Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

М. В. Бондарко

НАЛИЧИЕ ИДЕМПОТЕНТОВ В КОЛЬЦЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ ИДЕАЛА p–РАСШИРЕНИЯ ПОЛНОГО ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННОГО ПОЛЯ С ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ ХАРАКТЕРИСТИКИ p КАК МОДУЛЯ ГАЛУА

В этой работе исследуется вопрос наличия нетривиальных идемпотентов в кольце эндоморфизмов идеала p-расширения полного дискретно нормированного поля с полем вычетов конечной характеристики $p > 2$ как модуля Галуа. Доказано отсутствие центральных идемпотентов для неабелева вполне дико разветвленного расширения.

Введение

Эта работа является продолжением работы [1]. Там исследуется вопрос разложимости идеалов абелева p-расширения полного дискретно нормированного поля с полем вычетов конечной характеристики $p > 2$, для которого расширение полей вычетов сепарабельно. Оказывается, идеалы могут быть разложимыми только в расширениях, циклических над своим подполем инерции. Нетрудно видеть, что разложимость идеала как модуля Галуа равносильна наличию нетривиальных идемпотентов в кольце эндоморфизмов идеала как модуля Галуа. В этой работе рассматриваются вполне разветвленные неабелевы расширения. В первом параграфе для них доказывается отсутствие нетривиальных центральных идемпотентов, т.е. идемпотентов из кольца эндоморфизмов большего поля как модуля Галуа, которые являются также элементами стабилизатора идеала в групповой алгебре Галуа, а значит, будут лежать в центре групповой алгебры. Этот результат был доказан также в работе [2] для некоторого частного случая. К сожалению, вопрос о разложимости идеалов в

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований гранта No. 97-01-0058-а.

общем случае остается открытым. Однако при некоторых ограничениях на скачки ветвления неразложимость удается доказать во втором параграфе.

Обозначения

Во всей статье будут приняты следующие обозначения:

p – фиксированное нечетное простое число;

v_k – нормирование на данном полном дискретно нормированном поле k с полем вычетов характеристики p;

K/k, $[K:k]=n$ – вполне разветвленное p-расширение с группой Галуа G;

$\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k;

$v=v_K$, $v_0=v_k$;

e – абсолютный индекс ветвления поля K;

$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал кольца $\mathfrak{O}=\mathfrak{O}_K$.

§1 Центральные идемпотенты

1.1. Зафиксируем дробный идеал I поля K. Мы будем рассматривать $\mathfrak{o}$-алгебру

$$\mathfrak{B}_{K/k}(I,I)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}[G]}(I,I).$$

Докажем отсутствие в ней нетривиальных центральных идемпотентов, т.е. идемпотентов, лежащих в $Z_{K/k}(I,I)=\mathfrak{B}_{K/k}(I,I)\cap k[G]$.

В [1] доказано отсутствие идемпотентов для абелева нециклического расширения, будем использовать это утверждение в качестве базы. Переход разбивается на два случая. Основную трудность представляет случай расширения с циклическим центром. Поэтому докажем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Если K/k – неабелево с циклическим центром, $G=\mathrm{Gal}(K/k)$, P – нетривиальный центральный идемпотент в $\mathfrak{B}_{K/k}(I,I)$, то существуют такие промежуточные расширения $k\subset k_1\subset K_1\subset K$, $[K:K_1]=[k_1:k]=p$, K_1/k – нормально, что P или имеет нетривиальное сужение на K_1, или лежит в $k[H]$, $H=\mathrm{Gal}(K/k_1)$.*

Доказательство. Пусть ограничение P на некоторое K_1, $[K:K_1]=p$, K_1/k нормально, равно 0. Тогда получаем, что нам достаточно доказать, что размерность пересечения центра $k[G]$ с

$\operatorname{Ker} f : k[H] \to k[B]$ равна размерности пересечения $\operatorname{Ker} f : k[G] \to k[A]$ с центром $k[G]$, $B = \operatorname{Gal}(K_1/k_1)$, $A = \operatorname{Gal}(K_1/k)$, f – отображение факторизации.

Теперь выберем K_1 и k_1. Обозначим центр G через Z, его подгруппу порядка p через $Y = \langle y \rangle$. Рассмотрим $g \in G$ – представитель нетривиального элемента центра группы G/Z. Мы получаем, что элементы, сопряженные с g, отличаются от g на элементы из Z. Значит, можно найти a – степень g такую, что сопряженные к a это в точности элементы $ax : \ x \in Y$. Теперь возьмем $k_1 = K^H$ и $K_1 = K^Y$, где H – централизатор a в G. Так как $\operatorname{card}(Y) = [F : Z] = p$, где $F = \langle a, Z \rangle$, то $[K : K_1] = [k_1 : k] = p$.

Посчитаем размерности.

Легко видеть, что $\dim Z(k[G])$ равно количеству классов сопряженности элементов G, $\dim Z(k[H], G)$ равно количеству классов элементов H, сопряженных элементами G, где $Z(k[G])$ – центр кольца $k[G]$ и $Z(k[H], G)$ – централизатор G в $k[H]$. Обозначим такие величины через $c(G, G)$ и $c(G, H)$ соответственно.

Нетрудно видеть, что $c(G, G) = \frac{d(G,G)}{n}$, $c(G, H) = \frac{d(G,H)}{n}$, где $d(C, D)$ – количество пар $c \in C$, $d \in D$, c и d коммутируют. Действительно, если количество элементов в классе сопряженности равно t, то с каждым из этих элементов коммутирует ровно n/t элементов G, и значит, в этих формулах мы посчитали каждый класс ровно один раз. Таким образом, достаточно доказать, что

$$d(G, G) - d(G, H) = d(G \setminus H, H) = p(d(A, A) - d(A, B)) = pd(A \setminus B, A).$$

Так как мы знаем, что эти величины пропорциональны размерностям соответствующих централизаторов, то выполнено неравенство

$$d(G \setminus H, H) \geqslant pd(A \setminus B, A).$$

Докажем обратное неравенство. Докажем, что выполнено аналогичное неравенство для $d(C_i, sY)$, где C_i – некоторый смежный класс G по F, s – фиксированный элемент $G \setminus H$. Правая часть неотрицательна. Пусть u коммутирует с s. Тогда $f(s)$ коммутирует со всеми $f(v)$, $v \in C_i$. Кроме того, s не коммутирует с v, $v \in C_i \setminus uZ$, так как s иначе коммутировал бы с a, а значит, лежал бы в H. Таким образом, в этом случае $d(C_i, sY) = p\operatorname{card}(Z) = pd(C_i/Y, f(sY))$ и неравенство доказано. Просуммировав по всем i и по всем смежным классам $G \setminus H$ по Y мы получаем требуемое. $\bullet$

1.2. Теперь перейдем к доказательству основного утверждения про центральные идемпотенты.

Теорема 1.2. *Если K/k – вполне дико разветвленное расширение полных дискретно нормированных полей с полем вычетов характеристики p, то $\mathfrak{B}_{K/k}(I, I)$ не содержит нетривиальных центральных идемпотентов, а значит, алгебра $\mathfrak{B}_{K/k}(I, I)$ неразложима как кольцо.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по n. В качестве базы возьмем аналогичное утверждение для абелевых нециклических расширений из работы [1].

Переход разбивается на два случая.

Случай 1. Центр не цикличен. Тогда выберем подгруппу H в центре, изоморфную $(\mathbb{Z}/(p))^2$. Рассмотрим теперь поля K_i, $i = 0, \ldots, p$, где $K_i = K^{H_i}$, $H_i \subset H$, $\mathrm{card}(H_i) = p$. Из предложения 4.4 работы [1], следует, что если для каждого i $kL \cap K_i$ равен 0 или K_i, то $L = \{0\}$ или $N = \{0\}$, где $I = L \bigoplus N$ – разложение идеала I. Таким образом, так как P – нетривиальный центральный идемпотент, то существует такое i, что ограничение P на K_i является нетривиальным центральным идемпотентом в стабилизаторе идеала $I \cap K_i$ в расширении K_i/k. Так как K/k неабелево, то K_i/k нециклично. Таким образом, можно применить предположение индукции.

Случай 2. Центр цикличен. Докажем, что тогда можно выбрать k_1 из леммы 1.1 такое, что K/k_1 нециклично. Действительно, если $H = \langle h \rangle$, то, так как $[G : H] = p$, H циклическая, h^p лежит в центре G. Тогда получаем, что $Z = \langle h^p \rangle$, а так как фактор неабелевой группы по центру нецикличен, то $G/Z \simeq (\mathbb{Z}/(p))^2$. Таким образом, если взять g_1, g_2, $\langle g_1, g_2, Z \rangle = G$, то $k_{11} \cap k_{21} = k$, где k_{11}, k_{21} – поля соответствующие g_1 и g_2. Тогда K/k_{11}, K/k_{21} не могут быть циклическими одновременно, так как иначе K/k абелево. Группа A является фактором G, а значит, нециклична. Получаем, что, применив лемму 1.1, мы можем перейти к предположению индукции. $\bullet$

Замечание 1.3.

То же доказательство проходит и для некоторых типов не вполне разветвленных расширений, например, для тех, в которых группа инерции выделяется в качестве прямого слагаемого во всей группе Галуа. При этом нужно применять рассуждения, аналогичные доказательству предложений 4.6.1 и 4.6.2 работы [1].

§2. Разложимость идеалов

2.1. Теперь рассмотрим произвольные разложения идеалов как $\mathfrak{o}[G]$-модулей. Так же, как и в п. 3.1 работы [1], пусть F – промежуточное поле, такое, что K/F – вполне разветвленное расширение Галуа с $H = \mathrm{Gal}(K/F) = \langle\sigma\rangle \approx \mathbb{Z}/p$. Так как K/k неабелево, то скачок ветвления h расширения K/F взаимно прост с p.

Рассмотрим $\mathfrak{o}[H]$-подмодуль $\mathfrak{N}$ в K по аналогии с [1], п. 2.2:

$$\mathfrak{N} = \langle \xi, \lambda_1(\sigma-1)\xi, \ldots, \lambda_{p-1}(\sigma-1)^{p-1}\xi \rangle,$$

где $\xi \in K$, $v(\xi) \equiv h \mod p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in k$, $-e \leqslant v_0(\lambda_{p-1}) \leqslant \cdots \leqslant v_0(\lambda_1) \leqslant 0$.

Лемма 2.1. *Следующие утверждения равносильны:*

a) $\mathfrak{N}$ *разложим;*

b) tr/p *переводит* $\mathfrak{N}$ *в себя, где* $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_{K/F}$*;*

c) $(p\lambda_{p-1})^{-1} \in \mathfrak{o}$, *т.е.* $v_0(\lambda_{p-1}) + e \geqslant 0$.

Доказательство. См. предложение 3.1 [1]. •

2.2. Пусть $\mathfrak{M}^{\varkappa}$ – идеал в K, $[K:k] = p^m$. Рассмотрим $\mathfrak{o}$-модули

$$\mathfrak{N}_i = \langle \xi_i, \lambda_{i,1}(\sigma-1)\xi_i, \ldots, \lambda_{i,p-1}(\sigma-1)^{p-1}\xi_i \rangle,$$

где

$$v(\xi_i) = \varkappa + \overline{h-\varkappa} + pi, \quad 0 \leqslant i < p^{m-1};\ \lambda_{i,j} \in k,$$
$$v_0(\lambda_{i,j}) = -\left[\frac{v(\xi_i) + jh - \varkappa}{p^m}\right] = -\left[\frac{\overline{h-\varkappa} + jh + pi}{p^m}\right].$$

Непосредственно проверяется, что

$$-e \leqslant v_0(\lambda_{i,p-1}) \leqslant v_0(\lambda_{i,p-2}) \cdots \leqslant v_0(\lambda_{i,1}) \leqslant 0,$$

а значит, $\mathfrak{N}_i$ являются $\mathfrak{o}[H]$-модулями. Кроме того, так как

$$v(\xi_i) \equiv h \mod p,$$

мы имеем $v((\sigma-1)^j\xi_i) = v(\xi_i) + jh$, $0 \leqslant i < p^{m-1}$, $0 \leqslant j \leqslant p-1$. Поскольку эти числа образуют полную систему вычетов по модулю

p^m, значения $v(\lambda_{ij}(\sigma-1)^j\xi_i)$ представляют собой перестановку чисел $\varkappa, \varkappa+1, \dots, \varkappa+p^m-1$. Таким образом, объединение $\mathfrak{o}$-базисов всех $\mathfrak{N}_i$ будет $\mathfrak{o}$-базисом всего $\mathfrak{M}^\varkappa$. Тем самым мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.2. *Идеал $\mathfrak{M}^\varkappa$ имеет следующее разложение как $\mathfrak{o}[H]$-модуль:*

$$\mathfrak{M}^\varkappa = \bigoplus_{i=0}^{p^{m-1}-1} \mathfrak{N}_i.$$

2.3. Теперь укажем условие неразложимости всех $\mathfrak{N}_i$.

Лемма 2.3. *Если*

$$(p-1)h \leqslant p^m(e-1),$$

тогда все $\mathfrak{N}_i$ для любого идеала $\mathfrak{M}^\varkappa$ в K неразложимы как $\mathfrak{o}[H]$-модули.

Доказательство. См. параграф 3 работы [1]. $\bullet$

Теорема 2.4. *Если K/k обладает тем свойством, что для каждого промежуточного нормального подрасширения F/k $k \subset F \subset K$ степени m такого, что центр группы $H = \mathrm{Gal}(F/k)$ цикличен, выполнено $h < \frac{me-m}{p-1}$, где h – наибольший скачок ветвления F/k, то в K нет идеалов, разложимых как $\mathfrak{o}[G]$-модули.*

Доказательство. Будем проводить доказательство индукцией по степени расширения, почти так же, как в теореме 1.2. База та же, случай 1 разбирается аналогично.

Рассмотрим случай 2. Пусть G имеет циклический центр, h то, что упоминается в условии, $g^p = 1$, g лежит в центре G, $K_1 = K^g$. Тогда из леммы 2.3 мы знаем, что все $\mathfrak{N}_i$ неразложимы. Из предположения индукции если разложение I имеет вид $I = L \bigoplus N$, то, не умаляя общности, $K_1 \cap kL = K_1$. Тогда получаем, что для каждого i $\mathfrak{N}_i \cap L \neq \{0\}$, а так как $\mathfrak{N}_i$ неразложимы, то из теоремы Крулля–Шмидта (см. [4]) мы получаем, что $L = I,\ N = \{0\}$ (здесь мы пользуемся тем, что поле K_1 в K определяется условием $K_1 = \{x \in K :\ g(x) = x\}$, и значит, переходит в себя при $\mathfrak{o}[Y]$-гомоморфизмах). $\bullet$

Замечание 2.5. Условие теоремы 2.4 несколько громоздко, но вряд ли можно его просто равносильно переформулировать для произвольной группы G. Однако можно привести примеры более сильных достаточных условий. Как следует из [1], достаточно того, чтобы для наименьшего скачка ветвления $h_{\min}$ группы G было выполнено $h_{\min} > n/(p-1)^2$.

Литература

1. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, И. Б. Жуков, *Аддитивные модули Галуа.* — Алгебра и Анализ **9**, № 4 (1997), 28–46.
2. Y. Miyata, *On the module structure of a $\mathfrak{p}$-adic number field.* — Nagoya Math. J. **77** (1980), 13–23.
3. Jean-Pierre Serre, *Local Fields.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1979.
4. З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев, *Гомологии групп. II. Проективные резольвенты конечных групп.* — Вестник Ленингр. Унив. **7** (1959), 72–81.

Bondarko M. V. Idempotents in the endomorphism ring of an ideal in a p-extension of a complete discrete valuation field with residue field of characteristic p as a Galois module.

In this paper we study the question when there exist non-trivial idempotents in the endomorphism ring of an ideal in a p-extension of a complete discrete valuation field with residue field of finite characteristic $p > 2$ as a Galois module. We prove that there are no non-trivial central idempotents for a non-abelian totally widely ramified extension.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 ноября 1999 г.