Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. М. Попов

ВОЛНЫ SH В ОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

Введение

Задачи о распространении волн в однородных упругих анизотропных средах являются модельными задачами, которые позволяют сформировать априорные представления о волнах в более общих неоднородных анизотропных средах, интересных, например, для геофизических приложений. Они содержат новые эффекты по сравнению с аналогичными задачами для изотропных сред и с математической точки зрения оказываются значительно более трудными. Это, вероятно, и приводит к появлению в литературе сомнительных результатов. Так в работе [1], (см. по этому поводу также [2]), приводится “удивительный результат”, “полный SH-волновой тензор Грина выражается в следующем очень простом виде”:

$$G_{in}^{\mathrm{SH}}(x_j,t)=\frac{1}{4\pi\rho}\,\frac{1}{\sqrt{a_{44}}}\left\{\frac{\delta(t-\tau)}{a_{66}\tau}g_i^{\mathrm{SH}}\,g_n^{\mathrm{SH}}+\right.$$
$$\left.+\frac{H(t-\tau)}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\,\left(g_i^{\mathrm{SH}}\,g_n^{\mathrm{SH}}-g_i^{\mathrm{SH}\,\perp}\,g_n^{\mathrm{SH}\,\perp}\right)\right\},\qquad(0.1)$$

в которой $\tau=r\sqrt{a_{66}^{-1}\sin^2\vartheta+a_{44}^{-1}\cos^2\vartheta}$ – эйконал, r – расстояние от источника до точки наблюдения, ϑ – угол между лучом и осью симметрии трансверсально изотропной среды, характеризуемой плотностью ρ и упругими постоянными a_{jk}. Как обычно, $\delta(t-\tau)$ и $H(t-\tau)$ есть δ-функция и функция Хевисайда соответственно, g_i^{SH} – элементы вектора поляризации SH волны, а $g_i^{\mathrm{SH}\,\perp}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Чешской республики (грант 205/96/0968), а также EC, INCO-Copernicus, Project PL 963023 и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 99-01-00107).

– элементы ортогонального ему вектора, оба вектора являются постоянными, если фиксирован луч, и не зависят от угла ϑ.

Однако можно видеть, что второе слагаемое в формуле (0.1) является сингулярным на оси симметрии трансверсально изотропной среды, где $\sin\vartheta$ обращается в нуль. Из этого факта на основе общих математических соображений вытекает, что (0.1) не можеь быть “полным SH-волновым тензором”, а точнее не является точным решением соответствующих уравнений упругости. Действительно, предположим противное, т.е. что формула (0.1) есть точное решение. Тогда после преобразования Фурье по времени она дает точное решение эллиптической системы уравнений с постоянными, а значит, гладкими коэффициентами в безграничном пространстве. Но в теории эллиптических уравнений известно, (см., например, [3] и приведенные там ссылки), что точное решение такой эллиптической системы может иметь сингулярность лишь там, где сингулярна правая часть. В нашем случае неоднородность есть точечные источники, расположенные в начале координат $r = 0$, и следовательно точное решение не может быть сингулярным на всей оси $\vartheta = 0$. Однако очевидно, что формула (0.1) остается сингулярной на оси после преобразования Фурье по времени.

Таким образом, остается вопрос, что же представляет собой формула (0.1).

Цель настоящей работы исследовать SH волны в трансвермально изотропной среде, возбуждаемые сосредоточенной силой. В работе строится “часть” тензора Грина, ответственная за SH-волны, и находится ее асимптотика на больших расстояниях от источника как в окрестности оси симметрии, так и вне ее. Попутно выясняется смысл формулы (0.1).

§1. Вывод основных формул

Задача для тензора Грина $G_{in}(\vec{x}, t)$ в однородной анизотропной среде формулируется следующим образом:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{mn} - c_{mjkl}\frac{\partial^2\, G_{kn}}{\partial x_l\,\partial x_j} = \delta_{mn}\delta(\vec{x})\,\delta(t), \tag{1.1}$$

$$G_{mn}(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0;$$

где $\rho = \mathrm{const}$ – плотность среды, c_{mjkl} – тензор упругих постоянных, удовлетоворяющий известным условиям симметрии, δ_{mn}

– символ Кронекера, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$. Таким образом, в каждом столбце правой части (1.1) мы имеем сосредоточенную силу, ориентированную соответственно вдоль оси x_1, x_2, x_3.

Мы будем рассматривать частный случай задачи (1.1). Во-первых, среда предполагается трансверсально изотропной с осью симметрии ориентированной вдоль x_3. Во-вторых, в правой части мы возьмем сосредоточенную силу вдоль оси x_1, что соответствует первому столбцу в (1.1) и, наконец, мы рассмотрим стационарный вариант задачи, выделив временной множитель в виде $\exp(-i\omega t)$. Соответствующий вектор смещения обозначим через $\vec{U}(\vec{x};\omega) = (U_1, U_2, U_3)$, уравнения упругости для него приобретают вид

$$\rho(-i\omega)^2 U_m - c_{mjkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \, \partial x_l} = \frac{1}{2\pi} \delta_{m1} \, \delta(\vec{x}). \tag{1.2}$$

Нестационарный вектор смещения $\vec{V}(\vec{x}, t)$ восстанавливается по нему вычислением интеграла Фурье по частоте ω

$$V(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \, \vec{U}(\vec{x};\omega) \, d\omega. \tag{1.3}$$

К уравнению (1.2) следует добавить условия излучения, обеспечивающие отсутствие волн, приходящих из бесконечности. Они будут реализованы при построении решения с помощью преобразования Фурье.

Далее $\vec{U}(\vec{x};\omega)$ ищем в виде

$$\vec{U}(\vec{x};\omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 \, d\alpha_2, \, d\alpha_3 \vec{u}_{(\vec{\alpha};\omega)} \exp(i x_k \, \alpha_k). \tag{1.4}$$

Для $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ возникает линейная алгебраическая система

$$A_{mk} \, u_k - \rho\omega^2 \, u_m = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \delta_{m1}, \quad m = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

в которой симметричная, положительно определенная матрица A определяется формулами

$$A_{mk} = c_{mjkl} \, \alpha_j \, \alpha_l, \quad m, \, k = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Теперь вектор $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ в (1.4) находится из системы (1.5) обращением симметричной матрицы $M = A - \rho\omega^2\, E$, где E – единичная матрица 3×3.

Введем в рассмотрение собственные значения λ_j и собственные вектора $\vec{\xi}_j$ матрицы M, тогда M^{-1} может быть представлена спектральным разложением

$$M^{-1}\,\vec{X} = \sum_{j=1}^{3} \frac{(\vec{X},\vec{\xi}_j)}{\lambda_j\,|\vec{\xi}_j|^2}\,\vec{\xi}_j, \tag{1.7}$$

в котором, как обычно, $(\vec{X},\vec{\xi}_j)$ означает скалярное произведение векторов. Использование (1.7) в интеграле (1.4) приводит к представлению полного вектора смещения $\vec{U}(\vec{x};\omega)$, а значит и $\vec{V}(\vec{x},t)$, в виде трех слагаемых, соответствующих трем собственным векторам $\vec{\xi}_j$ матрицы M, и очевидно, A. Такое представление можно было бы рассматривать как естественное разложение полного вектора смещений на типы волн, возбуждаемых данным источником в соответствующей однородной анизотропной среде. Оно в принципе согласуется с лучевыми представлениями (см. [4]). Действительно, если каждый из возникающих интегралов имеет простую стационарную точку внутри области интегрирования, то асимптотика интеграла при $\omega\to\infty$ будет иметь вид лучевого ряда. При этом очевидно, что в главном члене асимптотики вектор смещения будет коллинеарен соответствующему собственному вектору $\vec{\xi}_j$ матрицы M и A. Это вытекает из того факта, что в методе стационарной фазы предэкспоненциальный множитель выносится из-под интеграла со значением в стационарной точке (см. [5]). Тем самым собственный вектор $\vec{\xi}_j$, входящий в формулу (1.7), будет описывать поляризацию волнового поля, но только в главном члене асимптотического разложения.

Обратимся теперь к трансверсально изотропной среде с осью симметрии, направленной вдоль x_3. Элементы матрицы A в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}
A_{11} = c_{11}\,\alpha_1^2 + \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\alpha_2^2 + c_{44}\,\alpha_3^2,\\
A_{22} = \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\alpha_2^2 + c_{11}\,\alpha_2^2 + c_{44}\,\alpha_3^2, \qquad (1.8)\\
A_{33} = c_{44}(\alpha_1^2+\alpha_2^2) + c_{33}\,\alpha_3^2, \quad A_{12} = \frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\alpha_1\,\alpha_2,
\end{gathered}$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}(c_{13} + c_{44})\alpha_1\,\alpha_3, \quad A_{23} = \frac{1}{2}(c_{13} + c_{44})\alpha_2\,\alpha_3,$$

где c_{ik} независимые упругие постоянные, характеризующие среду. Мы сохраняем обозначения, использованные в работе [1].

Собственное значение λ и собственный вектор $\vec{\xi}$, соответствующие SH-волне, которую иы будем рассматривать далее, определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + c_{44}\,\alpha_3^2 - \rho\omega^2, \\ \vec{\xi} &= (\alpha_2, -\alpha_1, 0)^{\mathsf{T}}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где знак "T" означает транспонирование.

Векторы $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ и $\vec{U}(\vec{x};\omega)$ в (1.4), соответствующие SH-волне, будем снабжать индексом SH. Тогда, учитывая спектральное представление (1.7) и равенства (1.5), получаем

$$\vec{u}^{\,(\mathrm{SH})}(\vec{\alpha};\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{\alpha_2}{\lambda(\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

что следует подставить далее в интеграл (1.4).

Особый интерес представляет распространение волн вдоль оси симметрии, когда два из трех собственных значения матрицы M совпадают, или, говоря физическим языком, скорости SH-волны и SV-волны равны, а соответствующие поверхности медленности касаются (см., например [6, 7]).

Мы рассмотрим далее распространение волн в положительном направлении оси x_3, т.е. будем считать $x_3 \geqslant \mathrm{const} > 0$. В формуле (1.4) внутренний интеграл по α_3 при этом вычисляется с помощью леммы Жордана и остается двойной интеграл по α_1, α_2. Действительно, интеграл по α_3 имеет вид

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\exp(i\,x_3\,\alpha_3)\,d\alpha_3. \tag{1.11}$$

Функция λ^{-1} регулярна на плоскости комплексной переменной α_3 за исключением двух простых полюсов в точках $\alpha_3^{(\pm)}$, где $\lambda = 0$:

$$\alpha_3^{(\pm)} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{a_{44}} - \frac{a_{66}}{a_{44}}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)};$$

$$a_{44} = \frac{1}{\rho}\, c_{44}, \qquad a_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}. \tag{1.12}$$

Далее предполагаем, что частота ω слегка комплексна, так что полюса $\alpha_3^{(\pm)}$ сдвигаются с вещественной оси. Контур интегрирования в (1.11) замыкается в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha_3 > 0$, где расположен полюс $\alpha_3^{(+)}$. В результате получаем

$$I_3 = i\pi \frac{\exp(i\, x_3\, \alpha_3^{(+)}}{c_{44}\, \alpha_3^{(+)})}. \tag{1.13}$$

Регулярная ветвь функции $\alpha_3^{(+)}$ в (1.13) выбирается так, чтобы $\exp(i\, x_3\, \alpha_3^{(+)})$ убывала при $x_3 \to +\infty$, когда $a_{66}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) > \omega^2$. Этим обеспечивается выполнение условий излучения. Подчеркнем, что эти выкладки вполне аналогичны тем, например, вычислениям, которые проводятся при построении функции Грина для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае методом преобразования Фурье.

Очевидно, что в случае $x_3 < 0$ мы должны были бы замкнуть контур интегрирования в нижней полуплоскости, где вклад вносит полюс $\alpha_3 = \alpha_3^{(-)}$.

Таким образом, в формуле (1.4) остается двойной интеграл по α_1 и α_2.

На следующем шаге мы вводим полярные координаты, полагая

$$\alpha_1 = \omega\, p\, \cos\chi; \quad \alpha_2 = \omega\, p\, \sin\chi; \quad 0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant p < +\infty, \tag{1.14}$$

так что теперь

$$\alpha_3^{(+)} = \omega \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}\, \sqrt{c^{-2} - p^2}, \qquad c = \sqrt{a_{66}}. \tag{1.15}$$

Вместо декартовых координат x_1, x_2, x_3 вводим сферические s, ϑ, φ

$$\begin{aligned} x_1 &= s\, \sin\vartheta \cos\varphi, \quad && 0 \leqslant s < \infty, \\ x_2 &= s\, \sin\vartheta \sin\varphi, \quad && 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \\ x_3 &= s\, \cos\vartheta, \quad && 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{aligned} \tag{1.16}$$

дающие естественную параметризацию центрального поля лучей, с которым ассоциируется в лучевом методе точечный источник.

В результате, используя равенство (1.10), для вектора смещений $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}(s,\vartheta,\varphi;\omega)$, получаем следующую формулу

$$\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})} = K\int_0^\infty dp\int_0^{2\pi} d\chi\,\frac{p\exp\left\{i\omega s\left[p\sin\vartheta\cos(\varphi-\chi)+\gamma\sqrt{c^{-2}-p^2}\right]\right\}}{\sqrt{c^{-2}-p^2}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\sin^2\chi\\ -\frac{1}{2}\sin^2\chi\\ 0\end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

в которой дополнительно обозначено

$$\gamma=\cos\vartheta\sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}},\qquad K=\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{i\pi\omega}{\rho\sqrt{a_{44}\,a_{66}}}. \tag{1.18}$$

Следует отметить, что регулярная ветвь корня в (1.17) выбирается так, что $\sqrt{c^{-2}-p^2}=i\sqrt{p^2-c^{-2}}$ при $p^2>c^{-2}$ и тем самым подинтегральная функция экспоненциально убывает при $p\to\infty$. Точка ветвления $p=1/c>0$ обходится снизу на комплексной плоскости переменной p, поэтому подинтегральная функция не имеет сингулярностей на контуре интегрирования.

Полученное выражение $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$ позволяет исследовать его асимптотику при $\omega s\to+\infty$ для углов ϑ и φ из интервалов $0\leqslant\vartheta<\pi/2$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, или другими словами, асимптотику вектора смещения на больших расстояниях от источника вдоль луча, заданного лучевыми координатами ϑ и φ.

В заключение параграфа заметим, что на оси симметрии, т.е. при $\vartheta=0$, интегралы в (1.17) вычисляются и приводят к следующей формуле

$$\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}(x_3)=\frac{1}{8\pi^2\,\rho\,a_{66}}\;\frac{\exp\left(i\frac{\omega\,x_3}{\sqrt{a_{44}}}\right)}{x_3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Отсюда вытекает, что поляризация $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}(x_3)$ на оси симметрии совпадает с направлением силы в источнике.

§2. Асимптотика $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$ при $\omega\,s\to\infty$

Прежде чем вычислять асимптотику вектора смещения упростим формулы (1.17), выделив в них лишь один скалярный интеграл. Это возможно потому, что в (1.17) интегрируются по периоду периодические функции χ. Действительно, после замены

$\chi - \varphi = y$ в интеграле по χ угол φ попадает только в предэкспоненциальный множитель и после очевидных тригонометрических преобразований выносится из-под знаков интегралов. В части из возникающих интегралов по y можно выполнить интегрирование по частям, предполагая, что $\sin\vartheta \geqslant \mathrm{const} > 0$. В результате остаются два следующих интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^\infty dp \int\limits_0^{2\pi} d\chi \frac{p}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{ i\,\omega\, s \left[p \sin\vartheta \cos\chi + \gamma\sqrt{c^{-2} - p^2} \right] \right\} \tag{2.1}$$

и

$$I_2 = \int\limits_0^\infty dp \int\limits_0^{2\pi} d\chi \frac{\cos\chi}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{ i\,\omega\, s \left[p \sin\vartheta \cos\chi + \gamma\sqrt{c^{-2} - p^2} \right] \right\}, \tag{2.2}$$

а выражение для вектора смещения приобретает вид

$$\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})} = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix} K I_1 + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} \frac{K}{i\,\omega\, s \sin\vartheta} I_2. \tag{2.3}$$

Далее, интеграл (2.1) вычисляется явно путем сведения к формуле Вейля разложения функции $r^{-1}\exp(ikr)$ по цилиндрическим волнам

$$I_1 = \frac{2\pi}{i\,\omega\, s\sqrt{\gamma^2 + \sin^2\vartheta}} \exp\left\{ i\frac{\omega s}{c}\sqrt{\gamma^2 + \sin^2\vartheta} \right\}. \tag{2.4}$$

К сожалению, второй интеграл (2.2) вычислить в терминах элементарных функций не удалось. Таким образом, для изучения асимптотики $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$ при $\omega s \to +\infty$ достаточно исследовать асимптотику только интеграла (2.2).

Заметим, что вторые слагаемые в формуле (2.3) содержат $\sin\vartheta$ в знаменателе, который обращается в нуль на оси симметрии $\vartheta = 0$. Однако, нетрудно проверить, что интеграл I_2 также обращается в нуль при $\vartheta = 0$, так что в действительности формула (2.3) не имеет сингулярности и может быть использована в окрестности оси симметрии тоже.

Обратимся далее к интегралу I_2. Введем дополнительные обозначения, полагая

$$\begin{aligned} \Phi(p,\chi) &= p\sin\vartheta\cos\chi + \gamma\sqrt{c^{-2}-p^2}, \\ A(p,\chi) &= \cos\chi\left(c^{-2}-p^2\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнения для стационарных точек имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\chi} &= -p\sin\vartheta\sin\chi = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial p} &= \sin\vartheta\cos\chi - \gamma\frac{p}{\sqrt{c^{-2}-p^2}} = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

а область интегрирования в (2.2) представляет собой полубесконечный цилиндр $0 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi$.

Если $\sin\vartheta \geqslant \mathrm{const} > 0$, т.е. мы рассматриваем лучи, лежащие вне некоторой окрестности оси симметрии, то из уравнений (2.6) получаем, что имеется невырожденная стационарная точка

$$p_0 = \frac{\sin\vartheta}{c\sqrt{\gamma^2+\sin^2\vartheta}}, \qquad \chi_0 = 0, \tag{2.7}$$

расположенная внутри области интегрирования. Кроме того, вклад в асимптотику I_2 дает граница области интегрирования $p = 0$, где имеется две стационарных точки I-рода $\chi = \pi/2$ и $\chi = (3\pi)/2$, и к тому же все точки границы оказываются стационарными точками II-рода, т.к. фазовая функция $\Phi(p,\chi)$ (2.5) на границе постоянна, $\Phi(0,\chi) = \gamma/c$.

Если же $\vartheta \to 0$, т.е. лучи приближаются к оси симметрии, то стационарная точка (2.7) приближается к границе области интегрирования, поэтому характер асимптотики интеграла I_2 меняется в окрестности оси.

Рассмотрим сперва случай $\sin\vartheta \geqslant \mathrm{const} > 0$.

Вклад $I^{(\text{с.т.})}$ внутренней невырожденной стационарной точки (2.7) вычисляется традиционным методом, см. [5]. Он представляет собой асимптотический ряд по целым отрицательным степеням большого параметра ωs и тем самым имеет вид лучевого ряда:

$$I^{(\text{с.т.})} = \left\{\frac{-2\pi i}{\omega s}\,\frac{c}{\sin\vartheta} + O\left(\frac{1}{(\omega s)^3}\right)\right\}\exp\left[i\frac{\omega s}{c}\sqrt{\gamma^2+\sin^2\vartheta}\,\right]. \tag{2.8}$$

В результате вычислений оказалось, что второй член ряда (2.8), т.е. член порядка $O(1/(\omega s)^2)$, равен нулю. Непосредственные вычисления третьего члена порядка $O(1/(\omega s)^3)$ становятся чрезвычайно громоздкими, и остается неясным равен он нулю или нет. Из общих соображений лучевого метода, однако, можно утверждать, что если и третий член равен нулю, то вклад в асимптотику интеграла I_2 от стационарной точки (2.7) в точности сводится к главному члену, выписанному в равенстве (2.8).

Подставляя (2.8), (2.4) в (2.3) и сделав преобразование Фурье по ω, получаем выражение для вектора смещения $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$, совпадающее с первым столбцом "полного SH-волнового тензора Грина" (0.1). Таким образом, формула (0.1) соответствует только вкладу в асимптотику интеграла I_2 от стационарной точки (2.7).

Вычисление вклада $I_2^{(\Gamma)}$ от границы $p = 0$ оказывается более сложным. Мы укажем на основные моменты соответствующих вычислений и приведем выражение для главного члена асимптотики.

Введем в рассмотрение нейтрализатор $\eta(p)$, т.е. бесконечно дифференцируемую функцию тождественно равную единице в малой окрестности точки $p = 0$, и обращающуюся в нуль вместе со всеми своими производными вне несколько большей окрестности точки $p = 0$. Рассмотрим далее следующий интеграл

$$I_2^{(\Gamma)}(\varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} d\chi \int\limits_0^{\infty} dp\, \eta(p) A(p,\chi)\, e^{i\omega s \Phi(p,\chi)}\, e^{-\varepsilon p}, \tag{2.9}$$

где $A(p,\chi)$ и $\Phi(p,\chi)$ определяются равенствами (2.5), а $\varepsilon > 0$ – некий дополнительный параметр. Очевидно, (см., например, [5]), что при $\varepsilon = 0$, выражение (2.9) является именно тем интегралом, который описывает вклад от границы в асимптотику исследуемого интеграла (2.2). Ясно также, что вычислив асимптотику (2.9) при $\varepsilon > 0$ и положив затем $\varepsilon = 0$, мы найдем интересующий нас вклад в асимптотику I_2 от границы.

Далее, в рассматриваемой малой окрестности точки $p = 0$ подинтегральные функции разложим в ряды Тейлора

$$A(p,\chi) = c\cos\chi \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, p^{2n}, \qquad a_0 = 1,$$

$$\exp\{i\omega s \Phi(p,\chi)\} = \tag{2.10}$$

$$\exp\left\{i\frac{\omega s\gamma}{c}\right\}\exp\left\{i\omega sp\sin\vartheta\cos\chi\right\}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\,p^{2k},\qquad b_0=1.$$

С учетом (2.10) интеграл (2.9) принимает вид

$$I_2^{(\Gamma)}(\varepsilon)=$$

$$=c\exp\left\{i\frac{\omega s\gamma}{c}\right\}\sum_{m=0}^{\infty}d_m\int\limits_0^{2\pi}d\chi\cos\chi\int\limits_0^{\infty}dp\,\eta(p)\,p^{2m}\exp\{\Lambda p\},\qquad(2.11)$$

где коэффициенты d_m выражаются через a_n и b_k и

$$\Lambda=i\omega s\sin\vartheta\cos\chi-\varepsilon.$$

Благодаря наличию $\varepsilon\neq 0$ функция Λ не обращается в нуль и интегралы по p в (2.11) можно интегрировать по частям сколько угодно раз. Возникающие при этом интегралы по χ вычисляются с помощью теоремы о вычетах.

Рассмотрим подробнее главный член $m=0$ в (2.11). Можно видеть, что

$$\int\limits_0^{\infty}dp\,\eta(p)\exp\{\Lambda p\}=-\frac{1}{\Lambda}+O\big(\Lambda^{-\infty}\big)$$

и затем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi}d\chi\frac{\cos\chi}{-\Lambda}=$$

$$=\frac{-1}{i\,\omega\,s\sin\vartheta}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi}d\chi\frac{\cos\chi}{\cos\chi-\frac{\varepsilon}{i\,\omega\,s\sin\vartheta}}=\frac{-2\pi}{i\,\omega\,s\sin\vartheta}.$$

Заметим, что интеграл по χ при $\varepsilon\neq 0$ вычисляется здесь по теореме о вычетах с помощью замены $z=\exp(i\chi)$.

Итак, в главном члене асимптотики вклад от границы в интеграл (2.2) приводит к “волне” $\vec{U}_{\Gamma}^{(\mathrm{SH})}$ следующего вида

$$\vec{U}_{\Gamma}^{(\mathrm{SH})}\sim\frac{i}{8\pi^2\rho\sqrt{a_{44}}}\left(\omega\,s^2\sin^2\vartheta\right)^{-1}\exp\left(i\,\omega\frac{s\cos\vartheta}{\sqrt{a_{44}}}\right)\begin{pmatrix}\cos 2\varphi\\ \sin 2\varphi\end{pmatrix}.\qquad(2.12)$$

Это выражение представляет собой волну с плоским фронтом, т.к. $s\cos\vartheta=x_3$, распространяющимся в направлении оси симметрии $x_1=x_2=0$ с скоростью $\sqrt{a_{44}}$. Напомним, что формула

(2.12) непригодна в окрестности оси, где $\sin\vartheta = 0$. Ясно, что эта волна не имеет физического смысла и в асимптотике для полного тензора Грина она существовать не может. Она должна сокращаться за счет той части тензора Грина, которая связана с квазипоперечной волной.

Рассмотрим теперь случай малых ϑ, когда лучи заполняют коническую окрестность, содержащую ось симметрии $\vartheta = 0$. Мы будем предполагать, что

$$\theta \equiv \sqrt{\omega s}\sin\vartheta = O(1) \quad \text{при} \quad \omega s \to \infty. \tag{2.13}$$

Очевидно, что это условие включает также $\vartheta = 0$. Асимптотика I_2, определяемого формулой (2.2), находится следующим образом.

Изменяя порядок интегрирования в (2.2), рассматриваем вначале только интеграл по p. Из (2.13) следует, что этот интеграл имеет стационарную точку $p = 0$ и существенная область интегрирования определяется условием $\sqrt{\omega s}\,p = O(1)$. Далее, подынтегральные функции нужно разложить по степеням p. Учитывая, что

$$\gamma = a - \frac{a}{2\omega s}\theta^2 + O\left(\frac{1}{(\omega s)^2}\right), \quad \text{при} \quad a = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}},$$

получаем

$$\omega s\Phi(p,\chi) = \frac{\omega s a}{c} - \frac{a}{2c}\theta^2 - \omega s\frac{ac}{2}p^2 + \sqrt{\omega s}\,p\,\theta\cos\chi + O\left(\frac{1}{\omega s}\right) \tag{2.14}$$

и поэтому главный член асимптотики интеграла по p определяется следующим выражением

$$c\exp\left\{i\left(\omega s\frac{a}{c} - \frac{a}{2c}\theta^2\right)\right\}\int\limits_0^{\Delta} dp\exp\left\{-i\omega s\frac{ac}{2}p^2 + i\sqrt{\omega s}\,p\theta\cos\chi\right\}, \tag{2.15}$$

в котором параметр $\Delta > 0$ выделяет окрестность стационарной точки. Стандартные для метода стационарной фазы преобразования выражения (2.15) позволяют получить главный член асимптотики интеграла I_2

$$I_2 = \sqrt{\frac{2c}{\omega s a}}\exp\left\{i\left(\frac{\omega s a}{c} - \frac{a}{2c}\theta^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\int\limits_0^{2\pi} e^{\zeta^2}\,F(\zeta)\cos\chi\,d\chi +$$

$$+O\left(\frac{1}{(\omega s)^{3/2}}\right), \tag{2.16}$$

где приняты следующие обозначения

$$F(\zeta)=\int\limits_{-\zeta}^{0} e^{-\xi^2}\,d\xi, \qquad \zeta=e^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\theta\cos\chi}{\sqrt{2ac}}. \tag{2.17}$$

Символ $O(\ )$ в (2.16) включает зависимость от θ. Если теперь $\theta\to 0$, то $\zeta\to 0$ и функцию $\exp(\zeta^2)F(\zeta)$ можно разложить по степеням ζ, после чего интеграл в (2.16) вычисляется, а параметр θ выделяется множителем. Таким образом, асимптотика (2.16) не приводит к появлению сингулярности для вектора смещения (2.3) на оси симметрии $\vartheta=0$. При условии (2.13) формула (2.4) для I_1 также упрощается, входящий в нее радикал нужно разложить по степеням $\sin\vartheta$. Учитывая этот факт и формулу (2.16) в выражении (2.3), получаем главный член асимптотики $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$ в окрестности оси симметрии в виде

$$\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}=\begin{pmatrix}\sin^2\varphi\\ -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\end{pmatrix}\frac{1}{8\pi^2\rho a_{66}s}\exp\left\{i\left[\frac{\omega s}{\sqrt{a_{44}}}+\frac{1}{2}\theta^2\frac{a_{44}-a_{66}}{a_{66}\sqrt{a_{44}}}\right]\right\}+ \tag{2.18}$$

$$\begin{pmatrix}\cos 2\varphi\\ \sin 2\varphi\end{pmatrix}\frac{\exp\left\{i\left(\frac{\omega s}{\sqrt{a_{44}}}-\frac{\theta^2}{2\sqrt{a_{44}}}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{2^{7/2}\,\pi^3\,\rho\,a_{66}^{1/2}\,a_{44}^{1/4}}\,\frac{1}{s\theta}\int\limits_0^{2\pi}\exp(\zeta^2)\,F(\zeta)\cos\chi\,d\chi.$$

Асимптотика $\vec{U}^{\,(\mathrm{SH})}$ в окрестности оси, таким образом, не имеет лучевого характера.

Заключение

Изложенные результаты показывают, что возможность выделить SH-тензор из полного тензора Грина для трансверсальной изотропной среды остается неясной. Мы бы адресовали авторам работ [1, 2] вопрос о том, что они понимают под “SH-волновым тензором”. Полученная ими формула (0.1) является лучевой асимптотикой для SH волн, непригодной в окрестности оси симметрии, и претендовать на роль SH тензора не может.

Рассмотренная нами компонента (1.10) тензора Грина содержит эту лучевую асимптотику вне некоторой окрестности оси, но она содержит также нефизическую волну (2.12), которая в полном тензоре Грина сокращается. В окрестности оси x_3 асимптотика (2.18) не дает полного описания так называемой "kiss singularity", так как для этого необходимо учесть еще вклад от квазипоперечной волны, которая распространяется вдоль оси x_3 с той же скоростью, что и SH волна. Этому будет посвящена отдельная статья.

Автор благодарен И. Пшенчику, привлекшему его внимание к рассматриваемой задаче.

Литература

1. V. Vavryčuk, K. Yomogida, SH-*wave Green tensor for homogeneous transversely isotropic media by higher-order approximations in asymptotic ray theory.* — Wave Motion **23** (1996), 83–93.
2. A. Ben-Menahem, A. G. Sena, *Seismic source theory in stratified anisotropic media.* — J. Geophys. Res. **95** (1990), 15395–15427.
3. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М. (1973).
4. В. М. Бабич, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фонтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды.* В книге: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **5** (1961), 36–46.
4. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука, М. (1977).
5. V. Červeny, I. A. Molotkov, I. Pšenčik, *Ray method in seismology.* Universita Karlova, Praha (1977).
6. R. G. Payton, *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media.* Martinus Nijhoff, The Hague (1983).

Popov M. M. SH-waves in homogeneous transversely isotropic media generated by a concentrated force.

SH-waves in homogeneous transversely isotropic media generated by a concentrated force are investigated. For this aim we construct a part of the Green tensor responsible for the SH-waves and derive its asymptotics on large distances from the force point.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 декабря 1999 г.