Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

Н. А. Вавилов

О ПОДГРУППАХ РАСЩЕПИМЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП II

Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], посвященных описанию подгрупп расщепимых ортогональных групп $\Gamma = SO(n, R)$, содержащих группу $T = T(n, R)$ диагональных матриц. В этих работах такое описание получено в следующих двух случаях: A) n четно и R – полулокальное кольцо такое, что $2 \in R^*$ и в каждом поле вычетов R содержится не менее 7 элементов, B) n нечетно и $R = K$ – поле характеристики, отличной от 2, содержащее не менее 13 элементов. В настоящей работе мы обобщаем оба эти результата и показываем, что на самом деле такое же описание подгрупп в Γ, содержащих T, справедливо для любого n и любого полулокального кольца R, удовлетворяющего сформулированным в A) условиям.

Аналогичные результаты для других классических групп были получены ранее. Именно, описание подгрупп полной линейной группы $G = GL(n, \Lambda)$ над не обязательно даже коммутативным полулокальным кольцом Λ, содержащих группу $D = D(n, \Lambda)$ диагональных матриц, получено в работах З. И. Боревича и автора [3–6], аналогичный результат для полной симплектической группы $GSp(2l, R)$ – в работах автора и Е. В. Дыбковой [7]. Таким образом, настоящая работа завершает – с учетом статей [1–7] – описание подгрупп в расширенных расщепимых классических группах над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.

Случай нечетномерной ортогональной группы, рассматриваемый в данной работе, оказывается в техническом отношении значительно более трудным, чем все остальные классические случаи. Для группы $SO(2l + 1, K)$ над полем K в работе [2] был применен метод извлечения трансвекций из [8]. Поскольку этот метод не переносится на случай колец, нам пришлось здесь выработать совершенно другой вычислительный прием, который может оказаться полезным и в дальнейших исследованиях. Таким образом, доказательства настоящей работы не опираются на теорему 1 работы [2]. Наоборот, мы даем здесь новое, более простое доказательство этой теоремы, улучшающее притом оценку на число элементов поля K с 13 до 7.

С точки зрения теории алгебраических групп речь у нас идет о подгруппах классических групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор. Таким образом, перечисленные выше результаты являются – для классических случаев – очень широким обобщением результатов А. Бореля и Ж. Титса [9] и Г. Зейтца [10, 11], относившихся, соответственно, к алгебраически замкнутому и конечному основному полю. Чтобы взглянуть на проблему описания подгрупп редуктивных групп, содержащих максимальный тор, в более широком контексте, читатель может обратиться к обзорам А. Е. Залесского [12, 13], А. С. Кондратьева [14] и автора [15]. Для конечного поля эта проблема почти исчерпывающим образом рассмотрена Г. Зейтцем [10, 11, 16–18]; ситуация для бесконечного поля (а тем более для колец) значительно менее ясна, здесь изучен лишь случай расщепимого тора (см. по этому поводу [15, 19] и содержащиеся там ссылки).

Как и в работах [1, 2], мы пользуемся языком сетей и сетевых подгрупп, введенным в линейном случае З. И. Боревичем [3, 4, 20–23] и примененным затем к другим типам групп его учениками [7, 24–26]. Употребляемые нами обозначения большей частью стандартны и совпадают с обозначениями, использовавшимися в [1, 2, 15, 27, 28]. Для удобства читателя наиболее важные из них напоминаются в §1.

§1. Формулировка основного результата

Напомним определение расщепимых ортогональных групп, некоторых их элементов и подгрупп. Пусть R – коммутативное кольцо, R^* – его мультипликативная группа, $G = GL(n, R)$ – полная линейная группа степени n над R. Как обычно, для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j), т.е. $a = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная. Нам будет удобно следуя [29] положить $l = [n/2]$ и занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$, если $n = 2l$ четно, и $1, \dots, l, 0, -l, \dots, -1$, если $n = 2l + 1$ нечетно.

Обозначим через $\mathrm{sdiag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ матрицу, у которой на побочной диагонали стоят $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и нули во всех остальных местах, и положим $f = f_n = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1)$, где число 1 равняется n. Иначе говоря, элементы матрицы $f = (f_{ij})$ определяются условием $f_{ij} = \delta_{i,-j}$. Определим теперь для нечетного $n = 2l + 1$ матрицу $F = F_n$ следующим образом: $F = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$, где каждая серия 1 состоит из l членов. Иначе говоря, F_{2l+1} это клеточная матрица, у которой по побочной диагонали идут клетки $f_l, 2, f_l$, а все остальные клетки нулевые.

Ниже мы всюду предполагаем, что $2 \in R^*$ (см. по этому поводу [2], §1). В этом случае расщепимые ортогональные группы $\Gamma = SO(n, R)$ состоят из тех матриц a из специальной линейной группы $SL(n, R)$, которые сохраняют билинейную форму с матрицей Грама g, совпадающей с f_{2l} или F_{2l+1}, в зависимости от четности n. Иными словами, $SO(2l, R)$ и $SO(2l + 1, R)$ состоят из тех матриц $a \in G$, для которых $\det a = 1$ и $aga^t = g$, где $g = f_{2l}$ или F_{2l+1} соответственно. Таким образом, группа $SO(n, R)$ сохраняет квадратичную форму $x_1x_{-1} + \dots + x_lx_{-l}$, если n четно, и форму $x_0^2 + x_1x_{-1} + \dots + x_lx_{-l}$, если n нечетно. Кроме специальных рассматриваются также полные группы, сохраняющие соответствующую форму в смысле подобия. Иначе говоря, $GO(2l, R)$ и $GO(2l + 1, R)$ состоят из тех матриц $a \in G$, для которых $aga^t = \lambda g$ при подходящем мультипликаторе $\lambda \in R^*$, где, как и выше, $g = f_{2l}$ или F_{2l+1} соответственно. Имеют место хорошо известные изоморфизмы (см. [30–32]):

$$SO(3, R) \cong GL(2, R)/\{\pm e\},$$
$$SO(4, R) \cong (GL(2, R) \times GL(2, R))/\{\pm e\},$$
$$SO(5, R) \cong GSp(4, R)/\{\pm e\},$$
$$SO(6, R) \cong GL(4, R)/\{\pm e\},$$

которые показывают, что на самом деле ортогональные группы отвечают не обычным, а расширенным группам других серий. С точки зрения теории алгебраических групп $SO(n, R)$ является группой Шевалле типа D_l, если $n = 2l$ четно, и типа B_l, если $n = 2l + 1$ нечетно (теорема Ри-Дьедонне). Очень подробное изложение этого круга вопросов содержится в докладе [33].

Как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой на месте (i, j) стоит 1 и нули на всех остальных местах. Для $\varepsilon \in R^*$ и $i \neq j$ положим $d_{ij}(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj}$. Тогда группа $T = T(n, R)$

диагональных матриц, содержащихся в $\Gamma = SO(n, R)$, порождается матрицами $D_i(\varepsilon) = d_{i,-i}(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in R^*$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Группа же $\bar{T} = \bar{T}(n, R)$ диагональных матриц, содержащихся в расширенной группе $\bar{\Gamma} = GO(n, R)$, порождается, кроме того, скалярными матрицами εe, $\varepsilon \in R^*$, в случае нечетного n, и матрицами вида $D(\varepsilon) = \mathrm{diag}(\varepsilon, \dots, \varepsilon, 1, \dots, 1)$, $\varepsilon \in R^*$ (число ε и число 1 равно l) в случае четного n.

Чтобы сформулировать основной результат, нам нужно еще напомнить определение сети идеалов и сетевой подгруппы (см. [20–23, 3, 4]). Таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, состоящая из идеалов σ_{ij} кольца R, называется D-сетью идеалов в R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ и $\sigma_{ii} = R$ для всех i, j, r. Так как другие сети не будут нам встречаться, мы часто будем опускать здесь префикс D. Каждой сети сопоставляется сетевая подгруппа $G(\sigma)$ в $G = GL(n, R)$, состоящая из всех матриц $a = (a_{ij}) \in G$, для которых $a_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\sigma_{ij}}$ при всех i, j. Сеть σ называется симплектической (см. [24, 25, 7]), если $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i}$ для всех i, j, и ортогональной (см. [26, 1, 2, 27]), если, кроме того,

$$\sigma_{i,-i} = \sum \sigma_{ij}\sigma_{j,-i}, \quad 1 \leqslant j \leqslant -1, j \neq \pm i,$$

для всех i. Ортогональная сеть σ задает ортогональную сетевую подгруппу $\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \cap \Gamma$ в группе $\Gamma = SO(n, R)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$ и $N_{\bar{\Gamma}}(\sigma)$ обозначаются нормализаторы $\Gamma(\sigma)$ в Γ и в $\bar{\Gamma} = GO(n, R)$ соответственно. В случае поля ортогональные D-сети идеалов отвечают замкнутым подмножествам корней в системах корней типа D_l или B_l в зависимости от четности n. Подробнее об этом см. [26, 34–37], где можно найти общее определение сети идеалов для произвольной системы корней Φ.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего результата, являющегося совместным обобщением теорем 1 и 2 статьи [2].

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное полулокальное кольцо такое, что $2 \in R^*$ и в каждом поле вычетов R содержится не менее 7 элементов. Тогда для любой подгруппы H группы $\Gamma = SO(n, R)$, содержащей группу $T = T(n, R)$ диагональных матриц, существует единственная ортогональная D-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов в R порядка n такая, что*

$$\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma).$$

Для случая, когда $n=2l$ четно, это в точности теорема 2 работы [2], поэтому нам осталось рассмотреть лишь случай, когда $n=2l+1$ нечетно. Наш метод будет состоять в сведении нечетномерного случая к четномерному. При этом нам будет удобно следовать тому же плану, что и в работах [5, 7, 38], т.е. рассматривать отдельно случай поля и случай подрадикальных групп. Как и в [2], из теоремы 1 сразу вытекает и описание подгрупп в $\bar{\Gamma}$, содержащих T.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *для любой подгруппы H в $\bar{\Gamma}=GO(n,R)$, содержащей $T=T(n,R)$, существует единственная ортогональная D-сеть σ идеалов в R порядка n такая, что*

$$\Gamma(\sigma)\leqslant H\leqslant N_{\Gamma}(\sigma).$$

Кроме того, из этой теоремы стандартным образом выводится и описание подгрупп в Γ, нормализуемых T. Чтобы сформулировать его, нам придется напомнить определение еще одной подгруппы, связанной с сетью. Как обычно, (элементарной) ортогональной трансвекцией называется одна из матриц $T_{ij}(\xi)$, $\xi\in R$, $i\neq\pm j$, вида

$$T_{ij}(\xi)=T_{-j,-i}(-\xi)=e+\xi e_{ij}-\xi e_{-j,-i},$$

если $i,j\neq 0$ (с точки зрения теории групп Шевалле это “длинный корневой элемент”), или

$$T_{i0}(\xi)=T_{0,-i}(-2\xi)=e+\xi e_{i0}-2\xi e_{0,-i}-\xi^2 e_{i,-i},$$

в противном случае (“короткий корневой элемент”). Разумеется, элементы второго типа могут возникать только если n нечетно. Соотношения между ортогональными трансвекциями являются частными случаями коммутационной формулы Шевалле (см. [29, 30]), в явном виде они приведены, например, в [2, 27]. Для ортогональной сети $\sigma=(\sigma_{ij})$ через $E_{\Gamma}(\sigma)$ обозначается соответствующая элементарная сетевая подгруппа, т.е. подгруппа в $\Gamma(\sigma)$, порожденная всеми элементарными ортогональными трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi\in\sigma_{ij}$, $i\neq\pm j$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *для любой подгруппы H в $\Gamma=SO(n,R)$, нормализуемой $T=T(n,R)$, существует единственная D-сеть σ такая, что*

$$E(\Gamma)\leqslant H\leqslant N_{\Gamma}(\sigma).$$

В связи с теоремой 1 возникает вопрос, когда две подгруппы в Γ, содержащие T, сопряжены в Γ? В случае, когда основное кольцо локально, мы в состоянии дать полный ответ на этот вопрос. Напомним, что подгруппа T группы Γ называется пронормальной в Γ, если для любого $x \in \Gamma$ подгруппы T и $T^x = x^{-1}Tx$ сопряжены уже в подгруппе $\langle T, T^* \rangle$, ими порожденной. Обозначим через W группу Вейля группы Γ. Таким образом, $W = W_n$ совпадает с $W(B_l)$, если $n = 2l+1$ нечетно, и с $W(D_l)$, если $n = 2l$ четно. Иначе говоря, W_{2l+1} – это октаэдральная группа Oct_l, состоящая из всех перестановок из симметрической группы S_{2l+1} (или, эквивалентно, из S_{2l}), коммутирующих со сменой знака, т.е. таких, что $w(-i) = -w(i)$ для всех i (напомним, что наши индексы всегда занумерованы так: $1, \dots, l, 0, -l, \dots, -1$). Группа же W_{2l} – это подгруппа индекса 2 октаэдральной группы $\mathrm{Oct}_l \leqslant S_{2l}$, состоящая из четных перестановок. Для перестановки $w \in W$ мы будем той же буквой обозначать и любую ортогональную мономиальную матрицу вида $\sum \varepsilon_i e_{w(i),j}$, где $\varepsilon_i \in R^*$. Так как рассматриваемые нами подгруппы содержат T, это не может привести к недоразумениям. Теперь мы в состоянии сформулировать второй основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть R – коммутативное локальное кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда подгруппа T пронормальна в Γ. Иными словами, если для двух подгрупп H и F в Γ, содержащих T, имеем $xHx^{-1} = F$ при некотором $x \in \Gamma$, то $x = wy$, где $y \in H$ и $w \in W$.*

Для случая поля эта теорема сформулирована в [2] и доказана в [39]. Для линейного и симплектического случаев аналогичный результат был получен ранее в работах автора и Е. В. Дыбковой [40, 7].

Теоремы 1 и 2 будут доказаны в §3, в §2 будет доказана играющая центральную роль в нашем подходе лемма об извлечении ортогональных трансвекций второго типа, не имевшая никаких аналогов в предшествующих работах.

2. Основная лемма об извлечении трансвекций

Содержание этого параграфа является ключом к редукции нечетномерного случая к четномерному. Приводимые ниже доказательства основаны на вычислениях с матрицами

$$h(\varepsilon)=\mathrm{diag}(\varepsilon,\dots,\varepsilon,1,\varepsilon^{-1},\dots,\varepsilon^{-1}),$$

являющимися произведениями $D_i(\varepsilon)$ по всем $1\leqslant i\leqslant l$. В этом отношении они довольно необычны: дело в том, что во всех без исключения предшествующих работах по этой тематике использовались либо микровесовые элементы (как, скажем, $D_i(\varepsilon)$ или $D(\varepsilon)$ в нашем случае), либо корневые полупростые элементы (как $D_{ij}(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)D_j(\varepsilon)$, $i\neq\pm j$). Элементы же $h(\varepsilon)$ не являются ни теми, ни другими.

Далее мы фиксируем обозначения предыдущего параграфа. В частности, R – коммутативное полулокальное кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы 1, $\Gamma=SO(n,R)$, $T=T(n,R)$, H – подгруппа в Γ, содержащая T. Пусть, далее, σ – ассоциированная с H сеть идеалов, т.е. наибольшая ортогональная сеть такая, что $\Gamma(\sigma)\leqslant H$ (см. [2], леммы 1 и 3). Напомним, что для $i\neq\pm j$ условие $\xi\in\sigma_{ij}$ эквивалентно тому, что элементарная ортогональная трансвекция $T_{ij}(\xi)$ принадлежит H, а идеалы $\sigma_{i,-i}$ определяются по идеалам σ_{ij}, $i\neq -j$, обычной формулой (см. §1).

Мы формулируем следующую лемму не в максимальной возможной общности (в ее условиях легко доказать, что $x_{ij}\in\sigma_{ij}$ при всех $i\leqslant 0$, $j\geqslant 0$), а доказываем лишь ровно то, что понадобится нам в лемме 2. Кроме того, аналог этой леммы справедлив и для матриц, у которых $x_{ij}=0$ для всех $i\leqslant 0$, $j\geqslant 0$, $(i,j)\neq(0,0)$ и мы будем этим пользоваться.

Лемма 1. *Если для некоторой матрицы $x=(x_{ij})\in H$ имеем $x_{ij}=0$ при всех $i\geqslant 0$, $j\leqslant 0$, $(i,j)\neq(0,0)$, то $x_{i0}\in\sigma_{i0}$ для всех $i\leqslant 0$ и $x_{0j}\in\sigma_{0j}$ для всех $j\geqslant 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $y=[x^{-1},h(\varepsilon^{-1})]$, где для матриц $x,y\in\Gamma$ через $[x,y]$, как обычно, обозначен их коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$. Матрица y нижняя унитреугольная и, следовательно, к ней можно применить лемму 4 работы [2] и заключить, что $y_{ij}\in\sigma_{ij}$ для всех $i\leqslant 0$ и $j\geqslant 0$. Вычисление показывает, что $y_{i0}=x_{i0}(\varepsilon-1)$ для $i\leqslant 0$ и $y_{0j}=x_{0j}(\varepsilon-1)$ для $j\geqslant 0$, и для завершения доказательства леммы осталось вспомнить, что из нашего условия на кольцо R вытекает, что найдется такое $\varepsilon\in R^*$, что $\varepsilon-1\in R^*$.

Сейчас мы переходим к самому важному и трудному среди всех вспомогательных утверждений настоящей работы. Обозначим через ε_i знак индекса i (т.е. $\varepsilon_i = 1$, если $i > 0$, и $\varepsilon_i = -1$, если $i < 0$). Напомним, что через $d_i(\varepsilon)$ для $\varepsilon \in R^*$ обозначается псевдоотражение $e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$.

Лемма 2. *Если для некоторой матрицы $x = (x_{ij}) \in H$ имеем $x_{00} \in R^*$, то $x_{i0} \in \sigma_{i0}$, $x_{0i} \in \sigma_{i0}$, $x_{0i} \in \sigma_{0i}$ для любого $i \neq 0$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$y = xh(-1)x^{-1} = -xd_0(-1)x^{-1},$$

принадлежащую H вместе с x. Имеем $y_{ij} = -\delta_{ij} + 2x_{i0}x'_{0j}$. Ясно, что $y^2 = e$ и, поэтому, $y_{ij} = y'_{ij} = y_{-j,-i}$ для всех $i, j \neq 0$. Фиксируем теперь $\varepsilon \in R^*$ такое, что $\varepsilon - 1 \in R^*$, и рассмотрим матрицу $z(\varepsilon) = yh(\varepsilon)y^{-1}$. Имеем

$$z(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}(\varepsilon - 1) + b_{ij}(\varepsilon^{-1} - 1),$$

где мы положили для краткости

$$a_{ij} = \sum y_{ir}y'_{rj}, \quad b_{ij} = \sum y_{i,-r}y'_{-rj}$$

(обе суммы берутся по $1 \leqslant r \leqslant l$). Ясно, что $b_{ij} = a_{-j,-i}$, и вычисление показывает, что $a_{ij} = x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - \mu_{ij})$, где $\lambda = \sum x'_{0r}x_{r0}$, $1 \leqslant r \leqslant l$, а μ_{ij} принимает следующие значения: 4, если $1 \leqslant i, j \leqslant l$; 2, если $i \geqslant 1$, $j \leqslant 0$ или $j \geqslant 1$, $i \leqslant 0$; и, наконец, 0, если $0 \leqslant i, j \leqslant -1$. Это значит, в частности, что если $i, j \neq 0$ таковы, что $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, то $a_{ij} = b_{ij}$. Таким образом, в этом случае

$$z(\varepsilon)_{ij} = a_{ij}(\varepsilon - 1)^2\varepsilon^{-1} = x_{i0}x'_{0j}(4\lambda - 2)(\varepsilon - 1)^2\varepsilon^{-1}.$$

Это значит, что если записать матрицу $z(\varepsilon)$ в клеточном виде в соответствии с разбиением $2l + 1 = l + 1 + l$, то в матрицах $z(\varepsilon)$ и $z(\eta)$ при любых $\varepsilon, \eta \in R^*$ таких, что $\varepsilon - 1$, $\eta - 1 \in R^*$, правые верхние и левые нижние углы пропорциональны. Более того, каждая из этих клеток является матрицей ранга 1.

Пусть теперь снова $i, j \neq 0$, но $\varepsilon_i = \varepsilon_j$. Опять непосредственное вычисление, использующее формулы для a_{ij} и b_{ij}, показывает, что

$$z(\varepsilon)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} + x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}(4\lambda(\varepsilon - 1) - 4\varepsilon), \ \varepsilon_i = 1, \\ \delta_{ij} + x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon - 1)\varepsilon^{-1}(4\lambda(\varepsilon - 1) + 4), \ \varepsilon_i = -1. \end{cases}$$

Таким образом, в матрицах $z(\varepsilon)$ и $z(\eta)$ (где ε и η такие же, как выше) левые верхние углы и правые нижние углы становятся пропорциональными после того, как мы вычтем из них единичную матрицу порядка l. Более того, каждая из этих клеток является матрицей вычета 1 (вычет матрицы x – это ранг матрицы $x-e$, см. [41]).

Наконец, аналогичное вычисление показывает, что

$$z(\varepsilon)_{i0}=\begin{cases} x_{i0}x'_{00}(\varepsilon-1)\varepsilon^{-1}((4\lambda-2)\varepsilon-4\lambda), \ \varepsilon_i=1,\\ x_{i0}x'_{00}(\varepsilon-1)\varepsilon^{-1}(-4\lambda\varepsilon+(4\lambda-2)), \ \varepsilon_i=-1.\end{cases}$$

При этом $z(\varepsilon)_{0i}=2z(\varepsilon)'_{i,0}=2z(\varepsilon^{-1})_{-i,0}$, т.е.

$$z(\varepsilon)_{0i}=\begin{cases} 2x_{00}x'_{0i}(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}((4\lambda-2)\varepsilon-4\lambda), \ \varepsilon_i=1,\\ 2x_{00}x'_{0i}(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}((4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon), \ \varepsilon_i=-1.\end{cases}$$

Будем теперь рассматривать матрицу $w=w(\varepsilon,\eta,\theta)=z(\varepsilon)h(\theta)$ $z(\eta^{-1})$. Сказанное выше о матрицах $z(\varepsilon)$ и $z(\eta)$ позволяет легко вычислить ее элементы. Вычислим вначале элементы w_{ij}, где $i,j\neq 0$, $\varepsilon_i\neq\varepsilon_j$. При этом для удобства будем вначале рассуждать так, как будто x_{i0} и x'_{0j} обратимы. Вскоре обратные к ним всюду сократятся, так что окончательный результат не зависит от этого предположения (на самом деле в $z(\eta)_{-j,0}$ и $z(\varepsilon)'_{0,-i}$ есть соответствующие множители, формально сокращающиеся с $x_{-j,0}$ и $x'_{0,-i}$, так что запись этих элементов в знаменателях в следующей формуле есть лишь несколько вольная манера выражения). Пусть вначале $\varepsilon_j=1$ и $\varepsilon_i=-1$. Заменяя кусок i-ой строки матрицы $z(\varepsilon)$ на пропорциональный кусок $(-j)$-ой строки матрицы $z(\eta)$ и, соответственно, кусок j-го столбца матрицы $z(\eta)^{-1}$ на пропорциональный кусок $(-i)$-го столбца матрицы $z(\varepsilon)^{-1}$, имеем

$$\sum z(\varepsilon)_{ik}z(\eta)'_{kj}=-\frac{1}{2}\,\frac{x_{i0}(\varepsilon-1)^2\eta}{x_{-j0}(\eta-1)^2\varepsilon}\,z(\eta)'_{0j},$$

$$\sum z(\varepsilon)_{i,-k}z(\eta)'_{-k,j}=-\frac{1}{2}\,\frac{x'_{0j}(\eta-1)^2\varepsilon}{x'_{0,-i}(\varepsilon-1)^2\eta}\,z(\varepsilon)_{i0}z(\varepsilon)'_{0,-i},$$

где суммирование, как обычно, производится по $1\leqslant k\leqslant l$. Таким образом,

$$w_{ij}=x_{i0}x'_{0j}(\varepsilon-1)(\eta-1)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}x_{00}x'_{00}f(\theta),$$

где $f(\theta)$ – следующий лорановский многочлен относительно θ с коэффициентами из $\mathbb{Z}[\varepsilon,\eta,\lambda]$:

$$f(\theta)=\theta(\varepsilon-1)(\eta-1)^{-1}((4\lambda-2)-4\lambda\eta)^2-2((4\lambda-2)-4\lambda\eta)((4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon)+$$

$$+\theta^{-1}(\eta-1)(\varepsilon-1)^{-1}((4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon)^2.$$

Дискриминант уравнения $f(\theta)=0$ равен 0 и, следовательно, если мы предположим дополнительно, что $(4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon$, $(4\lambda-2)-4\lambda\eta\in R^*$, то его единственный корень задается следующей формулой

$$\theta_0=\frac{((4\lambda-2)-4\lambda\varepsilon)(\eta-1)}{((4\lambda-2)-4\lambda\eta)(\varepsilon-1)}\in R^*.$$

Этот корень зависит не от самих i и j, а лишь от их знаков. Поскольку x_{i0} и x'_{0j} в выражение для θ не входят, а все предшествующие выкладки носят формальный характер, то, действительно, при $\theta=\theta_0$ имеем $w_{ij}=0$ для всех $1\leqslant j\leqslant l$ и $-l\leqslant i\leqslant -1$. Более того, для всех θ не сравнимых с θ_0 по модулю каждого максимального идеала m кольца R, коэффициент при $x_{i0}x'_{0j}$ в w_{ij} обратим.

Перейдем теперь к рассмотрению коэффициентов w_{i0} и w_{0j} матрицы w при тех же условиях на i и j, т.е. $\varepsilon_j=1$ и $\varepsilon_i=-1$. Если $R=K$ – поле, то из условия ортогональности матрицы w сразу следует, что если из каждой пары элементов w_{pj}, $w_{p,-j}$ строки с номером $p\neq 0$ хотя бы один равен 0, то и $w_{p0}=0$. Аналогичный факт имеет место для столбцов. Это значит, что в матрице $w=w(\varepsilon,\eta,\theta_0)$ в случае поля имеем $w_{i0}=0$ для $-l\leqslant i\leqslant -1$ и $w_{0j}=0$ для $1\leqslant j\leqslant l$. Иначе говоря, эта матрица принадлежит собственной параболической подгруппе, фигурирующей в лемме 1. Мы хотим проверить, что аналогичное утверждение справедливо и для колец. Для этого проведем следующее рассуждение: подставим вместо θ_0 его выражение через ε,η и λ. Тогда

$$w_{i0}=x_{i0}x'_{00}\varepsilon^{-1}\eta^{-1}((\eta\lambda-2)-4\lambda\varepsilon)^{-1}g(\varepsilon,\eta,\lambda),$$

где g – некоторый многочлен от ε,η,λ с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. Так как для любого поля многочлен g тождественно равен 0, то равен 0 формально, т.е. все его коэффициенты нулевые. Поэтому $w_{i0}=0$ для любого $-l\leqslant i\leqslant -1$. Аналогично проверяется и то, что $w_{0j}=0$ для $1\leqslant j\leqslant l$. Но ведь равенства $w_{i0}=0$ и w_{0j} представляют собой при фиксированных ε и η квадратные уравнения относительно θ с обратимыми коэффициентами. Как мы только что показали, θ_0 является кратным корнем этого уравнения. Это значит, что если образы θ и θ_0 в каждом поле вычетов кольца R различны, то коэффициент при x_{i0} в w_{i0} обратим.

Проводя аналогичные вычисления для $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = -1$, мы получим точно такую же формулу для w_{ij}, как выше, но только θ и θ^{-1} в ней нужно поменять местами. Это значит, что для того, чтобы коэффициент при $x_{i0}x'_{0j}$ в w_{ij} (а вместе с тем, как мы знаем из предшествующего, и соответствующие коэффициенты при x_{i0} в w_{i0} и x_{0j} в w_{0j}) для матрицы $w = w(\varepsilon, \eta, \theta)$ не был обратим, необходимо и достаточно, чтобы для какого-то максимального идеала m кольца R выполнялось сравнение $\theta \equiv \theta_0^{-1} \pmod{m}$. Вернемся к рассмотрению матрицы $w = w(\varepsilon, \eta, \theta_0)$. Как мы знаем, для нее $w_{ij} = 0$ при $\varepsilon_x \geqslant 0$, $\varepsilon_j \leqslant 0$, $(i,j) \neq (0,0)$, и поэтому по лемме 1 имеем $w_{i0} \in \sigma_{i0}$ при $\varepsilon_i = 1$ и $w_{0j} \in \sigma_{0j}$ при $\varepsilon_j = -1$. По доказанному выше коэффициенты при x_{i0} в w_{i0} и при x_{0j} в w_{oj} обратимы, если образы θ_0 и θ_0^{-1} в каждом поле вычетов различны. Но ведь равенство $\theta_0 = \theta_0^{-1}$ для случая поля означает, что $\theta_0 = 1$ или $\theta_0 = -1$, а каждое из этих равенств есть (при фиксированном η) линейное уравнение относительно ε. Это значит, что запрещая в каждом поле вычетов кольца R для образов ε и η значения 0, 1 и $(2\lambda-1)/2\lambda$ (если образ λ обратим) и, кроме того, еще не более двух значений для образа ε, мы можем считать, что эти коэффициенты действительно обратимы. Всем этим условиям мы можем удовлетворить, так как каждое поле вычетов содержит не менее 7 элементов (если λ лежит в радикале Джекобсона кольца R, то достаточно даже требовать, чтобы все поля вычетов содержали не менее 5 элементов). Это значит, что, действительно, $x_{i0} \in \sigma_{i0}$ при $\varepsilon_i = 1$ и $x_{0j} \in \sigma_{0j}$ при $\varepsilon_j = -1$. Проводя точно такое же рассуждение для матрицы $w = w(\varepsilon, \eta, \theta_0^{-1})$, убеждаемся, что $x_{i0} \in \sigma_{i0}$ при $\varepsilon_i = 1$ и $x_{0j} \in \sigma_{0j}$ при $\varepsilon_j = -1$. Лемма полностью доказана.

На самом деле фактически (с учетом замечания перед формулировкой леммы 1) в доказательстве этой леммы установлено, что $x_{i0}x'_{0j} \in \sigma_{ij}$, если $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, но нам в дальнейшем это не понадобится. Лемма 2 представляет собой душу всего доказательства, все последующие рассуждения имеют в значительной степени рутинный характер и уже встречались для других групп в работах [4, 5, 7, 38].

3. Окончание доказательства

Здесь мы завершим доказательство теорем 1 и 2. Все обозначения и соглашения предшествующих параграфов остаются в силе.

1°. Случай поля. Сейчас мы передокажем теорему 1 работы [2], понизив при этом границу на число элементов поля K с 13 до 7. Напомним, что в случае поля подгруппа $EO(n, K)$, порожденная всеми элементарными ортогональными трансвекциями, совпадает с известной группой $\Omega(n, K)$ – "ядром спинорной нормы" (см. [31, 32]). Итак, пусть H – подгруппа в $\Gamma = SO(n, K)$, содержащая T, и σ – ассоциированная с ней сеть. Мы хотим показать, что $H \leqslant N_\Gamma(\sigma)$. Начнем со следующего частичного результата.

Лемма 3. *Пусть $x \in H$ – такая матрица, что $x_{00} \neq 0$. Тогда $x \in N_\Gamma(\sigma)$.*

Доказательство. Лемма 2 утверждает, что для такой матрицы x имеем $x_{i0} \in \sigma_{i0}$ при всех $i \neq 0$ и, таким образом, имеет место следующая альтернатива: либо $x_{i0} = 0$, либо $\sigma_{i0} = K$. Разобьем множество индексов $I = \{1, \dots, -1\}$ на два непересекающихся подмножества следующим образом: пусть в I_1 входят те индексы i, для которых хотя бы один из элементов x_{i0}, x_{-i0} равен 0, а в I_2 – те i, для которых x_{i0}, $x_{-i0} \neq 0$ (в частности, $0 \in I_2$). Совершенно ясно, что умножая x слева на принадлежащие $E_\Gamma(\sigma)$ трансвекции $T_{i0}(-x_{i0}x_{00}^{-1})$, $i \in I_1$, мы получим матрицу y, принадлежащую или не принадлежащую $N_\Gamma(\sigma)$ вместе с x. Это значит, что мы с самого начала можем считать, что $x_{i0} = 0$ для всех $i \in I_1$. Посмотрим теперь на столбец, составленный из x_{i0}, где $i \in I_2$. Этот столбец является нулевым столбцом ортогональной матрицы порядка $|I_2| = 2m + 1$. Вспомним, что $\sigma_{i0} = \sigma_{-i0} = K$ для всех $i \in I_2$. Это значит, что в $E_\Gamma(\sigma)$ содержится подгруппа, порожденная всеми элементарными ортогональными трансвекциями вида $T_{i0}(\xi)$, $i \in I_2 \setminus \{0\}$, $\xi \in K$. Так как $\mathrm{char} K \neq 2$, то эта подгруппа содержит также все элементарные ортогональные трансвекции вида $T_{ij}(\xi)$, $i, j \in I_2$, $i \neq \pm j$, $i, j \neq 0$, $\xi \in K$, и изоморфна, таким образом, группе $\Omega(2m + 1, K)$, вложенной в Γ на строки и столбцы с номерами из I_2. Так как группа $\Omega(2m + 1, K)$ действует транзитивно на множестве тех строк длины $2m+1$, которые могут быть нулевой строкой ортогональной матрицы, то заменяя x на подходящую матрицу из $xE_\Gamma(\sigma)$, мы можем считать, что в нулевом столбце матрицы x все недиагональные элементы нулевые. Но тогда в силу ортогональности и в нулевой строке матрицы x все недиагональные элементы нулевые, т.е. x принадлежит $SO(2l, K)$. Так как для четномерной ортогональной группы аналогичная теорема уже доказана, то $x \in N_\Gamma(\sigma)$.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство теоремы 1 для случая поля. В самом деле, пусть x – произвольная матрица из H. Возьмем $\varepsilon \neq 0, 1$ и рассмотрим матрицу $y(\varepsilon) = xD_\Gamma(\varepsilon)x^{-1} \in H$. Условие $y(\varepsilon)_{00} = 0$ является квадратным уравнением относительно ε и, следовательно, имеет в поле K не более двух корней. Это значит, что все $y(\varepsilon)$, кроме, быть может, двух, принадлежат $N_\Gamma(\sigma)$. Но ведь тогда и эти оставшиеся две матрицы $y(\varepsilon)$ также принадлежат $N_\Gamma(\sigma)$. Действительно, представим ε в виде $\varepsilon = \theta(\varepsilon\theta^{-1})$. Тогда $y(\varepsilon) = y(\theta)y(\varepsilon\theta^{-1})$. Теперь равенства $y(\theta)_{00} = 0$ и $y(\varepsilon\theta^{-1})_{00} = 0$ накладывают на θ не более четырех запретов и, следовательно, так как поле K содержит не менее 7 элементов, найдется такое $\theta \neq 0, 1$, что $y(\theta)$, $y(\varepsilon\theta^{-1}) \in N_\Gamma(\sigma)$. Но тогда и $y(\varepsilon) \in N_\Gamma(\sigma)$. Это значит, что все матрицы $y(\varepsilon) = xD_\Gamma(\varepsilon)x^{-1}$, $\varepsilon \neq 0$, содержатся в $N_\Gamma(\sigma)$. Теперь ссылка на теорему связности из [39] показывает, что тогда на самом деле $y(\varepsilon) \in \Gamma(\sigma)$ для всех $\varepsilon \neq 0$ и, значит,

$$y(\varepsilon)_{ij} = x_{ir}x'_{rj}(\varepsilon - 1) + x_{i,-r}x'_{-rj}(\varepsilon^{-1} - 1) \in \sigma_{ij}$$

для всех i, j, т.е. $x_{ir}x'_{rj} \in \sigma_{ij}$, что по лемме 2 работы [2] и означает, что $x \in N_\Gamma(\sigma)$. Впрочем, можно рассуждать и непосредственно, не обращаясь к трудной теореме связности. Именно, возьмем ε такое, что $y(\varepsilon)'_{jj} \neq 0$ (это запрещает не более двух значений ε). Тогда включение $y(\varepsilon)_{ij}y(\varepsilon)'_{jj} \in \sigma_{ij}$ равносильно включению $y(\varepsilon)_{ij} \in \sigma_{ij}$. Так как $|K| \geqslant 7$, то найдутся два различных значения $\varepsilon \neq 0, 1$, не являющихся корнями уравнения $y(\varepsilon)'_{jj} = 0$. Подставляя эти значения и расписывая $y(\varepsilon)_{ij}$ через коэффициенты матриц x и x^{-1}, мы получим систему сравнений такого типа, как система (7) работы [2]. То же рассуждение, что и в лемме 2 этой работы показывает, что тогда $x_{ir}x'_{rj}x_{i,-r}x'_{-rj} \in \sigma_{ij}$ и, окончательно, $x \in N_\Gamma(\sigma)$. Это и завершает доказательство теоремы 1 для случая поля.

2°. Случай прямой суммы полей. Фактически мы будем использовать следующую лемму только для той ситуации, когда все слагаемые являются полями, но в доказательстве ничего не меняется и для общего случая. Напомним, что такое описание промежуточных подгрупп, как в теореме 1 называется стандартным.

Лемма 4. *Пусть для каждого из колец* $R_1, \dots, R_m$ *в* $\Gamma_i = SO(n, R_i)$ *имеет место стандартное описание подгрупп, содержащих группу диагональных матриц. Тогда в группе* $\Gamma = SO(n, R)$ *для кольца* $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$ *также имеет место стандартное описание таких подгрупп.*

Доказательство. Сделаем вначале несколько замечаний общего характера. Группа Γ естественным образом раскладывается в произведение подгрупп Γ_i:

$$SO(n, R) = SO(n, R_1) \times \dots \times SO(n, R_m).$$

Через Ψ_q обозначим проекцию Γ на прямой сомножитель Γ_q. Как известно (см. [4]), каждая сеть σ идеалов кольца R представляется в виде прямой суммы своих компонент $\sigma = \sigma^{(1)} \oplus \dots \oplus \sigma^{(m)}$, причем если сеть σ ортогональная, то и все компоненты ортогональные, и мы имеем разложения

$$\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma^{(1)}) \times \dots \times \Gamma(\sigma^{(m)}), \quad N_\Gamma(\sigma) = N_\Gamma(\sigma^{(1)}) \times \dots \times N_\Gamma(\sigma^{(m)}).$$

Пусть H – подгруппа в Γ, содержащая T. Тогда $H_q = \Psi_q(H)$ – подгруппы в Γ_q, содержащие $T_q = T(n, R_q)$ и, по предположению существует единственная ортогональная сеть $\tau^{(q)}$ нужного порядка над R_q такая, что $\Gamma(\tau^{(q)}) \leqslant H_q \leqslant N_\Gamma(\tau^{(q)})$, где $q = 1, \dots, m$. Пусть, с другой стороны, σ – сеть идеалов, ассоциированная с H. Очевидно, что $\sigma^{(q)} \leqslant \tau^{(q)}$. Покажем, что на самом деле $\sigma^{(q)} = \tau^{(q)}$. Пусть $\alpha \in \tau_{ij}^{(q)}$. Тогда $T_{ij}(\alpha) \in H$, и поэтому для некоторых матриц $a_1, \dots, a_{q-1}, a_{q+1}, \dots, a_m$ из $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q-1}, \Gamma_{q+1}, \dots, \Gamma_m$ матрица $a = (a_1, \dots, a_{q-1}, T_{ij}(\alpha), a_{q+1}, \dots, a_m)$ принадлежит H. Положив $d = (e, \dots, e, D_j(\theta), e, \dots, e)$, получим

$$[a, d] = (e, \dots, e, T_{ij}((1-\theta)\alpha), e_1, \dots, e) \in H,$$

где, заменяя $T_{i0}(\alpha)$ на $T_{0,-i}(-2\alpha)$, мы считаем, что $j \neq 0$. Это дает равенство сетей $\sigma^{(q)}$ и $\tau^{(q)}$, а значит, и следующие включения:

$$\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant H_1 \times \dots \times H_m \leqslant N_\Gamma(\sigma^{(1)}) \times \dots \times N_\Gamma(\sigma^{(m)}) = N_\Gamma(\sigma).$$

Лемма доказана.

3°. Подрадикальные подгруппы. Сейчас мы докажем теорему 1 еще для одного важного частного случая. Пусть J – радикал Джекобсона кольца R. Обозначим через $B_\Gamma(n,R,J)$ подгруппу в Γ, состоящую из тех матриц $a=(a_{ij})\in\Gamma$, для которых $a_{ij}\in J$ при всех $i>j$. Подгруппы, содержащиеся в $B_\Gamma(n,R,J)$, будут называться подрадикальными. Будем говорить, что в Γ имеет место стандартное описание подрадикальных подгрупп, содержащих T, если для любой такой подгруппы H найдется единственная ортогональная D-сеть идеалов σ такая, что $H=\Gamma(\sigma)$. Разумеется, все возникающие здесь сети сами являются подрадикальными (т.е. $\sigma_{ij}\subseteq J$ для всех $i>j$).

Для доказательства основного результата о подрадикальных подгруппах нам понадобится еще разложение типа Гаусса, доказанное в [26] (по поводу предшествующих результатов такого типа см. [20, 24]). Именно, для сети σ обозначим через $U_\Gamma(\sigma)$ и $V_\Gamma(\sigma)$ соответственно пересечения сетевой подгруппы с группами U_Γ и V_Γ верхних и нижних унитреугольных матриц, содержащихся в Γ. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 2 работы [26], II.

Лемма 5. *Если σ – подрадикальная ортогональная D-сеть, то $\Gamma(\sigma)=V_\Gamma(\sigma)TU_\Gamma(\sigma)$.*

Как обычно, через Γ_J обозначается главная конгруэнц-подгруппа в Γ уровня J, т.е. ядро естественной проекции $SO(n,R)\to SO(n,R/J)$. Иными словами, Γ_J состоит из тех матриц $a=(a_{ij})\in\Gamma$, для которых $a_{ij}\equiv\delta_{ij}\pmod J$ при всех i,j. Обозначим еще через $V_\Gamma(J)$ пересечение V_Γ с Γ_J. Тогда лемма 5 в применении к самой группе $B_\Gamma(n,R,J)$ дает разложение $B_\Gamma(n,R,J)=V_\Gamma(J)TU_\Gamma$. Теперь у нас все готово для доказательства следующего результата.

Предложение 1. *Пусть R – коммутативное полулокальное кольцо такое, что $2\in R^*$ и в каждом поле вычетов R содержится не менее 5 элементов. Тогда в Γ имеет место стандартное описание подрадикальных подгрупп, содержащих T.*

Доказательство. Мы хотим доказать, что если $x\in H$, то на самом деле $x\in\Gamma(\sigma)$, где σ – ассоциированная с H сеть. Для этого представим x в виде $x=vdu$, где $v\in V_\Gamma(J)$, $d\in T$, $u\in U_\Gamma$. Так как матрица x подрадикальная, то $x_{00}\in R^*$ и, следовательно, мы можем применить к x лемму 2 и заключить, что $x_{i0},x'_{i0}\in\sigma_{i0}$. Проведем теперь несложную индукцию, показывающую, что, умножая x на подходящую матрицу из $E_\Gamma(\sigma)$, можно считать, что $x_{i0} = 0$ для всех $i \neq 0$. В самом деле, коэффициенты v_{01} и u_{10} лишь на множитель из R^* отличаются от x_{01} и x_{10} и, следовательно, принадлежат σ_{01} и σ_{10} соответственно. Умножая матрицу слева на $T_{01}(-v_{01})$ и справа на $T_{10}(-u_{10})$, можно считать, что $x_{10} = x_{01} = 0$. Пусть теперь x – такая матрица из H, что $x_{10} = \ldots = x_{r-1,0} = 0$ и $x_{01} = \ldots = x_{0,r-1} = 0$. Тогда коэффициенты v_{0r} и u_{r0} лишь на множитель из R^* отличаются от x_{0r} и $r0$ и, следовательно, принадлежат σ_{0r} и σ_{r0} соответственно. Умножая x слева на $T_{0r}(-v_{0r})$ и справа на $T_{r0}(-u_{r0})$, можно считать, что и $x_{r0} = x_{0r} = 0$. Завершив этот процесс, мы получим матрицу y из $E_\Gamma(\sigma)xE_\Gamma(\sigma)$, у которой в нулевой строке и нулевом столбце все недиагональные элементы нулевые.

Итак, предшествующее рассуждение свело доказательство предложения для нечетномерного случая к четномерному. Если все поля вычетов кольца R содержат не менее 7 элементов, то для четномерного случая предложение сразу вытекает из теоремы 2 работы [2]. Осталось заметить, что в случае подрадикальных подгрупп доказательство этой теоремы продолжает оставаться верным и при наличии полей вычетов из пяти элементов, что связано с тем, что обратимость диагональных коэффициентов матриц из $B_\Gamma(n, R, J)$ имеет место автоматически и не накладывает никаких дополнительных ограничений на параметры. Так, в доказательстве леммы 8 не нужно требовать, чтобы $1 + \theta x$ и $1 + \eta x$ были обратимы, также и собственно в самом доказательстве теоремы 2 обратимость c'_{jj} не накладывает дополнительных ограничений на ε. Это завершает доказательство предложения в полном объеме.

4°. Окончание доказательства теоремы 1. Наряду с сетью будем рассматривать соответствующую надрадикальную сеть σ^*, определенную равенствами $\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} + J$. Хотя следующие две леммы справедливы для любых коммутативных колец, с целью некоторого упрощения доказательств мы ограничимся случаем полулокальных колец, тем более, что только для этого случая мы будем их использовать.

Лемма 6. *Пусть R – коммутативное полулокальное кольцо такое, что $2 \in R^*$, а σ – ортогональная D-сеть идеалов над R. Тогда* $\Gamma(\sigma^*) = \Gamma(\sigma)\Gamma_J$.

Доказательство. Следующие включения очевидны: $E_\Gamma(\sigma^*)T \leqslant \Gamma(\sigma)\Gamma_J \leqslant \Gamma(\sigma^*)$. Осталось сослаться на лемму 3 работы [2].

Лемма 7. *В условиях леммы* 6 *имеем* $\Gamma(\sigma^*) \cap N_\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma)$.

Доказательство. Любую матрицу $a \in \Gamma(\sigma^*) \cap N_\Gamma(\sigma)$ можно по предыдущей лемме представить в виде $a = bc$, где $b \in \Gamma(\sigma)$, $c \in \Gamma_J$. Следовательно, $c \in N_\Gamma(\sigma) \cap \Gamma_J$ и, значит, по лемме 1 работы [2] имеем $c_{ij}c'_{jj} \in \sigma_{ij}$ при всех i, j. Осталось заметить, что c'_{jj} сравним с 1 по модулю J и, следовательно, обратим, т.е. $c_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех i, j и, значит, $a \in \Gamma(\sigma)$.

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Пусть H – подгруппа в Γ, содержащая T. Так как над радикалом по 1°, 2° уже имеется стандартное описание, то найдется единственная сеть идеалов τ такая, что $\Gamma(\tau) \leqslant H\Gamma_J \leqslant N_\Gamma(\tau)$. Покажем, что на самом деле $\tau = \sigma^*$, где σ – сеть, ассоциированная с H. Ясно, что $\sigma^* \leqslant \tau$. Обратно, пусть $\alpha \in \tau_{ij}$. Тогда $T_{ij}(\alpha) \in H\Gamma_J$ или, что то же самое, найдется $c \in \Gamma_J$ такая, что $cT_{ij}(\alpha) \in H$. Ясно, что $T_{ij}(\alpha)$ принадлежит либо $H \cap B_\Gamma(n, R, J)$, либо $H \cap fB_\Gamma(n, R, J)f^{-1}$, где $f = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1)$ – та же матрица, что и в §1. В силу стандартности описания подрадикальных подгрупп, доказанной в 3°, это означает, что $cT_{ij}(\alpha) \in \Gamma(\sigma)$. Но ведь это и значит, что $\alpha \in \sigma^*_{ij}$. Таким образом, если a – произвольная матрица из H, то $a\Gamma(\sigma)a^{-1} \leqslant \Gamma(\sigma^*) \leqslant \Gamma(\sigma)\Gamma_J$. Значит для любого $b \in \Gamma(\sigma)$ имеем $aba^{-1} = cg$, где $c \in \Gamma(\sigma)$ и $g \in \Gamma_J$. Но $g = c^{-1}aba^{-1} \in \Gamma_J \cap H \leqslant B_\Gamma(n, R, J) \cap H$, откуда $g \in \Gamma(\sigma)$, т.е. $a \in N_\Gamma(\sigma)$, что и завершает доказательство.

5°. Подгруппы, нормализуемые диагональю. Совершенно ясно, что следствие 2 сразу вытекает из теоремы 1 и следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 8. *Пусть в коммутативном кольце* R *найдется такой обратимый элемент* θ, *что* $\theta^2 - 1$ *также обратим. Если подгруппа* H *в* Γ *нормализуется* T_Γ, *то всякая элементарная ортогональная трансвекция, принадлежащая* HT_Γ, *принадлежит уже* H.

Доказательство. Пусть $T_{ij}(\alpha) = ad$, где $\alpha \in R$, $a \in H$, $d \in T$ и $i \neq j$. По крайней мере один из индексов i, j отличен от нуля. Пусть, скажем, $i \neq 0$. Тогда $D_i(\theta)T_{ij}(\alpha)D_i(\theta)^{-1} = T_{ij}(\theta\alpha)$, а $b = D_i(\theta)aD_i(\theta^{-1})$ принадлежит H. Поэтому $T_{ij}((\theta - 1)\alpha) = ba^{-1} \in H$ и, следовательно, $T_{ij}(\alpha) \in H$.

6°. Доказательство теоремы 2. Сейчас мы сведем теорему 2 к результатам работы [39], относившимся к случаю поля. Докажем вначале вспомогательный результат, относящийся к сопряженности сетевых подгрупп.

Лемма 9. *Пусть R – локальное кольцо такое, что $2 \in R^*$ и его поле вычетов R/J отлично от $\mathbb{F}_3$. Тогда если σ и τ – две ортогональные D-сети и $x\Gamma(\sigma)x^{-1} = \Gamma(\tau)$ для некоторого $x \in \Gamma$, то $x = yw$ для подходящих $y \in \Gamma(\tau)$ и $w \in W$.*

Доказательство. Для полей это известная теорема Титса [42]. Пусть теперь $x\Gamma(\sigma)x^{-1} = \Gamma(\tau)$. Так как утверждение леммы для полей справедливо, то $x = yw$ для некоторых $y \in \Gamma(\tau^*)$ и $w \in W$. По лемме 6 матрицу y можно представить в виде $y = zg$, где $z \in \Gamma(\tau)$, а $g \in \Gamma_J$. Тогда $g\Gamma(\sigma^w)g^{-1} = \Gamma(\tau)$, где σ^w – сеть подобная сети σ, входящие в которую идеалы определяются формулой $(\sigma^w)_{ij} = \sigma_{w(i),w(j)}$. Теперь по лемме 2 работы [2] имеем $g_{ij}g'_{jj} \in \tau_{ij}$, откуда так же, как в доказательстве леммы 7, вытекает, что $g_{ij} \in \tau_{ij}$ для всех i, j. Это значит, что $g \in \Gamma(\tau)$ и, окончательно, $y \in \Gamma(\tau)$.

Введем еще несколько обозначений. Для сети идеалов σ в R через $\bar{\sigma}$ обозначим сеть идеалов в $\bar{R} = R/J$, определенную формулами $\bar{\sigma}_{ij} = (\sigma_{ij} + J)/J$. Аналогично, через $\bar{x}$ для $x \in \Gamma$ обозначается образ x в $\bar{\Gamma} = SO(n, R/J)$ относительно канонической проекции $\Gamma \to \bar{\Gamma}$, а через $\bar{H}$ для подгруппы $H \leqslant \Gamma$ обозначается подгруппа $H\Gamma_J/\Gamma_J \leqslant \bar{\Gamma}$.

Пусть теперь F и H – две содержащие T подгруппы в Γ. Согласно теореме 1 найдутся такие ортогональные D-сети идеалов в R, что $\Gamma(\sigma) \leqslant F \leqslant N_\Gamma(\sigma)$, $\Gamma(\tau) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\tau)$. Если $xFx^{-1} = H$ для некоторого $x \in \Gamma$, то $\bar{x}\bar{F}\bar{x}^{-1} = \overline{H}$. Так как, кроме того, $\Gamma(\bar{\sigma}) \leqslant \bar{F} \leqslant N_\Gamma(\bar{\sigma})$ и $\Gamma(\bar{\tau}) \leqslant \bar{H} \leqslant N_\Gamma(\bar{\tau})$, то по следствию 1 из теоремы 1 работы [39] можно представить $\bar{x}$ в виде $\bar{x} = \bar{y}w$ для подходящих $y \in \Gamma(\tau)$ и $w \in W$. В частности, $\bar{x}\Gamma(\bar{\sigma})\bar{x}^{-1} = \Gamma(\bar{\tau})$ и, значит, $x\Gamma(\sigma)x^{-1} \leqslant \Gamma(\tau^*)$. Но ведь, кроме того, $x\Gamma(\sigma)x^{-1} \leqslant xFx^{-1} \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\tau)$ и, учитывая лемму 7, имеем $x\Gamma(\sigma)x^{-1} \leqslant \Gamma(\tau^*) \cap N_\Gamma(\tau) \leqslant \Gamma(\tau)$. Но, отправляясь от равенства $x^{-1}Hx = F$, мы могли бы точно так же доказать включение $x^{-1}\Gamma(\tau) \leqslant x\Gamma(\sigma)$. Поэтому $x\Gamma(\sigma)x^{-1} = \Gamma(\sigma)$, и для завершения доказательства теоремы 2 нам осталось сослаться на лемму 9.

7°. Заключительные замечания. Как уже было сказано во введении, настоящая работа завершает описание подгрупп расширенных классических групп Шевалле над полулокальными кольцами, содержащих расщепимый максимальный тор. Однако для обычных групп Шевалле этот вопрос продолжает оставаться открытым. Все существующие методы позволяют рассматривать лишь группы над полями, и сегодня нет никаких подходов к решению аналогичной задачи для сколь-нибудь общих полулокальных колец даже в случае SL_n, не говоря уже об Sp_{2l} или $Spin_n$. Единственный имеющийся в этом направлении результат относится к кольцам дискретного нормирования [43].

В конце работы [2] была дана геометрическая переформулировка основного результата статьи [44] для ортогонального случая. Там же обсуждается связь этого результата с работами О. Кинга, посвященными максимальности подгрупп из классов Ашбахера C_1, C_2 (см. [45–47]). Кроме трех цитированных в [2] работ этой задаче посвящены также следующие статьи О. Кинга и Р. Дая [48–51]. Для расщепимого случая их результаты также почти полностью (кроме совсем маленьких полей и размерностей) вытекают из нашей теоремы 1 и теоремы 1 работы [27]. Заметим, впрочем, что почти полный ответ на вопрос о максимальности подгрупп из классов Ашбахера C_1, C_2 вытекает также и из завершенной Ли Шанчжы [52–54] классификации неприводимых подгрупп ортогональных групп, порожденных корневыми унипотентными подгруппами (ссылки на предшествующие публикации Б. Старк и У. Кантора, относящиеся к этой задаче, можно найти в [27]). Осталось лишь добавить, что по модулю классификации конечных простых групп вопрос о максимальности всех подгрупп из классов Ашбахера C_1–C_8 для конечного основного поля полностью решен П. Клейдманом и М. Либеком [47, 55].

Литература

1. N. A. Vavilov, *Subgroups of split orthogonal groups in even dimensions*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. Math., **29**, No. 9–10 (1981), 425–429.
2. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп*. Сиб. мат. журн., **29**, No. 3 (1988), 12–25.
3. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **64** (1976), 12–29.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц*. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **148** (1978), 43–57.

5. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц*. Вестн. ЛГУ, No. 1 (1981), 10–15.
6. Н. А. Вавилов, *Разложение Брюа для подгрупп, содержащих группу диагональных матриц*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **103** (1980), 20–30; **114** (1982), 50–61.
7. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **103** (1980), 31–47; **132** (1983), 44–56.
8. Н. А. Вавилов, *О подгруппах специальной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц*. Вестн. ЛГУ, сер. I, Вып. 4 (1985), 3–7; Вып. 2 (1986), 10–15; Вып. 2 (1987), 3–8; Вып. 3 (1988), 10–15.
9. А. Борель, Ж. Титс, *Редуктивные группы*. Математика. Период. сб. перев. ин.статей, **11**, No. 1 (1967), 43–111; No. 2, 3–31.
10. G. M. Seitz, *Subgroups of finite groups of Lie type*. J. Algebra, **61**, No. 1 (1979), 16–27.
11. G. M. Seitz, *Properties of the known simple groups*. Proc. Symp. Pure Math., **37** (1980), 231–237.
12. А. Е. Залесский, *Линейные группы*. Успехи мат. наук, **36**, No. 6 (1981), 56–107.
13. А. Е. Залесский, *Линейные группы*. В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. – М., Вып. 21 (1985), 135–182.
14. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле*. Успехи мат. наук, **41**, No. 1 (1986), 57–96.
15. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп*. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **183** (1990), 29–41.
16. G. M. Seitz, *The root subgroups of a maximal torus*. Proc. Symp. Pure Math., **37** (1980), 239–241.
17. G. M. Seitz, *On the subgroup structure of classical groups*. Commun. Algebra, **10**, No. 8 (1982), 875–885.
18. G. M. Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups of Lie type*. Pacif. J. Math., **106**, No. 1 (1983), 153–244.
19. Н. А. Вавилов, *О строении группы Шевалле типа* E_6. Л., Деп. в ВИНИТИ 22.04.86, 46 с; Деп. в ВИНИТИ 17.07.86, 38 с.
20. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом*. Вестн. ЛГУ, No. 13 (1976), 16–24.
21. З. И. Боревич, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **75** (1978), 22–31.
22. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Об определении сетевой подгруппы*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **132** (1983), 26–33.
23. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммукативным кольцом*. Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **165** (1984), 24–42.
24. Е. В. Дыбкова, *О некоторых конгруэнц-подгруппах симплектической группы*. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **64** (1976), 80–91.
25. Е. В. Дыбкова, *Индекс сетевой подгруппы в симплектической группе над дедекиндовым кольцом*. Зап. научн.семин. ЛОМИ, **75** (1978), 74–86.

26. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, *Сетевые подгруппы групп Шевалле.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **94** (1979), 40–49; **114** (1982), 62–76.
27. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом.* Сиб. мат. журн., **29**, No. 4 (1988), 31–43.
28. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* Докл. Акад. Наук СССР, **299**, No.6 (1988), 1300–1303.
29. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* London, New York, Wiley, 1972.
30. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М., Мир, 1973.
31. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* М., Наука, 1969.
32. Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп.* М., Мир, 1974.
33. J.-Y. Hée, *Groupes de Chevalley et groupes classiques.* Publ. Math. Univ. Paris. VII, **17** (1984), 1–54.
34. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings.* Tôhoku Math. J, **28**, No. 1 (1976), 57–66.
35. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, **13**, No. 366–382 (1977), 86–97.
36. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **75** (1978), 43–58.
37. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **116** (1982), 20–43.
38. З. И. Боревич, Х. О. Лесама Серрано, *Группа обратимых элементов полусовершенного кольца.* Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. I, Л., Изд-во ЛГУ (1986), 14–67.
39. Н. А. Вавилов, *Теоремы сопряженности для подгрупп расширенных групп Шевалле, содержащих расщепимый максимальный тор.* Докл. Акад. Наук СССР, **299**, No. 2 (1988), 269–272.
40. Н. А. Вавилов, *О сопряженности подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* Успехи мат. наук, **34**, No. 5 (1979), 216–217.
41. О. Т. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* В кн.: Автоморфизмы классических групп. – М., Мир, 1976, 57–167.
42. Ж. Титс, *Изотропные полупростые группы.* Математика Период. сб. перев. ин. статей, **9**, No. 1 (1965), 149–161.
43. И. Хамдан, *О подгруппах специальной линейной группы над кольцом дискретного нормирования.* 19-я Всесоюзн. алгебр. конф. Тез. докл., Ч. I (1987), 298.
44. Н. А. Вавилов, *Максимальные подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный расщепимый тор.* Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. I. Л., Изд-во ЛГУ (1986), 67–75.
45. M. Aschbacher, *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* Invent. Math., **76**, No. 3 (1984), 469–514.
46. Sh. Li, *Maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields.* Proc. Symp. Pure Math., **47** (1987).
47. P. Kleidman, M. Liebeck, *A survey of the maximal subgroups of the finite simple groups.* Geom. dedic., **25**, No. 1–3 (1988).
48. O. King, *Imprimitive maximal subgroups of the orthogonal, special orthogonal, unitary and special unitary groups.* Math. Z., **182**, No. 2 (1983), 193–203.

49. O. King, *Imprimitive maximal subgroups of the symplectic, orthogonal and unitary groups.* Geom. dedic., **15**, No. 4 (1984), 339–353.
50. O. King, *Imprimitive maximal subgroups of finite orthogonal groups.* Geom. dedic., **21**, No. 4 (1986), 341–348.
51. R. Dye, *Maximal subgroups of the finite orthogonal and unitary groups stabilizing anisotropic subspaces.* Math. Z., **189**, No. 1 (1985), 119–129.
52. Sh. Li, *Maximal subgroups containing root subgroups in finite classical groups.* Kexue Tongbao, **29**, No. 1 (1984), 14–18.
53. Sh. Li, J. Zha, *Certain classes of maximal subgroups in classical groups.* Lectures at the International Group Theory Symp., Beijing, 1984.
54. Sh. Li, *Maximal subgroups in $\Omega(n, K, F)$ with root subgroups.* Sci. Sinica, Ser. A., **28**, No. 8 (1985), 826–838.
55. P. Kleidman, M. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups.* London Math. Soc. Lecture Notes. Ser. No. 129, Cambridge Univ. Press, 1988.

Vavilov N. A. Subgroups of the split orthogonal group. II.

In the first paper of the series, we proved standardness of subgroups containing a split maximal torus in the split orthogonal group $SO(n, R)$ over a commutative semilocal ring R for the two following situations: 1) n is even, 2) n is odd and $R = K$ is a field. In the present paper we prove standardness of intermediate subgroups over a semilocal ring R in the case of an odd n. Together with the preceeding papers by Z. I. Borewicz, the author, and E. V. Dybkova this paper completes description of the overgroups of split maximal tori in the classical groups over semilocal rings. The analysis of odd orthogonal groups turned out to be technically much more difficult than other classical cases. Unlike all preceeding papers the proof of the key step in the reduction to the field case relies on calculations with a class of semisimple elements which are neither microweight elements, nor semisimple root elements.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 ноября 1999 г.