Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

А. В. Блаженов

О САМОСОКРАЩЕНИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В данной работе под абелевыми группами везде подразумеваются абелевы группы конечного ранга без кручения, $\mathbb{Z}$ означает кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ – поля рациональных и вещественных чисел, а $\Gamma_p = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ – локализацию кольца Γ по простому целому p. Через R^* обозначается группа единиц кольца R.

Определение 1. *Абелева группа A имеет самосокращение, если $A \oplus A \cong A \oplus B$ влечет $A \cong B$.*

Развивая идеи Якобиньского [8] и Арнольда [3], автор обнаружил крайне тесную связь сокращения абелевых групп с классическими результатами Эйхлера [5, 6] и получил следующий критерий самосокращения абелевых групп [1, теорема 15], [2], отвечающий на проблему Арнольда [3, проблема 2].

Определение 2. *Алгебра с делением D индекса 2 – вполне определенная алгебра кватернионов, если любое архимедово нормирование ее центра F является вещественным и $\mathbb{R} \otimes_F D$ – алгебра гамильтоновых кватернионов.*

Пусть L – центральная простая конечномерная алгебра над полем алгебраических чисел F, но не вполне определенная алгебра кватернионов, ν – ее редуцированная норма, Γ – максимальный S-порядок в L, где S – центр Γ. Под нормой $\nu(I)$ правого идеала I кольца Γ понимаем идеал кольца S, порожденный множеством $\{\nu(x) \mid x \in I\}$.

Теорема A ([5, теорема 1]). *Правый идеал I кольца Γ является главным тогда и только тогда, когда $\nu(I)$ – главный идеал, порожденный элементом, положительным по каждому бесконечному простому поля F, разветвленному в алгебре L.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 96-15-9620.

Теорема B ([6, теорема 5]). *Пусть μ – идеал кольца S. Если регулярный элемент $x \in \Gamma$ и $\nu(x) \equiv \varepsilon \pmod{\mu}$, где ε – единица кольца S, положительная по каждому бесконечному простому поля F, разветвленному в алгебре L, то существует единица u кольца Γ, такая что $x \equiv u \pmod{\mu\Gamma}$.*

Пусть теперь L – полупростая конечномерная рациональная алгебра, Γ – подкольцо L, такое что $\Gamma = \Gamma_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \Gamma_k$, где Γ_i – максимальные порядки в простых компонентах алгебры L, $1 \leqslant i \leqslant k$. Такое кольцо Γ мы также называем максимальным порядком в L и говорим, что *теоремы A и B Эйхлера имеют место для* Γ, если они выполняются для всех Γ_i.

Лучом относительно разветвленных бесконечных вещественных простых $\mathrm{St}_F L$ алгебры L с центром F называется множество элементов $0 \neq a \in F$, любая проекция которых на простую компоненту L_i с центром F_i алгебры L положительна по каждому бесконечному простому поля F_i, разветвленному в алгебре L_i. Заметим, что согласно теореме Эйхлера [9, глава VI, теорема 6.9] $\mathrm{St}_F L$ совпадает с образом редуцированной нормы всех регулярных элементов алгебры L.

Пусть A – абелева группа, $\mathrm{E}(A)$ – кольцо эндоморфизмов A, $\mathrm{N}(\mathrm{E}(A))$ – его нильрадикал. Тогда $R = \mathrm{E}(A)/\mathrm{N}(\mathrm{E}(A))$ – порядок в полупростой алгебре $L = \mathbb{Q}R$. Пусть F – центр алгебры L, ν – редуцированная норма алгебры L над F, Γ – максимальный порядок в алгебре L с $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$, $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, S – центр порядка Γ. Такой максимальный порядок Γ существует согласно [4, следствие 10.14].

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *Группа A имеет самосокращение.*

(b) *$R \oplus R \cong R \oplus R' \Longrightarrow R \cong R'$, где R' – правый дробный идеал кольца R.*

(c) *Выполнены условия:*

(i) *Для Γ имеет место теорема* A.

(ii) *Если $\alpha \in \Gamma$ и $\nu(\alpha) \equiv \varepsilon \pmod{nS}$, где ε – единица кольца S с $\varepsilon \in \mathrm{St}_F L$, то $\alpha \equiv \gamma\sigma \pmod{n\Gamma}$ для некоторых $\gamma \in \Gamma^*$, $\sigma \in R$*[1].

Заметим, что условие (ii) является ослабленным условием теоремы B. Единственный до сих пор известный пример абелевой

[1] Легко заметить, что по условию теоремы, элементы $\alpha \in \Gamma$ и $\sigma \in R$ взаимно просты с n.

группы без самосокращения строился на основе примера Суона [10]. При этом получалась группа ранга 16, которая не имела самосокращения из-за невыполнения условия (i). Автором в [1] был поставлен вопрос о существовании модуля, не имеющего самосокращения по причине невыполнения теоремы B. В настоящей работе строится крайне простой пример такого модуля и соответствующей абелевой группы без самосокращения.

Пусть L – алгебра гамильтоновых кватернионов над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с базисом $1,\ i,\ j,\ k$, где $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Ясно, что L – вполне определенная алгебра кватернионов. В качестве основы примера возьмем следующий порядок в L. Пусть Γ – $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный элементами $1,\ i,\ j,\ (1+i+j+k)/2$. Хорошо известно, что Γ – максимальный порядок [7, лекция 4]. Посмотрим, выполняются ли теоремы Эйхлера для Γ.

Лемма 1. *Теорема* A *имеет место для* Γ.

Доказательство. Действительно, каждый правый идеал кольца Γ – главный [7, лекция 6] и, таким образом, данное утверждение тривиально.

Лемма 2. *Теорема* B *не имеет места для* Γ.

Доказательство. Возьмем элемент $\alpha = 1 + 2i + 2j \in \Gamma$. Имеем $\nu(\alpha) = 9 \equiv 1 \pmod 4$, но $\alpha \not\equiv u \pmod{4\Gamma}$, $u \in \Gamma^*$. Действительно, пусть $\beta \equiv \alpha \pmod{4\Gamma}$. Тогда $\beta = 1+2i+2j+4a+4bi+4cj+4d(1+i+j+k)/2$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, и $\nu(\beta) = (1+4a+2d)^2 + (2+4b+2d)^2 + (2+4c+2d)^2 + 4d^2$. Отсюда видно, что даже если $d = 0$, то $\nu(\beta) \geqslant 5$, и потому $\beta \notin \Gamma^*$.

Теорема 2. *Существует абелева группа без кручения ранга* 4, *не имеющая самосокращения.*

Доказательство. Пусть R – $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный элементами $1,\ 4i,\ 4j,\ 4k$. Простая проверка показывает, что R замкнут относительно умножения и, следовательно, является $\mathbb{Z}$-порядком в алгебре L. Ясно, что $8\Gamma \subset R \subset \Gamma$. Ввиду леммы 1, для кольца R выполнено условие (i) из теоремы 1. Покажем, что для кольца R не выполняется условие (ii).

Положим $\alpha = 1 + 2i + 2j$. Как видно из доказательства леммы 2, $\alpha \not\equiv \gamma \pmod{4\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma^*$. Далее, имеем $\nu(\alpha) = 9 \equiv 1 \pmod 8$, но $\alpha \not\equiv \gamma\sigma \pmod{8\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma^*$, $\sigma \in R$. Более того, $\alpha \not\equiv \gamma\sigma \pmod{4\Gamma}$. Действительно, $\sigma \equiv a \pmod{4\Gamma}$, где $a \in \mathbb{Z}$, по определению кольца R. Поскольку $(\sigma, 2) = 1$, то $\sigma \equiv \pm 1 \pmod{4\Gamma}$. Отсюда, если $\alpha \equiv \gamma\sigma \pmod{4\Gamma}$, то $\alpha \equiv \pm\gamma = \gamma' \pmod{4\Gamma}$, $\gamma' \in \Gamma^*$, что, как показано выше, невозможно.

Таким образом, в силу утверждения (b) теоремы 1 для некоторого правого идеала R' кольца R имеем $R\oplus R \cong R\oplus R'$, но $R \ncong R'$. Согласно теореме Цассенхауза [11], существует абелева группа A без кручения ранга 4 с $\mathrm{E}(A) = R$. По теореме 1, группа A не имеет самосокращения. Ясно также, что группы меньшего ранга без самосокращения существовать не может.

В заключение укажем идеал R' в явном виде. Определим $R' = 1/2R \cap \alpha R_2$, где $\alpha = 1 + 2i + 2j$. Тогда $R'_p = R_p = \Gamma_p$ при $(p, 2) = 1$ и $R'_2 = \alpha R_2$. Детальное объяснение, почему в этом случае $R \oplus R \cong R \oplus R'$, но $R \ncong R'$, можно найти в [1, 2].

Литература

1. А. В. Блаженов, *Роды и сокращение модулей конечного ранга без кручения.* Алгебра и анализ, **7** (1995), вып. 6, 33–78.
2. А. В. Блаженов, *Исправления к статье "Роды и сокращение модулей конечного ранга без кручения".* Алгебра и анализ, **11** (1999), вып. 4, 222–224.
3. D. M. Arnold, *Genera and direct sum decompositions of torsion free modules.* Abelian Group Theory, Lecture Notes in Math., **616**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, pp. 197–218.
4. D. M. Arnold, *Finite rank torsion free abelian groups and rings.* Lecture Notes in Math., **931**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982.
5. M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexen Zahlen.* Math. Z., **43** (1938), 481–494.
6. M. Eichler, *Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen.* J. reine angew. Math., **179** (1938), 227–251.
7. A. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen.* Berlin, 1919.
8. H. Jacobinski, *Genera and decompositions of lattices over orders.* Acta Math., **121** (1968), 1–29.
9. K. Roggenkamp, *Lattices over orders. II.* Lecture Notes in Math., **142**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.
10. R. G. Swan, *Projective modules over group rings and maximal orders.* Ann. of Math. (2), **76** (1962), 55–61.
11. H. Zassenhaus, *Orders as endomorphism rings of modules of the same rank.* J. London Math. Soc., **42** (1967), 180–182.

Blazhenov A. V. On the self-cancellation of torsion-free abelian groups of finite rank.

An exclusively simple example of an Abelian group free of self-cancellation is constructed.

С.-Петербургский государственный горный институт

Поступило 17 июня 1999 г.