Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

А. И. Виноградов

О ГИПОТЕЗЕ ЛИННИКА I

Введение

В 1962 году на международном математическом конгрессе в Стокгольме Ю. В. Линник [1] высказал гипотезу о двойном корневом понижении для суммы Клоостермана $S(m,n;c)$ [2] при суммировании их по модулям $c \geqslant 1$:

$$l_{m,n}(x) = \sum_{1 \leqslant c \leqslant x} \frac{S(m,n;c)}{c} \ll x^{\varepsilon}, \tag{0.1}$$

где $x \geqslant 1$ – растущий параметр; $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ – целые фиксированные параметры, единые для всех сумм Клоостермана; $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное число. Константа в оценке (0.1) зависит от m и n.

На спектральном пути в работах [5, 7] получена оценка (0.1) для $\varepsilon = \frac{1}{6}$, что подтверждает интерференцию сумм Клоостермана по модулям, так как тривиальной является оценка

$$l_{m,n}(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

которая сразу же следует из оценки А. Вейля [3] для сумм Клоостермана:

$$|S(m,n;c)| \leqslant \sqrt{c} \cdot \min\left[\sqrt{(m,c)} \cdot \tau\left(\frac{c}{(m,c)}\right), \sqrt{(n,c)} \cdot \tau\left(\frac{c}{(n,c)}\right)\right]. \tag{0.2}$$

Если считать параметры m и n фиксированными, а c – растущим, тогда оценку (0.2) можно переписать в более простом виде:

$$S(m,n;c) \ll c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Из этой оценки видно, что гипотеза Линника предполагает второе корневое понижение для суммы сумм Клоостермана $l_{m,n}(x)$ при суммировании по модулям $c \leqslant x$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 99-01-00102.

В оценке (0.1) на самом деле скрыты две оценки, одна аналитическая по длине суммы Линника x, а другая арифметическая по параметрам m и n. На практике чаще всего эти параметры не фиксированы и также растут вместе с длиной интервала x. Для того, чтобы можно было разобраться как выглядит оценка (0.1) относительно трех параметров (m, n, x), мы воспользуемся тождеством для сумм Клоостермана (см. [5]):

$$S(m,n;c) = \sum_{\Delta|(m,n,c)} \Delta S\left(1, \frac{m\cdot n}{\Delta^2}, \frac{c}{\Delta}\right). \tag{0.3}$$

Подставляя (0.3) в определение суммы Линника $l_{m,n}(x)$ в (0.1) получим тождество и для нее:

$$l_{m,n}(x) = \sum_{\Delta|(m,n)} l_{1,\frac{m\cdot n}{\Delta^2}}\left(\frac{x}{\Delta}\right). \tag{0.4}$$

Из этого тождества следует, что не нарушая общности оценки (0.1), можно ограничиться суммой Линника только с одним параметром:

$$l_{1,m}(x) = \sum_{1\leqslant c\leqslant x} \frac{S(1,m;c)}{c}. \tag{0.5}$$

Для этой суммы гипотезу Линника (0.1) можно записать в абсолютной форме:

$$l_{1,m}(x) \ll (m\cdot x)^{\varepsilon}, \tag{0.6}$$

в том смысле, что константа в оценке (0.6) зависит только от параметра $\varepsilon > 0$. Оценка А. Вейля (0.2) также упрощается в этом случае:

$$|S(1,m;c)| \leqslant \sqrt{c}\cdot\tau(c). \tag{0.7}$$

Если оценку (0.7) подставить в тождество (0.3), тогда упрощается и общая оценка Вейля (0.2)

$$|S(m,n;c)| \leqslant \sqrt{c} \sum_{\Delta|(m,n'c)} \sqrt{\Delta}\cdot\tau\left(\frac{c}{\Delta}\right). \tag{0.2$^{\mathrm{a}}$}$$

В этой работе мы получим среднеквадратичную гипотезу Линника для суммы (0.5):

$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |l_{1,m}(x)|^2 dx \ll N^{1+\varepsilon}. \tag{0.8}$$

При этом константа в оценке (0.8) не зависит от m, если выполняется условие:

$$m \ll N^2. \tag{0.9}$$

Будет получен также и арифметический вариант оценки (0.8) по параметру m:

$$\sum_{m\leqslant M} |l_{1,m}(x)|^2 \ll M^{1+\varepsilon}. \tag{0.10}$$

Константа в оценке (0.10) не зависит от x, если выполняется условие:

$$x \ll M \ll x^2. \tag{0.11}$$

Можно объединить оценки (0.8) и (0.10) в одну комбинированную оценку, если ввести нормированную сумму Линника вида:

$$l^*_{1,m}(x) = \sum_{c\leqslant 2\pi\sqrt{m}\cdot x} \frac{S(1,m;c)}{c}.$$

Для комбинированного среднего этой суммы справедлива оценка:

$$\sum_{m\leqslant M} \int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |l^*_{1,m}(x)|^2 dx \ll (M\cdot N)^{1+\varepsilon}. \tag{0.13}$$

Константа в оценке (0.13) зависит только от $\varepsilon > 0$, если выполняется условие:

$$M \ll N^2. \tag{0.14}$$

§1. Предварительные сведения

В связи с гипотезой Линника [1], А. Сельберг ввел Z-функцию в работе [4]:

$$Z_{m,n}(S) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c^{2s}}, \quad \operatorname{Re} s > \frac{3}{4}, \tag{1.1}$$

и получил для нее спектральное разложение

$$Z_{m,n}(s) = (Z^{\mathrm{con}}_{m,n} + Z^{\mathrm{cusp}}_{m,n} + Z^{\mathrm{disc}}_{m,n})(s). \tag{1.2}$$

Наиболее важной среди компонент (1.2) является дискретная составляющая $Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}$, явный вид которой определяется равенством:

$$Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(m,n) \cdot h(\varkappa_j, s) \cdot (2\pi\sqrt{m \cdot n})^{1-2s}, \qquad (1.3)$$

где

$$\alpha_j(m,n) = \rho_j(m) \cdot \overline{\rho_j(n)} \cdot (ch\pi\varkappa_j)^{-1}, \quad \varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}},$$

$$h(r,s) = \frac{1}{2}\sin\pi s \cdot \Gamma\left(s - \frac{1}{2} - ir\right)\Gamma\left(s - \frac{1}{2} + ir\right), \qquad (1.4)$$

$\lambda_j > \frac{1}{4}$ – собственное число j-ой собственной функции $f_j(z)$ дискретного спектра оператора Лапласа $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ для группы автоморфности $SL(2,\mathbb{Z})$; $\rho_j(m)$ – коэффициент Фурье функции $f_j(z)$:

$$f_j(z) = \sum_{m \neq 0} \rho_j(m) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|m|y) \cdot e^{2\pi imx}, \qquad (1.5)$$

$z = x + iy \in H$ – верхней полуплоскости $y > 0$.

Собственные функции $f(z)$ мы выбирем так, чтобы они были одновременно и собственными функциями всех операторов Гекке T_m

$$T_m \cdot f_j(z) = t_j(m) \cdot f_j(z), \quad m \geqslant 1. \qquad (1.6)$$

В этом случае коэффициенты Фурье $\rho_j(m)$ из разложения (1.5) становятся пропорциональными собственным числам $t_j(m)$ из (1.6):

$$\rho_j(m) = \rho_j(1) \cdot t_j(m).$$

Для отрицательных номеров это свойство переносится, благодаря равенству

$$\rho(-m) = \xi_j \cdot \overline{\rho_j(m)},$$

где $\xi_j = \pm 1$ в зависимости от четности или нечетности функции $f_j(z)$. Доказательство последнего равенства можно найти в работе [9].

В силу эрмитовости операторов Гекке T_m их собственные числа $t_j(m)$ являются вещественным при всех $m \geqslant 1$ без исключений, так как мы рассматриваем дискретную группу $SL(2,\mathbb{Z})$, которая является Γ_q-группой с тривиальным конгруэнц-модулем $q = 1$. (Исключением из эрмитовости могут быть только операторы T_m для случаев $(m, q) > 1$.) Поэтому арифметический коэффициент $\alpha_j(m, n)$ из разложения (1.3) можно записать в новом виде:

$$\alpha_j(m, n) = \alpha_j \cdot t_j(m) \cdot t_j(n), \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_j = \alpha_j(1, 1) = |\rho_j(1)|^2 \cdot (ch\pi\varkappa_j)^{-1}.$$

Явный вид непрерывной компоненты из (1.2) определяется равенством:

$$Z^{\text{con}}_{m,n}(s) + \frac{\delta_{m,n}}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{\frac{1}{2}+ir}(m)\tau_{\frac{1}{2}-ir}(n)}{\zeta(1+2ir)\zeta(1-2ir)}\, h(r, s) dr \tag{1.8}$$

$\delta_{m,n}$ – символ Кронекера, $\tau_s(n) = n^{s-\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{1-2s}(n)$,

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s.$$

Компонента для классических параболических форм $Z^{\text{cusp}}_{m,n}$ из (1.2) определяется равенством:

$$Z^{\text{cusp}}_{m,n}(s) = \sum_{\substack{k\equiv 0 \pmod 2\\ k\geqslant 2}} \frac{P_{m,n}(k) \cdot \Gamma\left(s + \frac{k}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(1 - s + \frac{k}{2}\right)}, \tag{1.9}$$

где

$$P_{m,n}(k) = (k-1) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m, n; c)}{c}\, J_{k-1}\left(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{c}\right).$$

Отметим, что равенства (1.9) взяты из работы [5] с заменой символа: $2l + 2 = k$ и включен случай $k = 2$ для того, чтобы все рассуждения можно было автоматически перенести на любую конгруэнц-группу Γ_q, $q \geqslant 1$ (в случае $\Gamma_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ случай $k = 2$ нумерует пустое пространство). Представлением (1.9) удобно пользоваться в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$, где оно абсолютно сходится по $k > 0$ ввиду экспоненциального убывания функции Бесселя J_{k-1} по вещественному индексу $(k-1) \geqslant 1$.

В левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s < \frac{1}{2}$ представление (1.9) можно перевести на язык собственных чисел операторов Гекке по аналогии с дискретной компонентой. Для этого надо воспользоваться равенством между коэффициентами Фурье классических рядов Пуанкаре и собственными функциями операторов Гекке в конечномерном пространстве:

$$2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} P_{m,n}(k) + \delta(m,n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \theta_k} a_{j,k} t_{j,k}(m) t_{j,k}(n), \tag{1.10}$$

где $a_{j,k}$ – нормировочный коэффициент:

$$a_{j,k} = |\rho_{j,k}(1)|^2 \Gamma(k-1)(4\pi)^{1-k},$$

θ_k – размер конечномерного пространства.

В классических пространствах также верен аналог равенства (1.6):

$$T_m \cdot f_{j,k}(z) = t_{j,k}(m) f_{j,k}(z),$$

с тем же соотношением между коэффициентами Фурье и собственными числами операторов Гекке

$$\rho_{j,k}(m) = \rho_{j,k}(1) t_{j,k}(m),$$

где коэффициенты $\rho_{j,k}(m)$ определяются разложением Фурье:

$$f_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_{j,k}(m) m^{\frac{k-1}{2}} \cdot e^{2\pi i m z}.$$

Равенство (1.10) позволяет использовать оценку Делиня (гипотеза Петерсона):

$$|t_{j,k}(m)| \leqslant \tau(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Подробности доказательства равенств (1.3), (1.8), (1.9), (1.10) можно найти в работах [5, 6].

Из явного вида трех спектральных компонент в (1.2) видно, что все они регулярны в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Для компоненты $Z^{\mathrm{cusp}}_{m,n}(s)$ граница регулярности сдвигается влево еще дальше – до мнимой оси $\mathrm{Re}\, s = 0$. Поэтому ясно, что спектральное разложение (1.2) для Z-функции Сельберга позволяет продолжить ее регулярным образом до прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ и мероморфно на всю левую полуплоскость $\mathrm{Re}\, s \leqslant \frac{1}{2}$.

§2. Сумма Линника

Из всего сказанного в §1 следует, что гипотеза Линника (0.1) сводится к спектральным свойствам Z-функции Сельберга через разрывной интеграл теории чисел, который позволяет связать сумму Линникак $l_{1,m}(x)$ и Z-функцию Сельберга равенством:

$$l_{1,m}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{x^{2s}}{s} Z_{1,m}\left(\frac{1}{2}+s\right) ds + \\ + O\left(\frac{\sqrt{x}}{T}\log^3 x\right) \tag{2.1}$$

$$s = \sigma + it, \quad |t| \leqslant T \in (1, \sqrt{x}), \quad \sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{\log x}.$$

Для однопараметрической суммы Линника $l_{1,m}(x)$ константа в O-символе правой части (2.1) является абсолютной и от параметра m не зависит. Это является основной причиной, почему выгодно перейти к однопараметрической сумме Линника, использовав тождества (0.3) и (0.4).

Сдвигая контур в интеграле (2.1) влево на прямую

$$\operatorname{Re} s = \varepsilon_0 = \frac{1}{\log x} \tag{2.2}$$

мы сведем задачу к оценке трех спектральных компонент вблизи мнимой оси:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon_0-iT}^{\varepsilon_0+iT} \frac{x^{2s}}{s} \left[Z_{1,m}^{\mathrm{disc}} + Z_{1,m}^{\mathrm{cusp}} + Z_{1,m}^{\mathrm{con}}\right] \left(\frac{1}{2}+s\right) ds. \tag{2.3}$$

Оценки интегралов на перекладинах вверху и внизу не вызывают проблем и уходят в остаток с порядком малости не больше остатка в правой части (2.1), с использованием гипотезы Петерсона для нулевого веса [8].

Кроме того, из явного вида компонент Z^{con} и Z^{cusp} в §1 видно, что они оцениваются сравнительно просто на контуре (2.3) и так же уходят в остаток с тем же порядком малости, как и перекладины. Поэтому исходный интеграл правой части (2.1) сводится к интегралу (2.3) от дискретной компоненты:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon_0-iT}^{\varepsilon_0+iT}\frac{x^{2s}}{s}Z_{1,m}^{\mathrm{disc}}\left(\frac{1}{2}+s\right)ds. \tag{2.4}$$

Используя спектральное представление (1.3) для дискретной компоненты, сдвинем контур (2.4) еще раз влево на прямую

$$\operatorname{Re}s=-\frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

По теореме Коши о вычетах мы получим, что интеграл (2.4) равен сумме вычетов в полюсах h-функции на мнимой оси:

$$W_{1,m}(x)+\overline{W_{1,m}(x)}+O(\tau(m)\log^3 x), \tag{2.6}$$

где

$$W_{1,m}(x)=\sum_{x_j\leqslant T}\alpha_j(1,m)\left(\frac{x}{2\pi\sqrt{m}}\right)^{2i\varkappa_j}\frac{\Gamma(2i\varkappa_j)}{i\varkappa_j}\operatorname{ch}\pi\varkappa_j. \tag{2.7}$$

Остаток в O-символе (2.6) получается от интегралов на перекладинах вверху и внизу и на контуре (2.5), если выполняется условие

$$m\ll x^2. \tag{2.8}$$

Оценка суммы (2.7) и составляет суть гипотезы Линника. Если действовать тривиально, т.е. оценивать сумму (2.7) по модулю слагаемых, тогда получается оценка

$$W_{1,m}(x)\ll\tau(m)\sqrt{T}. \tag{2.9}$$

Константа в оценке (2.9) абсолютная.

Затем выбирая параметр T из оптимального равенства

$$\sqrt{T}=\frac{\sqrt{x}}{T}\log^3 x\to T=\sqrt[3]{x}\log^2 x,$$

и подставляя это значение T в (2.9) и (2.1), получаем оценку:

$$l_{1,m}(x)\ll\tau(m)\sqrt[6]{x}\log x. \tag{2.10}$$

Эта оценка и была получена в работах [5, 7]. Если оценку (2.10) подставить в (0.4) с заменой $m\to\frac{mn}{\Delta}$, тогда получается оценка для двухпараметрической суммы Линника:

$$l_{m,n}(x)\ll\tau(m)\tau(n)\tau((m,n))\sqrt[6]{x}\log x. \tag{2.11}$$

Условие (2.8) в этом случае переходит в условие на оба параметра:
$$m \cdot n \ll x^2. \tag{2.12}$$
В этом случае константа в оценке (2.12) абсолютная.

§3. Среднеквадратичная оценка

Если в исходном равенстве (2.1) расположить параметр x в интервале
$$\frac{1}{2}N \leqslant x \leqslant N, \quad N \geqslant 4, \tag{3.1}$$
и положить $T = \sqrt{N}$, $\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{\log N}$, тогда равенство (2.1) преобразуется к аналогу равенства с интегралом (2.4):
$$l_{1,m}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon_0 - iT}^{\varepsilon_0 + iT} \frac{x^{2s}}{s} Z_{1,m}^{\mathrm{disc}}\left(\frac{1}{2} + s\right) ds +$$
$$+ O(\tau(m)\log^3 N), \tag{3.2}$$
где $\varepsilon_0 = \frac{1}{\log N}$. Интеграл правой части (3.2) равен сумме (2.6), поэтому из равенства (3.2) получается среднеквадратичная оценка по интервалу (3.1) с помощью неравенства Шварца:
$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |l_{1,m}(x)|^2 dx \ll \int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |W_{1,m}(x)|^2 dx + \tau^2(m) \log^6 N. \tag{3.3}$$
При получении оценки (3.3) надо помнить об условии (2.8), которое обеспечивает порядок второго слагаемого правой части (3.3) именно такого вида.

Для оценки интеграла в правой части (3.3) удобно сначала разбить сумму $W_{1,m}$ из (2.7) на “ящики” точками геометрической прогрессии:
$$W_{1,m}(x) = \sum_{k=0}^{k_0} W_{1,m}^{(k)}(x), \tag{3.4}$$
где
$$W_{1,m}^{(k)}(x) = \sum_{\frac{1}{2}t_k < \varkappa_j \leqslant t_k} (\cdot). \tag{3.5}$$

Ядро в сумме (3.5) то же самое, что и в сумме (2.7) при $n = 1$,

$$t_k = \frac{1}{2^k}T, \quad k \in [0, k_0], \quad k_0 = [\log_2 T]. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и применяя неравенство Шварца, получаем оценку:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |W_{1,m}(x)|^2 dx \ll k_0 \sum_{k=0}^{k_0} \int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |W_{1,m}^{(k)}(x)|^2 dx. \tag{3.7}$$

Тем самым задача свелась к оценке интеграла от квадрата "ящика" (3.5):

$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N} |W_{1,m}^{(k)}(x)|^2 dx. \tag{3.8}$$

Подставляя правую часть (3.5) в (3.8) и меняя порядки интегрирования и суммирования, получаем, что интеграл (3.8) не больше, по своему порядку, чем величина

$$\frac{N}{t_k^3} \sum_{\substack{\frac{1}{2}t_k < \varkappa_{j_1}, \\ \varkappa_{j_2} \leqslant t_k}} \frac{|\alpha_{j_1}(1,m)| \cdot |\alpha_{j_2}(1,m)|}{1 + |\varkappa_{j_1} - \varkappa_{j_2}|}. \tag{3.9}$$

Воспользуемся гипотезой Петерсона [8], которая обеспечивает оценку:

$$|\alpha_j(1,m)| \leqslant \alpha_j \cdot \tau(m), \tag{3.10}$$

где

$$\alpha_j = |\rho_j(1)|^2 (\mathrm{ch}\pi\varkappa_j)^{-1}.$$

Подставляя (3.10) в (3.9), приведем эту сумму к новому виду:

$$\tau^2(m)\frac{N}{t_k^3} \cdot \sum_{\substack{\frac{1}{2}t_k < \varkappa_{j_1}, \\ \varkappa_{j_2} \leqslant t_k}} \frac{\alpha_{j_1} \cdot \alpha_{j_2}}{1 + |\varkappa_{j_1} - \varkappa_{j_2}|}. \tag{3.11}$$

Теперь введем локальные суммы:

$$a_n = \sum_{n < \varkappa_j \leqslant n+1} \alpha_j, \quad n \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Из определения суммы (3.12) следует, что сумма (3.11) по своему порядку не больше величины

$$\tau^2(m)\frac{N}{t_k^3}\sum_{\substack{\frac{1}{2}t_k<n_1,\\ n_2\leqslant t_k}}\frac{a_{n_1}\cdot a_{n_2}}{1+|n_1-n_2|};\tag{3.13}$$

суммирование в (3.13) идет по целым n_1 и n_2.

Из теоремы 6, [5] получаем оценку для суммы (3.12):

$$a_n \ll (n+2)\log(n+2).$$

Подставляя эту оценку в (3.13), получаем, что эта сумма по своему порядку не больше величины

$$\tau^2(m)\frac{N}{t_k}\log^2 N\sum_{\substack{0\leqslant n_1,\\ n_2\leqslant t_k}}\frac{1}{1+|n_1-n_2|}.\tag{3.14}$$

Для суммы в (3.14) справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{0\leqslant n_1,\\ n_2\leqslant t_k}}\frac{1}{1+|n_1-n_2|}\ll t_k\log t_k.$$

Подставляя эту оценку в (3.14), получаем оценку для интеграла (3.8):

$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N}|W_{1,m}^{(k)}(x)|^2dx \ll \tau^2(m)N\log^3 N.$$

Подставляя эту оценку в (3.7), получаем, что интеграл в левой части (3.7) не больше величины порядка

$$\tau^2(m)N\log^5 N.$$

Вместе с неравенством (3.3) это приводит к оценке квадратичного среднего для суммы Линника:

$$\int\limits_{\frac{1}{2}N}^{N}|l_{1,m}(x)|^2dx \ll \tau^2(m)N\log^6 N.\tag{3.15}$$

Константа в этой оценке абсолютная при условии, что $m \ll N^2$.

Для того, чтобы получить аналогичную оценку для двухпараметрической суммы Линникак $l_{m,n}(x)$ достаточно заметить, что из тождества (0.4), по неравенству Шварца, следует оценка:

$$|l_{m,n}(x)|^2 \leqslant \tau((m,n)) \sum_{\Delta|(m,n)} \left| l_{1,\frac{mn}{\Delta^2}}\left(\frac{x}{\Delta}\right)\right|^2. \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что среднеквадратичное

$$\int_{\frac{1}{2}N}^{N} |l_{m,n}(x)|^2 dx \tag{3.17}$$

сводится к среднеквадратичному:

$$\int_{\frac{1}{2}N}^{N} \left| l_{1,\frac{mn}{\Delta^2}}\left(\frac{x}{\Delta}\right)\right|^2 dx, \tag{3.18}$$

а оно, в свою очередь, равно

$$\Delta \int_{\frac{1}{2}\frac{N}{\Delta}}^{\frac{N}{\Delta}} \left| l_{1,\frac{mn}{\Delta^2}}(y)\right|^2 dy. \tag{3.19}$$

Дальше остается заметить, что из условия

$$m \cdot n \ll N^2 \tag{3.20}$$

следует условие

$$\frac{mn}{\Delta^2} \ll \left(\frac{N}{\Delta}\right)^2, \tag{3.21}$$

справедливое для всех $\Delta \mid (m,n)$. Но если выполнено условие (3.21), тогда для интеграла из (3.19) справедлива оценка (3.15) с заменой $m \to \frac{mn}{\Delta^2}$, $N \to \frac{N}{\Delta}$. Поэтому (3.19) в целом по своему порядку не больше величины

$$\tau^2\left(\frac{mn}{\Delta^2}\right) N \log^6 N.$$

Следовательно, интеграл (3.18) также не больше этого порядка.

Поэтому из неравенства (3.16) следует оценка для двухпараметрического среднего:

$$\int_{\frac{1}{2}N}^{N} |l_{m,n}(x)|^2 dx \ll \tau^2(m)\tau^2(n)\tau^2((m,n))N\log^6 N. \tag{3.22}$$

Эта оценка безусловна, если выполнено ограничение (3.20).

Из (3.22) следует, что в среднем по x в интервале (3.1) справедлива оценка

$$l_{m,n}(x) \ll \tau(m)\tau(n)\tau((m,n))\log^3 x.$$

Оценку (0.10) для арифметического среднего и комбинированную оценку (0.13) мы получим во второй части этой работы.

Литература

1. Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators.* Proc. of the International Congress of Math. Stockholm, 1962, 270–284.
2. H. D. Kloostermann, *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Acta Math., **49** (1926), 407–464.
3. A. Weil, *On some exponential sums.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **34** (1948), 204–207.
4. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* Proc. of Symposia in Pure Math. VIII, Amer. Math. Sci. Providence (1965), 1–15.
5. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* Матем. Сборник, **111**, No. 3 (1980), 334–383.
6. J. -M. Deshoillers, H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coeeficients of cusp forms.* Invent. Math., **70** (1982), 219–288.
7. D. Goldfeld, P. Sarnak, *Sums of Kloosterman sums.* Invent. Math., **71** (1983), 243–250.
8. А. И. Виноградов, *Гипотеза Петерсона для нулевого веса I, II.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **249** (1997), 118–153 I; Internet:www.pdmi.ras.ru/preprint/ 1999/index/html,18 (II).
9. А. И. Виноградов, *Сравнение спектров II.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **236** (1997), 50–68.

Vinogradov A. I. The Linnik conjecture. I.

The Linnik conjecture is proved in the mean-square version with respect to the main parameter, namely, the length of the Linnik sum.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 ноября 1999 г.