Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

М. В. Бондарко

ТЕОРЕМА КРУЛЛЯ—ШМИДТА ДЛЯ ГЕНЗЕЛЕВЫХ КОЛЕЦ

Введение

Целью этой работы является распространение теоремы Крулля–Шмидта (теоремы об однозначности разложения в сильной формулировке, т.е компоненты одного разложения можно дополнить компонентами другого) на широкий класс колец. Как известно, для этого достаточно доказать, что кольца эндоморфизмов неразложимых модулей локальны, этим мы и будем заниматься. Этот результат хорошо известен для полей и других артиновых нетеровых колец. Аналогичный результат для колец целых локальных полей был доказан в [1].

В первом параграфе мы доказываем, что теорема Крулля–Шмидта для конечнопорожденных модулей над данным кольцом равносильна гензелевости этого кольца.

Во втором параграфе мы занимаемся модулями конечного ранга. Основное утверждения параграфа 2 сформулировано в виде перехода (т.е. если свойство выполнено для одного кольца, то оно выполнено для другого, связанного с первым). Если применить переход один раз, то получится утверждение для гензелевых колец нормирования, при многократном применении получаются кольца целых многомерных (в весьма общем смысле) полей.

В параграфе 3 доказывается что утверждение о локальности колец эндоморфизмов неразложимых модулей выполнено для предела колец, если оно выполнено для каждого из них.

Все основные кольца (но не алгебры над ними) будем считать коммутативными; и кольца, и алгебры будут ассоциативными и будут содержать единицу.

Будем называть A-модуль M модулем конечного ранга, если M вкладывается в некоторый фактор конечномерного векторного K-пространства по его A-подмодулю.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований No. 97-01-00058-а.

§1. Конечнопорожденные модули

1.1. Дадим определение гензелевости кольца.

Определение 1.1. *Локальное кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$ (не обязательно целостное) называется гензелевым, если каждый унитарный многочлен f над A, редукция которого в $k = A/\mathfrak{M}$ имеет вид $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_m x^m$, $0 < m < n$, $c_m \neq 0$, приводим.*

Сформулируем другие условия на кольца. Будем говорить, что для кольца A выполнено свойство (*), если каждая неразложимая A-алгебра, конечнопорожденная как A-модуль, является локальной.

Под разложимостью алгебры мы будем понимать наличие в ней нетривиальныз идемпотентов, т.е. разложимость как модуля над собой.

Пусть теперь A — область целостности, K — ее поле частных.

Мы будем называть A-модуль M модулем конечного ранга, если M вкладывается в некоторый фактор конечномерного векторного K-пространства по его A-подмодулю.

Если каждая неразложимая A-алгебра конечного ранга без кручения, т.е. неразложимая A-алгебра, являющаяся A-модулем конечного ранга без кручения, локальна, то будем говорить, что для A выполнено свойство (**).

Замечание 1.2. Очевидно, если для кольца A выполнено условие (*) или (**), то то же условие выполнено и для любой конечномерной ассоциативной (не обязательно целостной и коммутативной) A-алгебры A_1 (при этом под A_1-алгеброй мы понимаем кольцо, содержащее A и содержащее центр A_1 в своем центре, конечность ранга можно понимать как конечность ранга над A). Действительно, любая конечнопорожденная A_1-алгебра или A_1-алгебра конечного ранга является конечнопорожденным модулем, или, соответственно, модулем конечного ранга над A.

Замечание 1.3. Очевидно, поля удовлетворяют условиям (*) и (**). Их можно использовать в качестве основы для построения колец, удовлетворяющих (*) и (**).

Введем понятие размерности: для конечнопорожденного A-модуля M будем считать $\dim M$ равной $\dim_F(M/\mathfrak{M}M)$, $F = A/\mathfrak{M}$. Известно, что $e_i \in M$ порождают M как A-модуль тогда и только тогда, когда их образы в $M/\mathfrak{M}M$ порождают $M/\mathfrak{M}M$ (см.).

Кроме того, размерность аддитивна, т.е.

$$\dim(M_1 \bigoplus M_2) = \dim M_1 + \dim M_2.$$

Теорема 1.4. *Гензелевость кольца A равносильна выполнению для него условия (*).*

Доказательство. Пусть для A выполнено условие (*). Докажем, что A гензелево. Пусть многочлен f из определения неприводим. Тогда рассмотрим конечнопорожденную коммутативную алгебру $R = A[x]/(f(x))$. Она неразложима. Действительно, пусть размерность R над A равна n. Если $R = R_1 \bigoplus R_2$, то $n_1 + n_2 = n,\ n_i = \dim R_i$. Тогда если мы рассмотрим проекции x в R_1 и R_2, то они имеют характеристические многочлены f_1 и f_2 степеней n_1 и n_2. Таким образом, характеристический многочлен x в R равен $f_1 f_2$, а значит, f разложим.

Мы можем ввести на R и $R/\mathfrak{M}R$ отображения нормы N_R, $N_{R/\mathfrak{M}R}$ и, так как они согласованы, то если $N_{R/\mathfrak{M}R}(y \mod \mathfrak{M}) = 0$, то норма элемента y в R равна $z \in \mathfrak{M}$, а значит, y необратим. Таким образом, x необратим в R. Рассмотрим теперь $t = x^{n-m} + b_{n-1}x^{n-1-m} + \cdots + b_m$, где редукции b_i равны c_i. Редукция t в $R/\mathfrak{M}R$ имеет собственное число 0 (как k-линейный оператор из $R/\mathfrak{M}R$ в себя), а значит, норма редукции t равна 0, и, таким образом, элемент t необратим. Но $t \equiv b_m \mod (x)$, а так как $b_m \in A^*$, то R не локальна и A не удовлетворяет условию (*).

Теперь пусть A гензелево. Будем доказывать локальность неразложимой конечномерной A-алгебры R. Локальность R равносильна тому, что необратимые элементы R образуют идеал. Таким образом, требуется доказать, что сумма необратимых элементов неразложимой A-алгебры R необратима. Это равносильно обратимости суммы обратимого и необратимого, а для этого достаточно доказать обратимость $x - 1$ в $A[x] \subset R$ для всех необратимых элементов $x \in R$.

R как A-модуль является фактором свободного модуля $M = A^n$ по некоторому подмодулю N, лежащему в $\mathfrak{M}M$. Рассмотрим алгебру R', состоящую из тех A-эндоморфизмов M, которые переводят N в себя и индуцируют на R отображения, соответствующие умножению на элементы R. Мы имеем естественное сюръективное отображение

$$f : R' \to R.$$

Пусть x необратим. Рассмотрим некоторый его прообраз: $f(x') = x$. Пусть P – характеристический многочлен x' как A-отображения из M в M.

Рассмотрим алгебру $Q = A[z]/(P(z))$, z – формальная переменная. Пусть в ней $z-1$ необратим. Тогда получаем, что свободный член многочлена $P(z+1)$ лежит в $\mathfrak{M}$. Таким образом, $\overline{P} = P \mod \mathfrak{M}[z]$ имеет корни 0 и 1, а значит, из определения 3.2 (возможно, примененного несколько раз), P разлагается в произведение f и g, где многочлен f унитарен и $f \mod \mathfrak{M} = (-1)^n z^m$, $g \mod \mathfrak{M} = z^{n-m} + c_{n-1}z^{n-1-m} + \cdots + c_m$, $g \mod \mathfrak{M}$ имеет корень 1. Тогда из обратимости $g \mod M$ в $F[[z]]$ получаем, что результант f, g обратим. Таким образом, существует $h \in A[x]$, $f \mid h-1$, $g \mid h$. Тогда получаем, что R содержит идемпотент $h(x)$. Этот идемпотент не может быть тривиальным, так как его редукция по модулю $\mathfrak{M}$ не равна 0.

Если же $(z-1)Q(z) = 1$ в Q для некоторого $Q(z) \in A[z]$, то элемент $Q(x)$ является обратным к $x-1$. $\bullet$

§2. Алгебры конечного ранга

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

B – область целостности, k – ее поле частных;

A – целостное кольцо с заданным на нем неотрицательным нетривиальным неархимедовым нормированием v (не обязательно дискретным) таким, что $A/A_{0+} = B$, где A_{0+} – идеал A, заданный условием $A_{0+} = \{x \in A: \ v(x) > 0\}$;

A_{a+} – идеал A, заданный условием $v(x) > a$;

K – поле частных A;

K^{alg} – алгебраическое замыкание K;

K_v – пополнение K по нормированию v;

$\mathfrak{O}_K$ – кольцо v-целых элементов K;

Если выполнено равенство

$$A = A_v \cap K^{alg},$$

где A_v – пополнение A по нормированию v, кроме того $A_{0+} = \{x \in K: \ v(x) > 0\}$ и $\mathfrak{O}_K/A_{0+} = D$, где D – конечное расширение k, то будем называть A гензелевым кольцом нормирования.

Нетрудно видеть, что для $D = B$ это условие действительно равносильно выполнению леммы Гензеля для кольца нормирования (формулировку см. [2]). Будем называть D полем вычетов K.

2.1. Докажем несколько технических утверждений. Первые две леммы заменят в доказательстве основного результата этого параграфа компактность единичной сферы, которая используется при доказательстве теоремы Крулля–Шмидта для модулей конечного ранга над кольцами целых локальных полей.

Предложение 2.1. *Пусть K – полное поле с ультраметрическим нормированием v. Введем нормирование v на пространстве $V = K^n$, полагая $v((x_1, \ldots, x_n)) = min_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i)$. Если u_i – не стремящаяся к 0 последовательность векторов из V, то существуют векторы y_i, принадлежащие $\mathfrak{O}_K(u_i, u_{i+1}, \ldots)$ (т.е. $\mathfrak{O}_K$-линейной оболочке $u_i, u_{i+1}, \ldots$), $u \neq 0$, такие, что $y_i \to u$.*

Доказательство. Мы можем считать векторы u_i целыми. Будем доказывать лемму по индукции. Для $n = 1$ она очевидна. Обозначим первую координату u_i через x_i. Рассмотрим векторы $u_{ij} = x_j u_i - x_i u_j$. Если u_{ij} не стремятся к 0 при $i, j \to \infty$, то, так как первая координата всех u_{ij} равна 0, а значит, u_{ij} лежат в пространстве размерности $n - 1$, то мы можем применить предположение индукции. Пусть теперь $u_{ij} \to 0$. Тогда или $x_i \to 0$, или для некоторой u_{i_j} – подпоследовательности u_i – выполнено $v(\frac{u_{i_{j_1}}}{x_{i_{j_1}}} - \frac{u_{i_{j_2}}}{x_{i_{j_2}}}) \to +\infty$. В первом случае рассмотрим векторы u'_i, полученные из u_i отбрасыванием первой координаты. По предположению индукции, существуют векторы u и y'_i такие, что $y'_i \in \mathfrak{O}_K(u'_i, u'_{i+1}, \ldots)$, $y'_i \to u$. Тогда то же выполнено для того же u (с нулевой первой координатой) и для y_i, равных комбинациям u_i с коэффициентами, равными коэффициентам разложения y'_i по u'_i. Если же

$$v\left(\frac{u_{i_{j_1}}}{x_{i_{j_1}}} - \frac{u_{i_{j_2}}}{x_{i_{j_2}}}\right) \to +\infty,$$

то из полноты получаем, что существует z такой, что $v(z - \frac{u_{i_j}}{x_{i_j}}) \to +\infty$. Тогда можно взять $u = cz$ и $y_i = \frac{c}{x_{i_j}}$, где c – произвольный элемент K такой, что существует последовательность $i_j > j$ такая, что $v(c) > v(x_{i_j})$ для каждого j. •

Лемма 2.2. *Если K – полное, для u_i выполнено $v(u_i) \to -\infty$, то существует такой $v \neq 0$, что Kv лежит в $\mathfrak{O}_K$-линейной оболочке u_i.*

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\mathfrak{O}_K(u_1, u_2, \dots, u_n)$ содержит $\mathfrak{O}_K^n$. Рассмотрим векторы $v_i = a_i u_i$, где $v(a_i) = -v(u_i)$. По предыдущей лемме, существуют $u \neq 0$ и y_i такие, что $y_i \in \mathfrak{O}_K(v_i, v_{i+1}, \dots)$, $y_i \to u$. Так как $v(u_i) \to -\infty$, то получаем, что для каждого $x \in K$, начиная с некоторого i, xy_i лежит в $\mathfrak{O}_K(u_i, u_{i+1}, \dots)$. Кроме того, так как $y_i \to u$, то начиная с некоторого i выполнено $v(xy_i - xu) \geqslant 0$, и значит, $xu \in \mathfrak{O}_K(u_1, u_2, \dots, u_n, u_i, u_{i+1}, \dots)$. Таким образом, $xu \in \mathfrak{O}_K(u_i)$ для каждого $x \in K$. $\bullet$

2.3. Теперь построим по A-модулю M и подалгебре Q его A-эндоморфизмов B-модуль N и подалгебру R алгебры его B-эндоморфизмов. N и R будут играть роль редукции M и Q в доказательстве основного результата этого параграфа.

Пусть A – гензелево кольцо нормирования, M – A-подмодуль $V = K^n$ с нормированиями элементов, ограниченными снизу. Будем считать, что M порождает V над K. В случае, когда нормирование v недискретно, рассмотрим все A-модули $N_a = M_{a-}/M_{a+}$, где $M_{a-} = \{x \in V : \ x/t \in M$ для каждого t такого, что $v(t) < a\}$, $M_{a+} = A_{a+}M$, в случае нормирования v дискретного будем рассматривать N_a только для $a \notin Y$, где Y – множество значений v в K. Нетрудно видеть, что N_a являются также B-модулями, вложенными в D, а значит, конечного ранга над B. Очевидно, модули N_a, N_b изоморфны если $a - b \in Y$; в случае дискретного нормирования все N_a для $a \notin Y$ изоморфны. Если v недискретно, то рассмотрим все $[a] \in \mathbb{R}/Y$, для которых N_a ненулевой. Легко видеть, что если выбрать в V представители u_{ai} для базиса N_a, то полученные векторы для разных $[a]$ будут независимы, а значит, ненулевых B_a конечное число. Действительно, если рассмотреть $u = \sum c_{xi} v_{xi}$, где классы x в $\mathbb{R}/Y$ различны, то мы получим, что минимум $x + v(c_{xi})$ достигается при единственном x. Тогда если минимум равен r, то u лежит в M_{r-} и имеет ненулевой образ в N_r. Рассмотрим теперь B-модуль N, равный N_a, если v дискретно, где a – произвольное число из $\mathbb{R} \setminus Y$, и равный $\prod_{[a] \in \mathbb{R}/Y} \Omega'(N_a, N_a)$, если v недискретно. Рассмотрим также отображение $w : Q \to \mathrm{Hom}_B(N, N)$, индуцированное естественным отображением $u: M \to N$. Будем считать B-подалгебру R алгебры всех B-эндоморфизмов модуля N равной $w(Q)$.

2.4. Будем считать, что A – гензелево кольцо нормирования.

Лемма 2.4. 1. *Если $s = w(q)$ – идемпотент в R, то существует r – идемпотент в Q, такой, что $w(r) = s$.*

2. *Если $w(q)$ обратим, то q обратим.*

Доказательство. Докажем сначала, что если $w(t) = 0$, $t \in Q$, то $t^i \to 0$, $i \to \infty$. Для дискретного нормирования такое утверждение очевидно, так как в этом случае $tM_{a+} \in M_{a+1+}$ (для $Y = \mathbb{Z}$).

Докажем это утверждение для недискретного v. Можно заменить A на $\mathfrak{O}_K$, M на $\mathfrak{O}_K M$ и Q на $\mathfrak{O}_K Q$, где $\mathfrak{O}_K$ – кольцо v-целых K, так как от этого M_{a+}, M_{a-} не изменятся.

Достаточно доказать, что если $w(t) = 0$, то собственные числа t (как K-линейного оператора) имеют положительное нормирование (в любом продолжении v, на самом деле v продолжается на все алгебраические расширения K однозначно). Действительно, тогда мы докажем, что коэффициенты характеристического многочлена $P[z]$ элемента t, кроме старшего, имеют положительное нормирование. Этих коэффициентов конечное число, а значит, инфимум их нормирования больше 0. Тогда выразив t^i, $i \in \mathbb{Z}_+$, через первые n степеней t, мы получим, что коэффициенты в этом разложении стремятся к 0.

Докажем положительность нормирования собственных чисел. Из гензелевости, если есть λ – корень P с неположительным нормированием, то существует делитель $F(z) = \sum_{i=0}^{k} c_i z^i$ многочлена $P(z)$, такой, что $c_0 = 1$, $v(c_i) \geqslant 0$, $i > 0$, и корни $F(z)$ – это корни $P(z)$, норма которых неположительна. Рассмотрим оператор $G = 1 - F(t)$. G имеет собственное число 1, а значит, существует $x \in V$, такой, что $Gx = x$. Тогда рассмотрим $a = \sup t : \ x/s \in M, \ v(s) = t$. Мы получаем, что модуль N_a ненулевой и редукция G на него имеет ненулевой вектор с собственным числом 1. Но G является многочленом от t с v-целыми коэффициентами и нулевым свободным членом, а значит, $w(G) = 0$.

1. Пусть для $f \in Q$ выполнено $w(f) = s$. Для элемента $t = f^2 - f$ мы имеем $w(t) = 0$. Разложим r в ряд Тэйлора по t, $t \in A_{a+}Q/R$, $a > 0$, где элемент r задан формулой

$$r = \frac{1-p}{2}, \ p = \frac{1-2f}{\sqrt{1+4t}} \ .$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты разложения s по t являются целыми даже если 2 необратима в A и что $s \equiv f \mod (t)$. Сравнение проверяется подсчетом коэффициента при t^0. То, что r – идемпотент, можно проверить, как равенство алгебраических функций. P – характеристический многочлен t в Q/R, где Q/R рассматривается как подмодуль конечнопорожденного A-модуля, имеет целые коэффициенты и $P^l(z)-z^{ml} \to 0$ в $A[[z]]$ (покоэффициентная сходимость), где m – степень P. Поэтому ряд $r(t)$ можно редуцировать по модулю P и получить многочлен $r'(t) \in A_v[t]$ степени, не большей $m-1$. Тогда коэффициенты $r'(t)$ будут решениями алгебраической системы с коэффициентами из K с конечным числом решений, а значит, коэффициенты r' лежат в K^{alg}, а значит, и в $K^{alg} \cap A_v = A$. Тогда элемент $r'(t)$ является искомым.

2. Возьмем такой элемент $g \in Q$, что $w(qg-1)=0$. Рассмотрим элемент $h = \sum_{i=0}^{\infty}(t)^i$, $t = 1-qg$, лежащий в пополнении Q. Мы снова можем редуцировать ряд $h(t)$ по модулю характеристического многочлена элемента t и получить многочлен $h'(t)$. Так же, как и выше, получаем, что коэффициенты h' лежат в a. Тогда элемент $gh'(t)$ лежит в Q и является обратным к q. •

Нетрудно видеть, что так как система $hq = 1$ линейна, то на самом деле условие гензелевости в п.2 можно ослабить.

2.5 Редукция по радикалу. Докажем, что прообраз идемпотента или обратимого элемента при редукции по нильрадикалу кольца является, соответственно, идемпотентом или обратимым элементом.

Лемма 2.5. 1. *Если образ элемента q кольца Q при отображении факторизации $f : Q \to Q/R$, где R – радикал Q, обратим, то q обратим.*

2. *Если элемент $f(r)$, $r \in Q$, является идемпотентом, то существует такой элемент $g \in Q$, что $f(q) = f(g)$ и g – идемпотент.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения. Вместо того, чтобы пользоваться гензелевостью, мы можем просто оборвать соответствующие ряды (так как соответствующий t является нильпотентом) •

2.6 Условие для кручения. Для того, чтобы можно было применять наши результаты для модулей, имеющих кручение, нам понадобится следующее условие.

Пусть A-модуль M является фактором A-модуля G по подмодулю H, G является подмножеством $V = K^n$. Будем считать, что G порождает V над полем K. Рассмотрим разложение $V = U \bigoplus T$, где $U = KH$ и T – его дополнение. Мы получаем, что M вкладывается в сумму $T \bigoplus U/H$, причем $U/H = L$ является модулем кручения.

Мы будем рассматривать некоторое подкольцо Q кольца A-эндоморфизмов M. Каждому A-морфизму, соответствующему элементу Q, соответствует A-линейный гомоморфизм из L в L; будем обозначать множество морфизмов, соответствующих элементам Q, через R. Очевидно, множество A-линейных отображений из L в L является A_v-алгеброй. Будем считать, что R вложено в фактор соответствующего матричного кольца над K_v (т.е все морфизмы из R продолжаются до K_v-линейных морфизмов из U_v в U_v). Таким образом, будем считать, что R лежит в некотором факторе некоторой K_v-алгебры, и нормирования элементов, соответствующих R, ограничены снизу (в любом базисе). Будем также требовать, чтобы морфизмы, соответствующие таким $f \in Q$, что сужение f на T равно 0, образовывали полное подпространство в $\mathrm{Hom}_{K_v}(U_v, U_v)$. Мы будем заменять морфизмы из R на все согласованные с ними морфизмы $U_v \to U_v$.

Легко видеть, что это условие выполнено, например, для любых подколец колец A-эндоморфизмов модуля с конечнопорожденным кручением.

2.7. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.7. *Если для B выполнено условие (**), A – гензелево кольцо нормирования с кольцом вычетов B, то для A также выполнено условие (**). Кроме того, аналогичное утверждение выполнено также для подкольца Q кольца A-эндоморфизмов A-модуля конечного ранга M, удовлетворяющего условию* 2.6.

Доказательство. Будем считать, что кольцо Q неразложимо.

Аналогично предыдущему пункту, вложим M в сумму K-векторного пространства T и модуля кручения L. Тогда для каждого $f \in Q$ имеем каноническое разложение $f = f_{TT} + f_{TL} + f_{LT} + f_{LL}$, $f_{TT} : T \to T, f_{TT}(L) = \{0\}$, ... Очевидно, $f_{LT} = 0$ для всех f. Тогда получаем, что если рассмотреть алгебру, порожденную $f_{TT}, f_{TL}, f_{LT}, f_{LL}$ для всех f, то все f_{TL} лежат в нильрадикале. Если мы рассмотрим отображение $r : f \to (f_{TT}, f_{LL})$, то получим, что его ядро лежит в нильрадикале Q. Как следует из леммы 2.5, факторизация по подидеалу нильрадикала Q не влияет на условие теоремы, а поэтому рассмотрим вместо Q образ Q при $r = (r_1, r_2)$. Профакторизовав $r_1(Q)$, $r_2(Q)$ по нильрадикалам, мы отобразим Q в подалгебру суммы A-алгебры X и A_v-алгебры Y, не имеющих нильрадикала. При этом X имеет конечный A-ранг, Y – конечный A_v-ранг, а нормирования элементов Y ограничены снизу (это свойство не зависит от базиса).

Обозначим через $s : Q \to X \bigoplus Y$ композицию r и факторизации по радикалом. Докажем, что из условия полноты в 2.6 следует, что $S = s(Q)$, $s : Q \to X \bigoplus Y$, замкнуто в $X \bigoplus Y$. Действительно, пусть $p : X \bigoplus Y \to X$, $q : X \bigoplus Y \to Y$ – отображения проекции. Возьмем такие $v_i \in S$, что $p(v_i)$ являются базисом $p(KS)$. Тогда из условия 2.4 получаем, что существуют $w_i \in S$ с $p(w_i) = 0$, такие, что $Kq(v_i) \bigoplus K_v w_i = q(KS)$. Тогда $A(v_i)$ замкнуто в $X \bigoplus Y$, так как если $\sum c_i v_i = r$, $c_i \in A_v$, $r \in X \bigoplus Y$, то, так как $p(v_i)$ линейно независимы, то $c_i \in A$. $A_v(w_i)$ тоже замкнуто. Тогда S замкнуто, так как оно содержит сумму замкнутого A_v-модуля и замкнутого A-модуля и лежит в их K-линейной оболочке.

Теперь докажем, что значения нормирования элементов S ограничены снизу. Для этого достаточно доказать, что в пополнении S значения нормирования ограничены снизу. Мы имеем вложение $S_v \to X_v \bigoplus Y$, где X_v – пополнение X. Нильрадикал $X_v \bigoplus Y$ равен 0. Тогда если есть элементы S_v со сколь угодно малыми значениями нормирования, то, по лемме 2.2, в S_v есть ненулевой двусторонний идеал I, задаваемый условием $I = \{x \in S_v : K_v x \in S_v\}$ (очевидно, такие элементы действительно образуют двусторонний идеал). Тогда получаем, что существует центральный идемпотент P алгебры Q_v, принадлежащий I (он есть в $K_v I$, а $K_v I = I$). Так как значения нормирования элементов Y ограничены снизу, то $q(P) = 0$. Таким образом, P является центральным идемпотентом S_v и лежит в алгебре $\{x \in S_v : q(x) = 0\}$. Очевидно, центральные идемпотенты пополнения $p(S)$ алгебры конечного ранга имеют алгебраические координаты, так как их координаты являются решениями алгебраической системы с коэффициентами из K. Тогда из гензелевости получаем, что $P \in S$, а значит, S разложима.

Теперь рассмотрим $M' = S$ как A-модуль с алгеброй эндоморфизмов S. Нормирования элементов M' ограничены снизу и отображение $S \to \mathrm{Hom}_A(M', M')$ инъективно. Построим по M' модуль N как в 2.3. Из леммы 2.4, мы получаем, что f обратим тогда и только тогда, когда обратим $w(f)$, и для каждого идемпотента $w(s)$ из R существует подъем. Действительно, идемпотенты и обратные, построенные в лемме, будут иметь первую координату из KX и лежать в пополнении S, а значит, как следует из полноты, они будут лежать в S. Тогда, так как N является B-подмодулем конечномерного D-пространства, а значит, B-модулем конечного ранга, из условия (**) для кольца B мы получаем, что S локально; следовательно, Q тоже локально (см. леммы 2.4 и 2.5). $\bullet$

Таким образом, условие (**) для A доказано.

§3. Переход к пределу

3.1. Докажем, что в условиях (*) и (**) можно переходить к инъективному пределу. Будем считать, что гомоморфизмы колец переводят единицу в единицу.

Предложение 3.1.

1. *Пусть* $\varinjlim_{i \in I} A_i = A$. *Если для каждого* A_i *выполнено условие (*), то оно выполнено и для* A.

2. *Пусть кроме того все отображения* $f_{ij} : A_i \to A_j$ $(i < j)$, *задающие инъективный предел, инъективны,* A, A_j *– области целостности. Если для каждого* A_i *выполнено условие (**), то оно выполнено и для* A.

Доказательство. 1. Если A – поле, то оно удовлетворяет свойству (*). Будем считать, что A – не поле.

Так как A_i удовлетворяют свойству (*), то они локальны или являются полями. При этом если для сколь угодно больших $i \in I$ A_i являются полями, то A – тоже поле. Поэтому мы можем считать, что все A_i – локальные кольца.

Тогда для каждого $i \in I$ ядро $f_i : A_i \to A$ лежит в максимальном идеале. Таким образом, образ обратимого элемента в A_i обратим в A. Тогда если $a \in A$ необратим, то каждый его прообраз необратим. Очевидно, выполнено и обратное. Тогда если $x, y \in A$ необратимы, то существует такое $j \in I$, что для $i > j$ элементы x, y имеют необратимые прообразы в A_i. Отсюда $x + y$ имеет во всех A_i, $i > j$ необратимый прообраз, а значит, необратим в A. Таким образом, A – локальное кольцо.

Докажем, что A – гензелево. Пусть h – многочлен над A из определения 1.1. Из сказанного выше, существует такое $j \in I$ и многочлен $h_j = \sum_{0 \leqslant s \leqslant n} a_i x^i$ степени $n = \deg h$ над A_j, что $f_j(h_j) = h$, при этом a_i, $i < m$ необратимы. Тогда, так как A_j гензелево, то h_j приводим над A_j, а значит, его образ также приводим.

2. Мы имеем $\varinjlim K_i = K$, где K_i – поля частных A_i, K – поле частных A. Пусть Q – неприводимая алгебра конечного ранга над A, при этом существует такой $x \in A$, что x и $x+1$ необратимы. Для некоторого $j \in I$ характеристический многочлен P элемента x над K определен над K_i. Тогда, так как $K_i[x]/P(x)$ – нелокальная алгебра конечного ранга над A_i, то она содержит нетривиальный идемпотент, а значит, $K[x] \subset Q$ содержит нетривиальный идемпотент. $\bullet$

3.2. Докажем, что в условии (*) можно переходить к проективному пределу.

Предложение 3.2. *Если $\varprojlim_{i \in I} A_i = A$, при этом A_i, а значит, и A, – области целостности, и для каждого A_i выполнено условие (*), то оно выполнено и для A.*

Доказательство. Пусть $f_{ji} : A_j \to A_i$ – отображения, определенные для всех $i, j \in I$, таких, что $i \leqslant j$, которые задают проективный предел. Докажем, что можно считать их сюръективными. Возьмем $A'_i = \cap_{j>i} f_{ji}(A_j)$. Достаточно доказать, что A'_i гензелевы. Мы знаем, что $f_{ji}(A_j)$ удовлетворяют условию (*) как факторы A_j. Пусть $f = \sum b_i x^i$ – многочлен из определения 3.2 для кольца A'_i. Так как элемент b_0 необратим в A'_i, то существует такое r, что b_0 необратим в $f_{ji}(A_j)$ $j > r$. Так как среди b_i, $i < n$, есть обратимые, то для всех $j > r$ $f_{ji}(A_j)$ будет удовлетворять условиям из определения 3.2. Тогда f приводим в $f_{ji}(A_j)[x]$ для $j > r$, а так как вариантов разложения многочлена конечное число (сопоставим им соответствующие наборы элементов в $K_i'^{alg}$), то можно взять поднабор j, $j > r$, содержащий сколь угодно большие j, с одним типом разложения, а тогда это разложение имеет коэффициенты в A'_i.

Теперь будем считать f_{ij} сюръективными. Как было доказано в 1.9, достаточно доказывать утверждение для случая, когда конечнопорожденный A-модуль M свободен. Обозначим отображение из A в A_i через f_i, и так же обозначим ограничение на Q отображения из $M_n(A)$ в $M_n(A_i)$, индуцированного f_i. Если мы рассмотрим $M_i = f_i(M)$, $i \in I$, Q_i равные $f_i(Q)$, то мы получим, что $\varprojlim Q_i = Q$. Тогда если для какого-то $l \in I$ кольцо Q_l не локально, то и все кольца Q_j для $j > l$ тоже не локальны, а значит, все эти кольца разложимы. Кроме того, легко видеть, что для каждого идемпотента P_s в Q_s в каждом Q_j, $j > s$, существует идемпотентный подъем P_j, так как иначе есть неразложимая компонента N_j в прямом разложении M_j с разложимым $f_{js}(N_j)$. Поскольку $\varprojlim_{i>l} Q_i = Q$, из существования непустого множества идемпотентов P_i в Q_i, $i \geqslant l$, не равных 0 и 1, мы получаем, что есть и элемент $P \in Q$ предела P_i, не равный 0 и 1. Докажем, что P – идемпотент. Действительно, иначе существует такой $x \in M$, что $(P^2 - P)(x) = y \neq 0$, но для всех $i > l$ выполнено $f_i(y) = 0$. Если же все Q_i локальны, то выберем какое-то $l \in I$. Достаточно доказать, что все элементы $q \in Q$, для которых элемент $f_l(q)$ обратим, сами обратимы. Пусть $f_l(q)g_l = 1$, тогда так как для всех s, $s > l$, кольца Q_s локальны, то существуют такие g_s, что $g_s f_s(q) = 1$ (поскольку ядро отображения из Q_s в поле $Q_l/\mathfrak{M}_{Q_l}$, где $\mathfrak{M}_{Q_l}$ – максимальный идеал Q_l, является максимальным идеалом, то прообразы обратимых обратимы), а тогда у g_s существует предел $g \in Q$ и $gq = 1$.

Замечание 3.3. Из доказательства предложения 3.2 следует, что если отображения f_{ij}, $i > j$, сюръективны, то утверждение выполнено также для A и A_i, не обязательно являющихся областями целостности. •

Литература

1. Z. I. Borevich and D. K. Faddeev, *Theory of homologies in groups. II. On projective resolvents of finite groups.* — Vestn. Leningr. Univ. **7** (1959), 72–81.
2. Jean-Pierre Serre, *Local Fields.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1979.

Bondarko M. V. Krull-Schmidt theorem for Henselian rings.

A necessary and sufficient condition on a local ring for all indecomposable finite-dimensional algebras over it to be local is found. The Krull–Schmidt theorem for a class of rings that includes both Henselian valuation rings and rings of integers of multi-dimensional fields is proved.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 11 ноября 1999 г.