собственных функций матрицы $\boldsymbol{\mathcal{H}}^{(0)} \equiv \boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0)$. Матрица $\boldsymbol{\mathcal{H}}(x_0)$ имеет два двукратных собственых числа $\pm\lambda_0$, плюсу соответствует линейная комбинация собственых функций $\boldsymbol\varphi_1(x_0)$ и $\boldsymbol\varphi_2(x_0)$, а минусу – $\boldsymbol\varphi_3(x_0)$ и $\boldsymbol\varphi_4(x_0)$. Выберем нулевые приближения $\boldsymbol\varphi_j$ и λ_j в виде

$$\boldsymbol\varphi_j^{(0)} = q_1\boldsymbol\varphi_1(x_0) + q_2\boldsymbol\varphi_2(x_0), \quad \lambda_j^{(0)} = \lambda_0, \tag{A.7}$$

где q_1 и q_2 – произвольные постоянные. Рассмотрение случая $\lambda_j^{(0)} = -\lambda_0$ проводится аналогично.

Из условия разрешимости уравнения (A.5) имеем

$$q_1\left(\mathcal{H}_{11}^{(1)} - \lambda_j^{(1)}\right) = 0, \qquad q_2\left(\mathcal{H}_{22}^{(1)} - \lambda_j^{(1)}\right) = 0,$$

где учтено следующее из (2.7) равенство $\mathcal{H}_{12}^{(1)} = \mathcal{H}_{21}^{(1)} = 0$. Считая, что $\mathcal{H}_{11}^{(1)} \neq \mathcal{H}_{22}^{(1)}$ получаем, что $q_2 = 0, \lambda_1^{(1)} = \mathcal{H}_{11}^{(1)}$, а условие нормировки дает $q_1 = 1$,или $q_1 = 0, \lambda_2^{(1)} = \mathcal{H}_{22}^{(1)}$ и $q_2 = 1$.

Первое приближение $\boldsymbol{\varphi}_1^{(1)}(x)$ будем искать в виде :

$$\boldsymbol{\varphi}_1^{(1)}(x) = \sum\nolimits_{j=1}^4 a_{1j}^{(1)}(x)\boldsymbol{\varphi}_j(x_0). \tag{A.8}$$

Подставляя (A.8) в (A.6), получаем

$$2\lambda_0 \left(a_{13}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_3(x_0) + a_{14}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)\right) = \left(\mathcal{H}^{(1)} - \lambda_1^{(1)}\mathbf{\Gamma}\right)\boldsymbol{\varphi}_1(x_0).$$

Умножая это равенство на $\boldsymbol{\varphi}_3(x_0)$, $\boldsymbol{\varphi}_4(x_0)$ и учитывая (3.8), получаем

$$a_{13}^{(1)} = -\mathcal{H}_{31}^{(1)}/(2\lambda_0), \qquad a_{14}^{(1)} = -\mathcal{H}_{41}^{(1)}/(2\lambda_0).$$

Из явного вида $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и $\boldsymbol{\varphi}_i$ следует, что $\mathcal{H}_{41}^{(1)} = 0$, а значит и $a_{14}^{(1)} = 0$. Формулы для $a_{12}^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}$ получаются из условий разрешимости (A.6).

$$a_{12}^{(1)} = 0, \quad \lambda_1^{(2)} = \mathcal{H}_{11}^{(2)} + a_3^{(1)}\mathcal{H}_{13}^{(1)}.$$

Процесс построения поправок может быть продолжен. Ищем $\boldsymbol{\varphi}_1^{(n)}$ в виде $\boldsymbol{\varphi}_1^{(n)} = \sum_{j=1}^4 a_{1j}^{(n)}\boldsymbol{\varphi}_j(x_0)$. Из условия разрешимости уравнения при $(x-x_0)^n$ могут быть получены $\lambda_1^{(n)}$ и $a_2^{(n-1)}$, а из самого уравнения – $a_{3,4}^{(n)}$. Коэффициенты $a_{11}^{(n)}$ остаются произвольными, мы полагаем $(\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_1^{(n)}) = 0$, откуда

$$a_1^{(n)} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

Таким образом, Тейлоровские разложения $\lambda_1(x)$ и $\boldsymbol{\varphi}_1(x)$ имеют вид

$$\lambda_1(x) = \lambda_0 + (x-x_0)\mathcal{H}_{11}^{(1)} + (x-x_0)^2\left(\mathcal{H}_{11}^{(2)} - \frac{\mathcal{H}_{13}^{(1)}\mathcal{H}_{31}^{(1)}}{2\lambda_0}\right) + \ldots$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \boldsymbol{\varphi}_1(x_0) - (x-x_0)\frac{\mathcal{H}_{31}^{(1)}}{2\lambda_0}\boldsymbol{\varphi}_3(x_0) + \ldots\ .$$

Отсюда имеем

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1(x_0) = -\frac{\mathcal{H}_{31}^{(1)}}{2\lambda_0}\boldsymbol{\varphi}_3(x_0),$$

$$\dot{\lambda}_1(x_0) = \mathcal{H}_{11}^{(1)}, \qquad \frac{\ddot{\lambda}_1(x_0)}{2} = \mathcal{H}_{11}^{(2)} - \frac{\mathcal{H}_{13}^{(1)}\mathcal{H}_{31}^{(1)}}{2\lambda_0}.$$

Литература

1. K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids.* Clarendon Press, Oxford (1975).
2. A. Robinson, *Transient stresses in beams of variable characteristics.* Quart. J. Mech. and Appl. Math., **10**, No. 2 (1957), 148–159.
3. H. Buttler, *Theoretische Untersuchungen erzwungener elastischer Schuffsk orperschwingungen mit dem Ziel der Vorausbestimmung auftrender Amplituden in Rezonanzfall.* Schiffbauforschung, **5**, No. 3–4 (1966) 209–214.
4. C. G. Yang, *Propagation of discontinuous waves in nonuniform Timoshenko beams.* Trans. ASME, **E 33**, (1966), 706–708.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика.* Наука, М. (1974).
6. В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, *Адиабатические возмущения периодического потенциала.* Теор. и Матем. Физика. **73**, No. 3 (1987), 430–442.
7. K. G. Budden, *Radio waves in the ionospere.* Cambridge University Press, Cambridge (1961).
8. Н. С. Беллюстин, *О линейном взаимодействии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме.* Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика **21**, No. 11 (1978), 1563–1571.
9. Т. И. Бичуцкая, В. В. Новиков, Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика **22**, No. 7 (1979), 860–869.
10. М. В. Перель, *Перевозбуждение мод в анизотропном волноводе Земля – ионосфера на трансэкваториальных трассах при наличии двух близких точек вырождения.* Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика **33**, No. 11 (1990), 1208–1216.
11. Б. А. Молотков, А. С. Старков, *Локальное резонансное взаимодействие нормальных волн в связанных волноводах.* Проблемы матем. физики **10** (1982), 164-176.
12. M. M. Popov, I. N. Schitov, *What may happen if the velocities of qS waves in an anisotropic inhomogeneous medium coincide at a point?.* Wave Inversion Technology, Report WITREPORT98, (1999), 287–291.
13. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Asymptotic theory of a local degeneration of Love and Rayleigh modes.* Day on Diffraction'99, (1998), 86–90.
14. В. В. Кучеренко, *Асимптотическое поведение решений системы $A(x, -ih\partial/\partial x)u = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности.* Изв. АН СССР. сер. Матем. **58**, No. 2 (1974), 163–213.
15. В. В. Кучеренко, Ю. В. Осипов, *Асимптотические решения обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождающимся символом.* Матем. Сборник **118**, No. 1 , (1982), 74-103.
16. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд. ЛГУ, Л. (1975).
17. Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* Наука, М. (1978).
18. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter.* Trans. Amer. Math. Soc. **9**, No. 2 (1908), 219-231.
19. В. М. Бабич, О. В. Изотова, *О решении в обобщенных функциях задач математической физики.* Изд. СПбГУ, СПб. (1998).

Perel M. V., Fialkovsky I. V., Kiselev A. P., Resonance interaction of bending and shear modes in a non-uniform Timoshenko beam.

Interaction of two modes is considered which arise when their phase velocities intersect at a single point, in the high-frequency regime. The analogous problem of singularity propagation is also considered.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 17 января 2000 г.