Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. М. Попов, И. Н. Щитов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

На одном из семинаров по теории дифракции и распространению волн при Петербургском отделении МИАН М. И. Белишев сформулировал следующую задачу о распространении разрывов в системе двух волновых уравнений

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_2^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \vec{U}(x,t) = A(x)\vec{U}(x,t), \quad x > 0,$$

$$\vec{U}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \vec{U}\Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Здесь скорости $a_1(x)$, $a_2(x)$ и вещественная 2×2 матрица $A(x)$ предполагаются достаточно гладкими функциями x, причем в некоторой точке $x = x_*$ скорости совпадают $a_1(x_*) = a_2(x_*)$, и $a_i(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2$.

Эта задача привлекла наше внимание по следующим обстоятельствам. С одной стороны, она может рассматриваться как модельная при изучении более сложных и актуальных процессов распространения волн в неоднородных анизотропных упругих средах, где скорости волн различных типов могут совпадать. С другой стороны, она может быть исследована математически строго без привлечения каких-либо эвристических предположений и потому достоверно описать процесс прохождения волны через точку совпадения скоростей.

Предложенная и использованная в работе схема исследования задачи (0.1) такова. Мы рассматриваем стационарную задачу, получаемую из исходной (0.1) формальным применением пре-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00107).

образования Фурье по времени $\vec{U}(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega t)\vec{V}(x,\omega)d\omega$,

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dx^2}\vec{V}+\omega^2\widehat{N}^2(x)\vec{V}=B(x)\vec{V}, \quad x>0,\\ \vec{V}(x;\omega)\big|_{x=0}=\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{0.2}$$

Здесь введены дополнительные обозначения

$$\begin{gathered}\widehat{N}(x)=\begin{pmatrix}n_1(x) & 0\\ 0 & n_2(x)\end{pmatrix}, \quad n_i(x)=\frac{1}{a_i(x)},\\ B(x)=-\widehat{N}^2(x)A(x).\end{gathered} \tag{0.3}$$

Затем с помощью системы интегральных уравнений строится и оправдывается асимптотика при $\omega\to\infty$ нужного решения задачи (0.2), см. следующий раздел. Применение преобразования Фурье по ω к этой асимптотике дает, как известно, см. напр. [1], асимптотику по гладкости решения исходной задачи и тем самым позволяет описать распространение разрывов в (0.1). Следует отметить, что задача (0.1) относится к случаю гладких характеристик переменной кратности, рассмотренному ранее в [2] в довольно общей постановке. Используемые нами приемы близки к этой работе [2], но в большей мере опираются на специфику рассматриваемой задачи.

1. Асимптотика $\vec{V}(x,\omega)$ при $\omega\to\infty$

Рассмотрим вначале интервал x, не содержащий точку x_*, совпадения скоростей. Формальное асимптотическое решение уравнения (0.2) строится с помощью лучевого метода, см. [3]. Вектор-функция $\vec{V}(x,\omega)$ ищется в виде

$$\vec{V}(x,\omega)=\exp\{i\omega\tau(x)\}\sum_{k=0}^{\infty}(i\omega)^{-k}\vec{v}_k(x). \tag{1.1}$$

Для нахождения эйконала $\tau(x)$ и "амплитуд" $\vec{v}_k(x)$ получаем рекуррентную систему уравнений, которую мы приводим, сохраняя традиционные для лучевого метода обозначения, см. [3],

$$\begin{aligned}&N\vec{v}_0=0,\\ &N\vec{v}_1+M\vec{v}_0=0,\\ &N\vec{v}_{k+2}+M\vec{v}_{k+1}+L\vec{v}_k=0, \quad k=0,1,2,\dots\end{aligned} \tag{1.2}$$

Матричные операторы L, M, N в данном случае имеют вид

$$N = \begin{pmatrix} -n_1^2 + \dot{\tau}^2 & 0 \\ 0 & -n_2^2 + \dot{\tau}^2 \end{pmatrix}, \quad M = E\left(2\dot{\tau}\frac{d}{dx} + \ddot{\tau}\right), \qquad L = E\frac{d^2}{dx^2} - B, \tag{1.3}$$

где $\dot{\tau} = \frac{d\tau}{dx}$ и E – единичная матрица 2×2.

Система (1.2) решается традиционным путем шаг за шагом. Из условия $\det N = 0$ возникает уравнение эйконала $(\dot{\tau}_j)^2 = n_j^2(x)$, из условия разрешимости неоднородной линейной системы для $\vec{v}_k$, находящейся на собственном значении, возникает уравнение переноса для $\vec{v}_{k-1}$. Опуская вычисления, приведем три члена лучевого ряда (1.1).

Рассмотрим волну, распространяющуюся со скоростью $a_1(x)$ первого канала, и определим эйконал $\tau_1(x)$ равенством $\tau_1(x) = \int_0^x n_1(x)dx$. Через $\vec{\xi}_j$ обозначим два собственных вектора таких, что $N\vec{\xi}_j = 0$, а именно,

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Тогда для этой волны $\vec{V}^{(1)}(x;\omega)$, получаем

$$\vec{V}^{(1)} = e^{i\omega\tau_1(x)}\Big\{\varphi_0^{(1)}(x)\vec{\xi}_1 + \frac{\varphi_1^{(1)}(x)}{i\omega}\vec{\xi}_1 + \frac{1}{(i\omega)^2}(\varphi_2^{(1)}(x)\vec{\xi}_1 + \theta_2^{(1)}(x)\vec{\xi}_2) + \dots\Big\}, \tag{1.5}$$

где функции $\varphi_k^{(1)}(x)$ являются общими решениями уравнений переноса с постоянными интегрирования $\psi_k^{(1)}$

$$\varphi_0^{(1)}(x) = \frac{\psi_0^{(1)}}{\sqrt{n_1(x)}},$$
$$\varphi_1^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n_1(x)}}\left[\psi_1^{(1)} + \frac{1}{2}\int_0^x n_1^{-1/2}(y)f_1(y)dy\right], \tag{1.6}$$
$$\varphi_2^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n_1(x)}}\left[\psi_2^{(1)} + \frac{1}{2}\int_0^x n_1^{-1/2}(y)f_2(y)dy\right],$$

$$f_j(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\varphi_{j-1} + \varphi_{j-1}(B\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1), \quad j = 1, 2.$$

Так называемый в лучевом методе деполяризационный член (или примесная компонента) $\theta_2^{(1)}(x)$ появляется впервые в (1.5) в членах порядка $O(\omega^{-2})$

$$\theta_2^{(1)}(x) = \varphi_0^{(1)}(x)(n_1^2(x) - n_2^2(x))^{-1}(B\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) \tag{1.7}$$

и именно он оказывается сингулярным в точках совпадения скоростей, где $n_1(x_*) = n_2(x_*)$.

Обратимся теперь к краевому условию при $x = 0$ в (0.2). Одной волной $\vec{V}^{(1)}$ (1.5) удовлетворить этому условию невозможно, и нужно учесть еще другую волну $\vec{V}^{(2)}$, распространяющуюся со скоростью $a_2(x)$ второго канала. Строится она по рекуррентной системе (1.2) аналогично $\vec{V}^{(1)}$. Определим ее эйконал $\tau_2(x)$ формулой $\tau_2(x) = \int_0^x n_2(x)dx$. Тогда, чтобы удовлетворить краевому условию ее нужно взять в следующем виде

$$\vec{V}^{(2)}(x;\omega) = e^{i\omega\tau_2(x)}\left\{\frac{\varphi_0^{(2)}(x)}{(i\omega)^2}\vec{\xi}_2 + \frac{\varphi_1^{(2)}(x)}{(i\omega)^3}\vec{\xi}_2 + \dots\right. \tag{1.8}$$

так что асимптотический ряд начинается с члена того порядка, в котором впервые в (1.5) появляется деполяризационный член. Теперь можно видеть, что сумма $\vec{V}^{(1)}(x;\omega) + \vec{V}^{(2)}(x,\omega)$ будет удовлетворять краевому условию в (0.2) в членах любого порядка за счет подбора постоянных интегрирования в уравнениях переноса. Так, принимая во внимание (1.6) и аналогичные формулы для $\varphi_k^{(2)}$, $k = 0, 1, \dots$, получаем

$$\begin{gathered}\psi_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{n_1(0)}, \quad \psi_1^{(1)} = 0, \quad \psi_2^{(1)} = 0 \\ \text{и} \quad \psi_0^{(2)} = -\sqrt{n_2(0)}\,\theta_2^{(1)}(0).\end{gathered} \tag{1.9}$$

Следует отметить, что нужное нам решение задачи (0.2) должно содержать волны, распространяющиеся от точки $x = 0$ в положительном направлении оси x. Поэтому при удовлетворении краевому условию в (0.2) мы не используем лучевые ряды с комплексно сорпяженными экспонентами.

Рассмотрим теперь интервал, содержащий точку x_* совпадения скоростей, где $n_1(x_*) = n_2(x_*)$. Как уже отмечалось, лучевые разложения (1.5), (1.8) не пригодны в окрестности x_* из-за возникновения сингулярностей, см. формулу (1.7). Для построения асимптотики в этом случае и ее оправдания заменим систему дифференциальных уравнений в (0.2) эквивалентной ей системой интегральных уравнений обращением главной части при $\omega \to \infty$.

Обозначим через $r_i(x)$ производную Шварца от $n_i(x)$

$$r_i(x) = \frac{1}{2}\,\frac{n_i''}{n_i} - \frac{3}{4}\,\frac{(n_i')^2}{(n_i)^2}, \quad i = 1, 2,$$

и систему (0.2) представим в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\vec{V} + \begin{pmatrix} \omega^2 n_1^2 + r_1 & 0 \\ 0 & \omega^2 n_2^2 + r_2 \end{pmatrix} \vec{V} = \left[B + \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \right] \vec{V} \equiv \widetilde{B} \vec{V}. \quad (1.10)$$

Далее очевидно, что фундаментальную систему решений уравнения вида $w'' + (\omega^2 n^2 + r) w = 0$ образуют функции

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{ i\omega \int n(x)dx \right\} \text{ и } w_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{ -i\omega \int n(x)dx \right\} = \overline{w}_1.$$

Учитывая этот факт и используя метод Лагранжа вариации произвольных постоянных [4], получаем систему интегральных уравнений, эквивалентную (1.10),

$$\vec{V}(x) = \vec{F}(x) + \frac{1}{2i\omega} \int_{x_0}^{x} K(x, \xi; \omega) \widetilde{B}(\xi) \vec{V}(\xi) d\xi, \quad (1.11)$$

где приняты следующие обозначения. Ядро $K(x, \xi; \omega)$ – диагональная матрица 2×2 с элементами

$$K_{jj(x,\xi;\omega)} = y_j(x)\overline{y_j}(\xi) - \overline{y_j}(x) y_j(\xi), \quad j = 1, 2,$$
$$y_j(x) = \frac{1}{\sqrt{n_j(x)}} \exp\{ i\omega S_j(x) \}, \quad S_j(x) = \int_{x_0}^{x} n_j(\xi) d\xi. \quad (1.12)$$

Свободный член $\vec{F}(x)$ образован линейной комбинацией фундаментальной системы решений y_j, $\overline{y_j}$

$$\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} c_1 y_1(x) + c_2 \overline{y_1}(x) \\ c_3 y_2(x) + c_4 \overline{y_2}(x) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

с произвольными постоянными коэффициентами c_k.

Далее очевидно, см. например, [5], что ввиду гладкости ядра метод последовательных приближений для уравнений (1.11) сходится к решению системы уравнений (1.10) при любых конечных x_0 и x независимо от того, содержит ли этот промежуток точку x_* или нет. Из-за наличия множителя ω^{-1} в ядре итерированные ядра квалифицированно убывают при больших ω, и поэтому итерации дают возможность построить асимптотику при $\omega \to \infty$ рассматриваемого решения. Для того, чтобы выбрать интересующее нас решение нужно должным образом выбрать свободный член (1.13).

Таким образом, система интегральных уравнений (1.11) позволяет построить асимптотику в окрестности $x = x_*$, где лучевой анзатц (1.1) непригоден, и оправдать ее. Для построения асимптотики нужного нам решения возьмем точку x_0 левее x_* (можно вообще взять $x_0 = 0$) и выберем постоянные c_k в $\vec{F}(x)$ из условий

$$\vec{F}(x_0) = \vec{V}^{(1)}(x_0) + \vec{V}^{(2)}(x_0); \quad \frac{d}{dx}\vec{F}\big|_{x_0} = \frac{d}{dx}(\vec{V}^{(1)} + \vec{V}^{(2)})\big|_{x_0}, \quad (1.14)$$

которыми они определяются однозначно. Уравнения (1.11) позволяют продолжить это решение на любые конечные x. Нас будет интересовать асимптотика этого решения за точкой x_* на расстояниях $O(1)$ при $\omega \to \infty$, где лучевая асимптотика (1.1) снова будет иметь место. Поведение решения в малой окрестности точки x_*, где асимптотика имеет более сложный характер, мы рассматривать не будем. Необходимые для получения асимптотики вычисления оказываются довольно громоздкими, мы их опустим и ограничимся лишь следующими комментариями к ним.

Итерации к уравнениям (1.11) содержат, помимо множителя $1/\omega$ в соответствующей степени, интегралы от быстро осциллирующих функций (1.12), у которых должна быть вычислена асимптотика при $\omega \to \infty$. Если отрезок x_0, x не содержит точки x_*, то вклад в асимптотику дают только концы интегрирования. При этом возникает асимптотический ряд по целым отрицательным степеням ω, т.е. ряд лучевого типа. Ввиду единственности асимптотики в фиксированной шкале функций ω^{-k}, можно утверждать, что мы получаем именно лучевую асимптотику (1.1). Оказывается, что ее эффективнее строить с помощью рекуррентной системы (1.2), чем из итераций.

Если отрезок x_0, x содержит x_* внутри, то в итерациях возникают интегралы, имеющие стационарную точку $x = x_*$. Вклад в асимптотику теперь дают как концы интегрирования, так и стационарная точка $x = x_*$, и их вклады независимы, если x_* удалена от концов x_0 и x на независящее от большого параметра ω расстояние. Отсюда следует, что за точкой совпадения скоростей мы получаем прошедшую через эту точку исходную волну $\vec{V}^{(1)}(x;\omega) + \vec{V}^{(2)}(x;\omega)$, как вклад в асимптотику от границы области интегрирования, и некоторую новую волну $\vec{W}(x,\omega)$, описываемую вкладом от стационарной точки.

Впервые интеграл, имеющий стационарную точку, появляется в первой итерации, или в Борновском приближении, во втором канале в слагаемом $\frac{1}{2i\omega} y_2(x) \int_{x_0}^{x} K_{22}(x,\xi)\widetilde{B}_{21}(\xi) C_1 y_1(\xi) d\xi$ и имеет вид

$$\frac{c_1}{2i\omega} \frac{\exp[i\omega S_2(x)]}{\sqrt{n_2(x)}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\widetilde{B}_{21}(\xi)}{\sqrt{n_1(\xi) n_2(\xi)}} \exp\{i\omega[S_1(\xi) - S_2(\xi)]\} d\xi. \qquad (1.15)$$

Предположим, что скорость в первом канале до точки x_* больше, чем во втором, а при $x > x_*$ наоборот $a_2(x) > a_1(x)$. В точке x_* кривые $a_1(x)$ и $a_2(x)$ пересекаются, так что $n_1'(x_*) - n_2'(x_*) > 0$. Тогда x_* есть невырожденная стационарная точка интеграла (1.15), расположенная внутри области интегрирования. Вклад ее в асимптотику (1.15) вычисляется обычным методом стационарной фазы [6] и он равен

$$\frac{c_1\sqrt{\pi}}{i\sqrt{2}\,\omega^{3/2}} \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{n_1'(x_*) - n_2'(x_*)}} \frac{\widetilde{B}_{21}(X_*)}{\sqrt{n_1(x_*) n_2(x_*)}} \times \\ \times \frac{\exp\{i\omega[S_2(x) - S_2(x_*) + S_1(x_*)]\}}{\sqrt{n_2(x)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right). \qquad (1.16)$$

В данном случае, таким образом, возникают в асимптотическом разложении полуцелые степени частоты ω. Если кривые скорости в точке x_* имеют касание первого порядка, т.е. $n_1'(x_*) = n_2'(x_*)$, но $n_1''(x_*) \neq n_2''(x_*)$, то в асимптотическом разложении интеграла (1.15) появятся степени $-n/3$ частоты ω.

Если же кривые скоростей в точке x_* имеют касание бесконечного порядка, то традиционные приемы метода стационарной фазы, см. [6], не проходят и интеграл (1.15) требует особых исследований.

Далее, подставляя в выражение (1.16) значение постоянной c_1, найденное из уравнений (1.14), получаем следующую формулу для волны $\vec{W}(x;\omega)$, вновь возникшей за точкой x_* совпадения скоростей,

$$\vec{W}(x;\omega) = \exp\left\{i\omega\left[\int\limits_{x_*}^{x} n_2(\xi)d\xi + \tau_1(x_*)\right]\right\} \times \\ \times \left[\frac{D}{\omega^{3/2}\sqrt{n_2(x)}}\,\vec{\xi}_2 + \vec{O}\left(\frac{1}{\omega^{5/2}}\right)\right], \quad (1.17)$$

в которой коэффициент возбуждения D имеет вид

$$D = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)(n_1'(x_*) - n_2'(x_*))^{-1/2} n_2^{3/2}(x_*) A_{21}(x_*)\varphi_0^{(1)}(x_*). \quad (1.18)$$

Вычисление последующих членов асимптотического разложения (1.17) в предлагаемой схеме требует, к сожалению, довольно громоздких расчетов. Кроме того, в этой схеме трудно исследовать вопрос о возможности появления отраженной от точки x_* волны. Дело в том, что итерации интегральных уравнений (1.11) содержат экспоненты $\exp(-i\omega S_j(x))$, $j = 1, 2$, которые ассоциируются с волнами, бегущими к $x = 0$. При построении асимптотики итераций интегрированием по частям такие экспоненты не могут сохраниться, поскольку вклад от границы области интегрирования дает лучевое разложение. Однако, априори не ясно, не возникнут ли они в тех интегралах, которые имеют стационарную точку. Присутствие же таких экспонент при $x > x_*$ означало бы, что при $x < x_*$ помимо падающей волны следует включить в рассмотрение и отраженную волну с тем, чтобы при $x > x_*$ она компенсировала волны, бегущие к $x = 0$. Прямые подсчеты показывают, что в старшем порядке по ω коэффициенты при таких экспонентах обращаются в нуль, а значит в этих порядках нет отражения.

Ниже мы кратко опишем иную схему построения асимптотики задачи (0.2), которая позволяет установить отсутствие отражения.

1. Используя известный прием, см. [7], расщепим систему (0.2) на две системы из двух уравнений первого порядка. С этой целью введем неизвестную матрицу $Z(x)$, полагая $\frac{d}{dx}\vec{V} = Z\vec{V}$. Так как $\frac{d^2}{dx^2}\vec{V} = \frac{dZ}{dx}\vec{V} + Z^2\vec{V}$, то из (0.2) вытекает уравнение Риккати для

$Z(x)$

$$\frac{d}{dx}Z + Z^2 + \omega^2 \widehat{N}^2 = B. \tag{1.19}$$

При больших ω можно построить асимптотическое разложение некоторого частного решения Z уравнения (1.19), считая, что

$$Z = i\omega Z_{-1} + Z_0 + \frac{1}{i\omega}\, Z_1 + \frac{1}{(i\omega)^2}\, Z_2 + \dots . \tag{1.20}$$

Для матриц Z_k возникает рекуррентная система

$$Z_{-1}^2 = \widehat{N}^2; \quad Z_{-1}Z_k + Z_k Z_{-1} = L_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.21}$$

в которой $L_0 = -\frac{d}{dx}Z_{-1}$, $L_1 = B - \frac{d}{dx}Z_0 - Z_0^2$, и т.д.

Из первого уравнения получаем два решения $Z_{-1} = \pm\widehat{N}$, что отвечает двум различным системам, на которые расщепляется исходная система (0.2). Выбирем $Z_{-1} = \widehat{N}$, тогда из остальных уравнений (1.21) последовательно находятся Z_k, $k \geqslant 0$. Сводя (1.19) к интегральному уравнению и используя метод последовательных приближений [8], можно показать, что уравнение (1.19) имеет точное решение $Z(x)$, для которого (1.20) служит асимптотическим разложением.

2. После того, как матрица $Z(x;\omega)$

$$Z(x;\omega) = \begin{pmatrix} z_{11} & \frac{1}{i\omega}z_{12} \\ \frac{1}{i\omega}z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

построена, вектор-функция $\vec{V}(x,\omega)$ находится из системы двух уравнений первого порядка $\frac{d}{dx}\vec{V} = Z\vec{V}$. Представим координаты вектора $\vec{V} = (v_1, v_2)^T$, где T – знак транспонирования, в следующем виде

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} z_{11}\,dx\right)\varphi_1(x), \\ v_2(x) &= \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} z_{22}\,dx\right)\varphi_2(x), \end{aligned} \tag{1.22}$$

тогда для φ_1, φ_2 получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} &= \frac{1}{i\omega}\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}(z_{22}-z_{11})dx\right\} z_{12}\varphi_2; \\ \frac{d\varphi_2}{dx} &= \frac{1}{i\omega}\exp\left\{-\int\limits_{x_0}^{x}(z_{22}-z_{11})dx\right\} z_{21}\varphi_1. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Учитывая равенства (1.20), (1.21), находим, что

$$\exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x}(z_{22}-z_{11})dx\right\} = \exp\left\{i\omega\int\limits_{x_0}^{x}(n_2-n_1)dx+\ldots\right\} =$$

$$= \exp\{i\omega S_0(x)\}\left(p_{11}(x)+\frac{1}{i\omega}p_{12}(x)+\ldots\right),$$

где обозначено $S_0(x)=\int_{x_0}^{x}(n_2(x)-n_1(x))dx$. Поэтому в уравнениях (1.23) можно выделить быстро осциллирующие экспоненты и представить эту систему в виде

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{1}{i\omega}e^{i\omega S_0(x)}m_1(x;\omega)\varphi_2; \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega S_0(x)}m_2(x;\omega)\varphi_1. \tag{1.24}$$

Начальные данные к системе (1.24) находим из того условия, чтобы при $x=x_0$ левее точки x_* искомое решение $\vec{V}$ совпадало с построенным $\vec{V}^{(1)}+\vec{V}^{(2)}$, см. формулы (1.5) и (1.8). Обозначим эти начальные данные $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi_2(x_0)$ и сведем (1.24) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_1(x_0)+\frac{1}{i\omega}\int\limits_{x_0}^{x}e^{i\omega S_0(\xi)}m_1(\xi;\omega)\varphi_2(\xi)d\xi \\ \varphi_2(x) &= \varphi_2(x_0)+\frac{1}{i\omega}\int\limits_{x_0}^{x}e^{-i\omega S_0(\xi)}m_2(\xi;\omega)\varphi_1(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Функция $S_0(x)$ имеет стационарную точку $x=x_*$. Система (1.25) решается методом итераций, асимптотика находится методом стацфазы и интегрированием по частям. Так как в ядра уравнений (1.25) S_1 и S_2 входят в комбинации $S_0=S_2-S_1$, эта асимптотика не содержит отраженных волн.

Заключение

Вычисляя Фурье-преобразование (в смысле обобщенных функций) от построенной высокочастотной асимптотики решения $\vec{V}(x;\omega)$ задачи (0.2), получаем параметрикс исходной нестационарной задачи (0.1), позволяющий описать распространение разрывов.

До точки x_* совпадение скоростей, т.е. на временах $0 < t < t_*$, где $t_* = \int_0^{x_*} a_1^{-1}(x)dx$ (напомним, что $a_1 > a_2$ при $0 < x < x_*$ по предположению), параметрикс имеет вид стандартного пространственно-временного лучевого разложения

$$\vec{U}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k^{(1)}(x) F_k(t-\tau_1(x)) + \sum_{k=2}^{\infty} \vec{u}_k^{(2)}(x) F_k(t-\tau_2(x)), \quad (2.1)$$

где $F_k(y)$ следующие обобщенные функции

$$F_0(y) = \delta(y), \quad F_1(y) = H(y), \quad F_2(y) = y_+, \dots, \quad (2.2)$$

а векор-функции $\vec{u}_k^{(1)}(x)$ и $\vec{u}_k^{(2)}(x)$ определяются разложениями (1.5), (1.8) и (1.9).

В некоторой малой окрестности точки x_*, на временах $t_* - \delta < t < t_* + \delta$ с некоторым $\delta > 0$, разложение (2.1) оказывается непригодным и разрывы волнового поля не могут быть описаны шкалой обобщенных функций (2.2). В этой окрестности стационарная точка x_* близка к границе области интегрирования, асимптотика стационарной задачи имеет более сложный вид. В нашей схеме она описывается итерациями, но может быть выражена и в терминах специальных функций. За точкой x_*, т.е. при $t > t_* + \delta$, когда вклад в асимптотику $\vec{V}(x;\omega)$ от стационарной точки x_* и границы области интегрирования в итерациях вычисляется независимо, разложение (2.1) снова имеет место, но только для прошедшего волнового фронта. Интересно отметить, что “амплитуды”, или вектор-функции $\vec{u}_k^{(1)}$, $\vec{u}_k^{(2)}$ сохраняют те же постоянные интегрирования в уравнениях переноса, что и в падающем фронте, см. равенства (1.9). Другими словами, падающий волновой фронт проходит точку x_*, словно не замечая ее.

Однако, кроме прошедшей волны за точкой x_* возникает новая волна $\vec{U}_*(x,t) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \exp(-i\omega t)\vec{W}(x;\omega)d\omega$, где асимптотика $\vec{W}(x;\omega)$ описывается разложением (1.17) по дробным степеням частоты ω. Разрывы на фронте этой волны описываются шкалой обобщенных функций y_+^λ с дробными показателями λ. Фронт этой волны распространяется со скоростью $a_2(x)$ второго канала. Поскольку по сделанному предположению $a_2(x) > a_1(x)$ при $x > x_*$, то ее фронт опережает фронт прошедшей волны и несет более слабый разрыв, чем $\vec{U}(x,t)$. А именно, в рассмотренном случае главный член асимптотики по гладкости описывается функцией $(t-\tau_*)_+^{1/2}$, где $\tau_*(x) = \int_{x_*}^x n_2(\xi)d\xi + \tau_1(x_*)$, и он есть только во втором канале, см. формулы (1.17), (1.18).

Эти физические следствия анонсированы в заметке [9].

Литература

1. Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики.* Изд-вл МГУ, 1982.
2. В. В. Кучеренко, *Асимптотическое поведение решений системы $A\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности.* Изв. АН СССР, сер. матем., **58**, No. 2 (1974), 163–213.
3. В. М. Бабич, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды.* Вопросы динам. теории распр. сейсмических волн, **5** (1961), 36–46.
4. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики, том II.* М., Наука (1967).
5. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики, том IV.* М., Наука (1967).
6. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* М., Наука (1977).
7. В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Мир (1968).
8. М. В. Федорюк, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука (1983).
9. M. M. Popov, I. N. Schitov, *What may happen if the velocities of qS-waves in an anisotropic inhomogeneous medium coincide at a point?.* Wave Inversion Technology, Report WITREPORT 98, January 13, 1999, 287–291.

Popov M. M., Schitov I. N. Propagation of the discontinueties in a system of two interactive wave equations.

Propagation of the discontinueties in a system of two wave equations interacting via a potential is described in the case when the velocities coincide at a point. It is shown that a new wave appears behind this point and discontinueties on its wave front contain noninteger derivatives.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 27 декабря 1999 г.