Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, I

§1. Формулировка основного результата

В работе [1] (см. также [2]) при изучении блоков с диэдральной дефектной группой был введен класс так называемых алгебр диэдрального типа, и была дана полная классификация (с точностью до Морита-эквивалентности) таких алгебр, которые имеют три простых модуля: они разбиваются на некоторые четыре бесконечные серии.

В работе [3] для одной из серий указанных алгебр диэдрального типа были вычислены алгебры Йонеды. В этих вычислениях существенным образом был использован диаграммный метод Бенсона–Карлсона [4]. В настоящей работе, используя дальнейшее развитие этого метода, мы вычисляем алгебры Йонеды для алгебр, составляющих еще одну серию из классификации Эрдман.

Пусть k – произвольное поле. Определим алгебру $R_{e,n}$, $e, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, с помощью следующего колчана с соотношениями:

$$Q : 1 \underset{b_1}{\overset{a_1}{\rightleftharpoons}} 2 \underset{b_2}{\overset{a_2}{\rightleftharpoons}} 3 \circlearrowleft c$$

$$b_1a_1 = a_2b_2 = b_2c = ca_2 = 0,$$

$$(b_2a_2a_1b_1)^e = (a_1b_1b_2a_2)^e, \quad c^n = (a_2a_1b_1b_2)^e$$

(композицию путей мы записываем справа налево). Как доказано в [1], $R_{e,n}$ – симметричная базисная k-алгебра, имеющая ручной тип представления.

Пусть R – произвольная базисная конечномерная k-алгебра с радикалом Джекобсона $J(R)$, $\overline{R} = R/J(R)$ – соответствующая фактор-алгебра. На прямой сумме $\mathcal{E}(\overline{R}) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \operatorname{Ext}^m_R(\overline{R}, \overline{R})$ с помощью обычного произведения Йонеды (см., например, [5]) вводится структура (ассоциативной) k-алгебры, и эту алгебру называют алгеброй Йонеды алгебры R.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{E}(\overline{R}_{e,n})$ алгебры $R_{e,n}$ рассмотрим колчан

$$\mathcal{R} \,:\, z_2 \circlearrowright 1 \underset{x_3}{\overset{x_4}{\rightleftarrows}} \underset{\circlearrowleft z_1}{\overset{\circlearrowleft y_2}{2}} \underset{x_2}{\overset{x_5}{\rightleftarrows}} \underset{\circlearrowleft x_1}{\overset{\circlearrowleft y_1}{3}} \; .$$

На алгебре путей $k[\mathcal{R}]$ колчана $\mathcal{R}$ введем градуировку такую, что

$$\deg(x_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, 5),$$

$$\deg(y_j) = 2 \quad (j = 1, 2), \quad \deg(z_t) = 3 \quad (t = 1, 2).$$

Рассмотрим следующие соотношения на колчане $\mathcal{R}$

$$\begin{cases} x_2x_5 = x_4x_3 = x_5x_4 = x_3x_2 = x_3y_2 = y_2x_4 = x_5z_1 = z_1x_2 = 0, \\ x_1y_1 = y_1x_1, \ \ y_1x_5 = -x_5y_2, \ \ x_2y_1 = y_2x_2, \ \ z_2x_3 = -x_3z_1, \\ x_4z_2 = -z_1x_4, \ \ z_1y_2 = -y_2z_1; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_1^2 = 0; \tag{1.2}$$

$$x_1^2 = y_1. \tag{1.2$'$}$$

Определим k-алгебру $\mathcal{E}$ с помощью колчана $\mathcal{R}$ и соотношений (1.1), (1.2), а также k-алгебру $\mathcal{E}'$ с помощью того же колчана $\mathcal{R}$ и соотношений (1.1), (1.2$'$). Из вида соотношений (1.1), (1.2), (1.2$'$) следует, что алгебры $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ наследуют градуировку с алгебры $k[\mathcal{R}]$.

Теорема 1.1. *Пусть $R = R_{e,n}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{E}(\overline{R})$ как градуированная k-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{E}$ при $n > 2$ и алгебре $\mathcal{E}'$ при $n = 2$.*

Замечание. Из вида соотношения (1.2$'$) следует, что описание алгебры $\mathcal{E}'$ можно упростить, опуская в колчане $\mathcal{R}$ петлю y_1 и видоизменяя соответствующим образом некоторые соотношения в (1.1).

Следствие 1.2 [4]. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2. Тогда кольцо когомологий знакопеременной группы A_7 описывается следующим образом:*

$$H^*(A_7, k) \simeq k[\beta, \gamma_1, \gamma_2]/(\gamma_1\gamma_2),$$

где $\deg\beta = 2$, $\deg\gamma_i = 3$, $i = 1, 2$.

§2. Предварительные результаты

По поводу основных понятий диаграммного метода Бенсона–Карлсона мы отсылаем к [4].

Пусть $R = R_{e,n}$ – одна из алгебр рассматриваемой нами серии алгебр диэдрального типа. Из результатов [1] следует, что неразложимые проективные модули $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, соответствующие вершинам колчана Q, имеют следующие диаграммы:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & S_1 & & & S_2 & & & & S_3 & \\
 & |a_1 & & a_2 \diagup & & \diagdown b_1 & & c \diagup & & \diagdown b_2 \\
 & S_2 & & S_3 & & S_1 & & S_3 & & S_2 \\
 & |a_2 & & b_2| & & |a_1 & & c| & & |b_1 \\
 & S_3 & & S_2 & & S_2 & & S_3 & & S_1 \\
P_1: & |b_2 & P_2: & b_1| & & |a_2 & P_3: & c| & & |a_1 \\
 & S_2 & & S_1 & & S_3 & & S_3 & & S_2 \\
 & |b_1 & & | & & | & & | & & | \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & | & & | & & | & & | & & | \\
 & S_2 & & S_1 & & S_3 & & S_3 & & S_2 \\
 & |b_1 & & a_1 \diagdown & & \diagup b_2 & & c \diagdown & & \diagup a_2 \\
 & S_1 & & & S_2 & & & & S_3 &
\end{array}$$

Мы использовали также дополнительные обозначения: у каждого ребра указана соответствующая образующая алгебры путей $k[Q]$ колчана Q. Рассмотрим гомоморфизмы умножения справа на элементы a_i, b_i, c, действующие между P_1, P_2, P_3:

$$a_1^* : P_2 \longrightarrow P_1, \; a_2^* : P_3 \longrightarrow P_2, \; b_1^* : P_1 \longrightarrow P_2,$$
$$b_2^* : P_2 \longrightarrow P_3, \; c^* : P_3 \longrightarrow P_3.$$

Тогда дополнительные обозначения на диаграммах модулей P_i указывают, в частности, на то, что подмодуль в P_2 с диаграммой

$$S_2 \xleftarrow{a_1} S_1 \longleftarrow \ldots \xleftarrow{a_1} S_1 \xleftarrow{b_1} S_2 \xleftarrow{b_2} S_3$$

совпадает с $\mathrm{Im}(a_2^*)$.

Отметим, что композиционная длина модулей P_i такова:

$$l(P_1) = 4e + 1, \quad l(P_2) = 8e, \quad l(P_3) = n + 4e.$$

В дальнейшем ради простоты мы гомоморфизм умножения (справа) на элемент $x \in R$ также будем обозначать через x.

Диаграмма D называется *зигзагом*, если ее вершины $\{x_i\}_{i=1}^n$ можно занумеровать так, что для любого $i = 1, \ldots, n-1$ существует либо ребро $e(x_i, x_{i+1})$, либо ребро $e(x_{i+1}, x_i)$, а других ребер в D нет. Если D – зигзаг (ребра которого помечены образующими алгебры $k[Q]$), то максимальные подпоследовательности одинаково ориентированных ребер будем заменять одной чертой, которая помечается соответствующим словом (при этом при движении сверху вниз по зигзагу D соответствующие буквы записываем справа налево).

Если модуль M – цепной с диаграммой

$$S_{i_t} \longleftarrow \ldots \longleftarrow S_{i_1},$$

то пишем $M = U(S_{i_1}, \ldots, S_{i_t})$.

Введем также сокращенные обозначения для следующих элементов алгебры $k[Q]$: $\alpha_1 = (a_1b_1b_2a_2)^{e-1}$, $\alpha_2 = (a_2a_1b_1b_2)^{e-1}$, $\beta_1 = (b_1b_2a_2a_1)^{e-1}$, $\beta_2 = (b_2a_2a_1b_1)^{e-1}$ (для $e = 1$ в качестве $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ берем идемпотенты, соответствующие подходящим вершинам колчана Q).

Предложение 2.1. *Минимальная проективная резольвента R-модуля S_2 совпадает с тотализацией следующего бикомплекса:*

$$
\begin{tikzcd}
 & & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & & \\
 & P_1 \arrow[d, "b_1"'] & P_2 \arrow[l, "-\beta_2 b_2 a_2 a_1"'] \arrow[d, "a_1 b_1"] & P_2 \arrow[l, "-\beta_2 b_2 a_2"'] \arrow[d, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2"] & \dots \arrow[l, "-a_2"'] & \\
 & P_2 \arrow[d, "a_1 b_1"] & P_2 \arrow[l, "\beta_2 b_2 a_2"'] \arrow[d, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2"] & P_3 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[d, "c^{n-1}"] & \dots \arrow[l, "c"'] & \\
P_1 \arrow[d, "b_1"'] & P_2 \arrow[l, "-\beta_2 b_2 a_2 a_1"'] \arrow[d, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2"] & P_3 \arrow[l, "-a_2"'] \arrow[d, "c^{n-1}"] & P_3 \arrow[l, "-c"'] \arrow[d, "\alpha_2 a_2 a_1 b_1"] & \dots \arrow[l, "-b_2"'] & \\
P_2 & P_3 \arrow[l, "a_2"'] & P_3 \arrow[l, "c"'] & P_2 \arrow[l, "b_2"'] & P_3 \arrow[l, "a_2"'] & {} \arrow[l, "c"']
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

Доказательство проводится аналогично [4, §11]. Поэтому мы лишь кратко наметим схему рассуждений. Непосредственно из вида диаграммы модуля P_2 получаем, что диаграмма сизигии $\Omega^1(S_2)$ имеет вид

$$
\begin{array}{ccccc}
S_3 & & & & S_1 \\
\alpha_1 a_1 b_1 b_2 \diagdown & & & \diagup & \beta_2 b_2 a_2 a_1. \\
 & & S_2 & &
\end{array}
$$

Далее, так как $Q_1(S_2) = P_3 \oplus P_1$, то получаем, что сизигия $\Omega^2(S_2)$ имеет диаграмму:

$$
\begin{array}{ccccc}
S_3 & & S_2 & & \\
c^{n-1} \diagdown & \diagup a_2 & & \diagdown b_1. & \\
 & S_3 & & S_1 &
\end{array}
$$

При этом дифференциал

$$d_0 = d_0^{(2)} : Q_1(S_2) = P_3 \oplus P_1 \longrightarrow Q_0(S_2) = P_2$$

описывается матрицей $d_0 = (a_2, b_1)$. Продолжая эти рассуждения, доказываем, что минимальная проективная резольвента $Q.(S_2) \to S_2$ имеет указанный выше вид.

Из этих же рассуждений вытекает такое следствие.

Следствие 2.2. *Диаграмма модуля $\Omega^m(S_2)$, $m \geqslant 3$, получается из диаграммы модуля $\Omega^{m-2}(S_2)$ с помощью следующих операций.*

а) *Если $m \equiv 0 \pmod 3$, то слева к диаграмме $\Omega^{m-2}(S_2)$ присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_2 & & S_3 & \\ \alpha_2a_2a_1b_1 & \diagdown & & \diagup & c, \\ & & S_3 & & \end{array}$$

а справа отбрасывается (крайнее сверху) ребро $S_2 \xleftarrow{a_1} S_1$.

б) *Если $m \equiv 1 \pmod 3$, то слева (соответственно справа) присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_3 & \\ \alpha_1a_1b_1b_2 & \diagdown & & \diagup & b_2 \\ & & S_2 & & \end{array}$$

(соответственно

$$\begin{array}{ccccc} & S_1 & & S_1 & \\ a_1 & \diagdown & & \diagup & \beta_2b_2a_2a_1). \\ & & S_2 & & \end{array}$$

в) *Если $m \equiv 2 \pmod 3$, то слева (соответственно справа) присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_2 & \\ c^{n-1} & \diagdown & & \diagup & a_2 \\ & & S_3 & & \end{array}$$

(соответственно ребро

$$\begin{array}{ccc} S_2 & & \\ & \diagdown\, b_1 & \\ & & S_1 \quad). \end{array}$$

Следствие 2.3.

а)

$$\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_2, S_1) = \begin{cases} 1, & \textit{если } m \equiv 1 \pmod 3 \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

б)

$$\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_2, S_2) = \begin{cases} k, & \textit{если } m = 3k+1 \\ k+1, & \textit{если } m = 3k \textit{ или } m = 3k+2. \end{cases}$$

в)

$$\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_2, S_3) = \begin{cases} k, & \textit{если } m = 3k \\ k+1, & \textit{если } m = 3k+1 \textit{ или } m = 3k+2. \end{cases}$$

Доказательство. Из вида бикомплекса (2.1) получаем, что

$$Q_m(S_2) = \begin{cases} P_2^{k+1} \oplus P_3^k, & \text{если } m = 3k \\ P_1 \oplus P_2^k \oplus P_3^{k+1}, & \text{если } m = 3k+1 \\ P_2^{k+1} \oplus P_3^{k+1}, & \text{если } m = 3k+2, \end{cases}$$

откуда непосредственно вытекает требуемое утверждение.

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

Предложение 2.4. *Минимальная проективная резольвента R-модуля S_3 совпадает с тотализацией следующего бикомплекса:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
P_3 \arrow[d, "c"'] & P_3 \arrow[l, "-c^{n-1}"'] \arrow[d, "a_2"] & P_2 \arrow[l, "-\alpha_1 a_1 b_1 b_2"'] \arrow[d, "b_2"] & P_3 \arrow[l, "-\alpha_2 a_2 a_1 b_1"'] \arrow[d, "c^{n-1}"] & \cdots \arrow[l] \\
P_3 \arrow[d, "a_2"'] & P_2 \arrow[l, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2"'] \arrow[d, "b_2"] & P_3 \arrow[l, "\alpha_2 a_2 a_1 b_1"'] \arrow[d, "c^{n-1}"] & P_3 \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "\alpha_2 a_2 a_1 b_1"] & \cdots \arrow[l] \\
P_2 \arrow[d, "b_2"'] & P_3 \arrow[l, "-\alpha_2 a_2 a_1 b_1"'] \arrow[d, "c^{n-1}"] & P_3 \arrow[l, "-c"'] \arrow[d, "\alpha_2 a_2 a_1 b_1"] & P_2 \arrow[l, "-b_2"'] \arrow[d, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2"] & \cdots \arrow[l] \\
P_3 & P_3 \arrow[l, "c"'] & P_2 \arrow[l, "b_2"'] & P_3 \arrow[l, "a_2"'] & \cdots \arrow[l, "c"']
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Следствие 2.5. *Диаграмма модуля $\Omega^m(S_3)$, $m \geqslant 3$, получается из диаграммы модуля $\Omega^{m-2}(S_3)$ с помощью следующих операций:*

а) *Если $m \equiv 0 \pmod 3$, то слева (соответственно справа) присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_3 & \\ \alpha_1a_1b_1b_2 & \diagdown & & \diagup & b_2 \\ & & S_2 & & \end{array}$$

(соответственно

$$\begin{array}{ccccc} & S_2 & & S_3 & \\ a_2 & \diagdown & & \diagup & c^{n-1} \\ & & S_3 & & \end{array}).$$

б) *Если $m \equiv 1 \pmod 3$, то слева (соответственно справа) присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_2 & \\ c^{n-1} & \diagdown & & \diagup & a_2 \\ & & S_3 & & \end{array}$$

(соответственно

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_2 & \\ c & \diagdown & & \diagup & \alpha_2a_2a_1b_1 \\ & & S_3 & & \end{array}).$$

в) *Если $m \equiv 2 \pmod 3$, то слева (соответственно справа) присоединяется зигзаг*

$$\begin{array}{ccccc} & S_2 & & S_3 & \\ \alpha_2a_2a_1b_1 & \diagdown & & \diagup & c \\ & & S_3 & & \end{array}$$

(соответственно

$$\begin{array}{ccccc} & S_3 & & S_3 & \\ b_2 & \diagdown & & \diagup & \alpha_1a_1b_1b_2 \\ & & S_2 & & \end{array}).$$

Следствие 2.6.

а)

$$\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_3, S_2) = \begin{cases} k, & \textit{если } m = 3k \\ k+1, & \textit{если } m = 3k+1 \textit{ или } m = 3k+2; \end{cases}$$

б)

$$\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_3, S_3) = \begin{cases} 2k+1, & \textit{если } m = 3k \textit{ или } m = 3k+1 \\ 2k+2, & \textit{если } m = 3k+2. \end{cases}$$

Предложение 2.7. *R-модуль S_1 является периодическим с периодом 3, т.е. $\Omega^3(S_1) \simeq S_1$. При этом*

$$Q_m(S_1) = \begin{cases} P_2, & \textit{если } m \equiv 1 \pmod 3 \\ P_1, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, сизигии $\Omega^1(S_1)$ и $\Omega^2(S_1)$ – цепные модули длины $4e-1$:

$$\Omega^1(S_1) = U(S_2, S_3, S_2, \dots, S_2, S_1), \quad \Omega^2(S_1) = U(S_1, S_2, S_3, \dots, S_3, S_2).$$

Замечание. 1) Пусть $B_{\bullet\bullet}$ – один из бикомплексов (2.1) или (2.2). В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении

$$Q_m(S_t) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$$

по возрастанию второго индекса. Например, $Q_5(S_2) = P_3 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_2$. В соответствии с этим упорядочиваем также простые прямые слагаемые модуля $\operatorname{top}\Omega^m(S_t) \simeq \operatorname{top}Q_m(S_t)$. Если $\pi : \operatorname{top}\Omega^m(S_t) \to S_l$ – каноническая проекция на некоторое прямое слагаемое, то композиция π с каноническим эпиморфизмом $\Omega^m(S_t) \to \operatorname{top}\Omega^m(S_t)$ называется каноническим отображением.

2) Дифференциалы в минимальной проективной резольвенте модуля S_i, $i = 1, 2, 3$, в дальнейшем обозначаем через $d_m^{(i)}$, $m \geqslant 0$.

§3. Образующие для $\mathcal{E}(\overline{R})$

Пусть по-прежнему $R = R_{e,n}$. В этом параграфе мы укажем (конечное) множество образующих для k-алгебры $\mathcal{E}(\overline{R})$. Мы выберем некоторые однородные элементы из

$$\mathcal{E}(\overline{R}) = \operatorname{Ext}_R^*(\overline{R}, \overline{R}) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \bigoplus_{i,j=1}^{3} \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j)$$

степени 1 –

$$x_1 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_3,S_3),\ x_2 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_3,S_2),\ x_3 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_2,S_1),$$
$$x_4 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_2),\ x_5 \in \mathrm{Ext}^1_R(S_2,S_3);$$

степени 2 –

$$y_1 \in \mathrm{Ext}^2_R(S_3,S_3),\ y_2 \in \mathrm{Ext}^2_R(S_2,S_2);$$

степени 3 –

$$z_1 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_2,S_2),\ z_2 \in \mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_1).$$

Поскольку $\mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j) \simeq \mathrm{Hom}(\Omega^m(S_i),S_j)$, то любой элемент $\zeta \in \mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j)$ можно представить с помощью отображения $\hat\zeta$, входящего в следующую коммутативную диаграмму (см. [3]):

$$\begin{tikzcd} Q_m(S_i) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & \Omega^m(S_i) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\hat\zeta"] & Q_{m-1}(S_i) \arrow[d, "f_0"] \\ Q_0(S_j) \arrow[r] & S_j \arrow[r, phantom, "\subset"] & P_j. \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Диаграмму (3.1), а также диаграммы, аналогичные ей, можно кратко изображать в виде

$$\hat\zeta : \quad \begin{tikzcd} Q_m(S_i) \arrow[r, "d^{(i)}_{m-1}"] \arrow[d, "f_1"'] & Q_{m-1}(S_i) \arrow[d, "f_0"] \\ Q_0(S_j) \arrow[r] & P_j, \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

поскольку коммутативный квадрат (3.2) однозначно определяет отображение $\hat\zeta$ из (3.1).

Аналогично Ω-сдвиги $\Omega^t(\hat\zeta)$, $t \geqslant 1$, отображения $\hat\zeta$ из (3.1) можно описать с помощью коммутативных квадратов

$$\Omega^t(\hat\zeta) : \quad \begin{tikzcd} Q_{m+t}(S_i) \arrow[r, "d^{(i)}_{m+t-1}"] \arrow[d, "f_{t+1}"'] & Q_{m+t-1}(S_i) \arrow[d, "f_t"] \\ Q_t(S_j) \arrow[r, "d^{(j)}_{t-1}"] & Q_{t-1}(S_j) \end{tikzcd}$$

(здесь $\{f_l\}$ – цепное отображение резольвент, полученное подъемом отображения $\hat{\zeta}$).

В таких обозначениях элементы $x_i, y_i, z_i \in \mathcal{E}(\overline{R})$ мы зададим с помощью следующих коммутативных квадратов:

$$\hat{x}_1: \begin{tikzcd} Q_1(S_3) \arrow[r, "d_0^{(3)}"] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Q_0(S_3) \arrow[d, "c^{n-1};"] \\ Q_0(S_3) \arrow[r, "c^n"'] & P_3 \end{tikzcd}$$

$$\hat{x}_2: \begin{tikzcd} Q_1(S_3) \arrow[r, "d_0^{(3)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"'] & Q_0(S_3) \arrow[d, "\alpha_2 a_2 a_1 b_1;"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r, "(a_1 b_1 b_2 a_2)^e"'] & P_2 \end{tikzcd}$$

$$\hat{x}_3: \begin{tikzcd} Q_1(S_2) \arrow[r, "d_0^{(2)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"'] & Q_0(S_2) \arrow[d, "\beta_2 b_2 a_2 a_1;"] \\ Q_0(S_1) \arrow[r, "(b_1 b_2 a_2 a_1)^e"'] & P_1 \end{tikzcd}$$

$$\hat{x}_4: \begin{tikzcd} Q_1(S_1) \arrow[r, "d_0^{(1)}"] \arrow[d, "id"'] & Q_0(S_1) \arrow[d, "\beta_1 b_1 b_2 a_2;"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r, "(a_1 b_1 b_2 a_2)^e"'] & P_2 \end{tikzcd}$$

$$\hat{x}_5: \begin{tikzcd} Q_1(S_2) \arrow[r, "d_0^{(2)}"] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Q_0(S_2) \arrow[d, "\alpha_1 a_1 b_1 b_2;"] \\ Q_0(S_3) \arrow[r, "c^n"'] & P_3 \end{tikzcd}$$

$$\hat{y}_1: \begin{tikzcd} Q_2(S_3) \arrow[r, "d_1^{(3)}"] \arrow[d, "{(0,1,0)}"'] & Q_1(S_3) \arrow[d, "{(c,0);}"] \\ Q_0(S_3) \arrow[r, "c^n"'] & P_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Q_2(S_2) \arrow[r, "d_1^{(2)}"] \arrow[d, "(0{,}1)"'] & Q_1(S_2) \arrow[d, "(0{,}-b_1);"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r, "(a_1b_1b_2a_2)^e"'] & P_2 \end{tikzcd} \qquad \hat{y}_2 :$$

$$\begin{tikzcd} Q_3(S_2) \arrow[r, "d_2^{(2)}"] \arrow[d, "(0{,}0{,}1)"'] & Q_2(S_2) \arrow[d, "(0{,}\beta_2b_2a_2);"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r, "(a_1b_1b_2a_2)^e"'] & P_2 \end{tikzcd} \qquad \hat{z}_1 :$$

$$\begin{tikzcd} Q_3(S_1) \arrow[r, "d_2^{(1)}"] \arrow[d, "id"'] & Q_2(S_1) \arrow[d, "id."] \\ Q_0(S_1) \arrow[r, "(b_1b_2a_2a_1)^e"'] & P_1 \end{tikzcd} \qquad \hat{z}_2 :$$

Предложение 3.1. *Ω-сдвиги отображений $\hat{x}_i$, $i = 1, \dots, 5$, $\hat{y}_j$, $j = 1, 2$, $\hat{z}_t$, $t = 1, 2$, описываются с помощью коммутативных квадратов следующих диаграмм:*

1) $\Omega^2(\hat{x}_1)$ $\Omega^2(\hat{x}_1)$

$$\begin{tikzcd} Q_3(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_{2,n} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & Q_2(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & c^{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}"] & Q_1(S_3) \arrow[d, "(1,0)"] \\ Q_2(S_3) \arrow[r] & Q_1(S_3) \arrow[r] & Q_0(S_3); \end{tikzcd}$$

2) $\Omega^3(\hat{x}_2)$ $\Omega^2(\hat{x}_2)$ $\Omega^1(\hat{x}_2)$

$$\begin{tikzcd} Q_4(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}"'] & Q_3(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & Q_2(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_2a_2a_1 & 0 \end{pmatrix}"] & Q_1(S_3) \arrow[d, "(0,1)"] \\ Q_3(S_2) \arrow[r] & Q_2(S_2) \arrow[r] & Q_1(S_2) \arrow[r] & Q_0(S_2); \end{tikzcd}$$

3) $\Omega^3(\hat{x}_3) \qquad \Omega^2(\hat{x}_3) \qquad \Omega^1(\hat{x}_3)$

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,0,0,-1)}"'] & Q_3(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,0,-\beta_2 b_2 a_2 a_1)}"] & Q_2(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{(0,-\beta_2 b_2 a_2)}"] & Q_1(S_2) \arrow[d, "{(0,1)}"] \\
Q_3(S_1) \arrow[r] & Q_2(S_1) \arrow[r] & Q_1(S_1) \arrow[r] & Q_0(S_1);
\end{tikzcd}$$

4) $\Omega^3(\hat{x}_4) \qquad \Omega^2(\hat{x}_4) \qquad \Omega^1(\hat{x}_4)$

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_1) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & Q_3(S_1) \arrow[r] \arrow[d] & Q_2(S_1) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -b_1 \end{smallmatrix}\right)}"'] & Q_1(S_1) \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}"', "id"] \\
Q_3(S_2) \arrow[r] & Q_2(S_2) \arrow[r] & Q_1(S_2) \arrow[r] & Q_0(S_2);
\end{tikzcd}$$

5) $\Omega^3(\hat{x}_5) \qquad \Omega^2(\hat{x}_5) \qquad \Omega^1(\hat{x}_5)$

$$\begin{tikzcd}
Q_4(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 a_1 b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"'] & Q_3(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"] & Q_2(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 a_1 b_1 \end{smallmatrix}\right)}"] & Q_1(S_2) \arrow[d, "{(1,0)}"] \\
Q_3(S_3) \arrow[r] & Q_2(S_3) \arrow[r] & Q_1(S_3) \arrow[r] & Q_0(S_3);
\end{tikzcd}$$

6)

$$\Omega^1(\hat{y}_1): \quad \begin{tikzcd}
Q_3(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}"] & Q_2(S_3) \arrow[d, "{(0,1,0)}"] \\
Q_1(S_3) \arrow[r] & Q_0(S_3);
\end{tikzcd}$$

7)

$$\Omega^1(\hat{z}_2): \quad \begin{tikzcd}
Q_4(S_1) \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & Q_3(S_1) \arrow[d, "id"] \\
Q_1(S_1) \arrow[r] & Q_0(S_1);
\end{tikzcd}$$

8) $\qquad \Omega^3(\hat{y}_2) \qquad \Omega^2(\hat{y}_2) \qquad \Omega^1(\hat{y}_2)$

$$\begin{tikzcd}
Q_5(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)"] & Q_4(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & Q_3(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{smallmatrix}\right)"] & Q_2(S_2) \arrow[d, "{(0,1)}"] \\
Q_3(S_2) \arrow[r] & Q_2(S_2) \arrow[r] & Q_1(S_2) \arrow[r] & Q_0(S_2);
\end{tikzcd}$$

9) $\qquad \Omega^2(\hat{z}_1) \qquad \Omega^1(\hat{z}_1)$

$$\begin{tikzcd}
Q_5(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & Q_4(S_2) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \beta_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & Q_3(S_2) \arrow[d, "{(0,0,1)}"] \\
Q_2(S_2) \arrow[r] & Q_1(S_2) \arrow[r] & Q_0(S_2)
\end{tikzcd}$$

Доказательство состоит в непосредственной проверке коммутативности приведенных диаграмм и предоставляется читателю.

В следующем предложении мы укажем базисные элементы (над k) для некоторых групп $\operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j)$ для $m \leqslant 3$.

Предложение 3.2. *Как k-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют указанные линейно независимые множества образующих:*

а) *для $m = 2$:*

$$\operatorname{Ext}^2_R(S_2, S_3) = \langle x_1x_5 \rangle, \ \ \operatorname{Ext}^2_R(S_2, S_2) = \langle y_2 \rangle,$$
$$\operatorname{Ext}^2_R(S_3, S_2) = \langle x_2x_1 \rangle \quad \operatorname{Ext}^2_R(S_1, S_1) = \langle x_3x_4 \rangle$$
$$\operatorname{Ext}^2_R(S_3, S_3) = \langle y_1, x_5x_2 \rangle;$$

б) *для $m = 3$:*

$$\operatorname{Ext}^3_R(S_2, S_3) = \langle y_1x_5 \rangle, \quad \operatorname{Ext}^3_R(S_2, S_2) = \langle x_2x_1x_5, z_1 \rangle$$
$$\operatorname{Ext}^3_R(S_1, S_1) = \langle z_2 \rangle.$$

Доказательство. В тех случаях, когда $\dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_iS_j) = 1$, достаточно убедиться, что указанные элементы отличны от нуля, что проверяется непосредственно. Если же $\dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_i, S_j) > 1$, то следует проводить более подробные вычисления, что мы проиллюстрируем на примере группы $\operatorname{Ext}^2_R(S_3, S_3)$. Элемент $x_5x_2 \in$

$\mathrm{Ext}^2_R(S_3, S_3)$ представляется гомоморфизмом $\widehat{x_5 x_2} = \hat{x}_5 \circ \Omega^1(\hat{x}_2)$: $\Omega^2(S_3) \to S_3$, а эта композиция описывается с помощью объемлющего квадрата следующей диаграммы:

$$\begin{array}{rccc}
 & Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\
\Omega^1(\hat{x}_2): & \Big\downarrow {\scriptstyle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_2 a_2 a_1 & 0 \end{pmatrix}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (0,1)} \\
 & Q_1(S_2) & \longrightarrow & Q_0(S_2) \\
\hat{x}_5: & \Big\downarrow {\scriptstyle (1,0)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \alpha_1 a_1 b_1 b_2} \\
 & Q_0(S_3) & \longrightarrow & P_3.
\end{array}$$

Сравнивая отображения $\widehat{x_5 x_2}$ и $\hat{y}_1$, видим, что они линейно независимы, и остается учесть, что $\dim_k \mathrm{Ext}^2_R(S_3, S_3) = 2$. Оставшиеся случаи предоставляется проверить читателю. Отметим только, что при этом следует использовать Предложение 3.1, а также Следствия 2.3 и 2.6.

Предложение 3.3. *Любое каноническое отображение $f : \Omega^m(S_2) \to S_i$ $(i = 1, 2, 3)$ представляется в виде композиции отображений $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_5$, $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{z}_1$, а также их Ω-сдвигов.*

Доказательство. Для $m \leqslant 3$ требуемое утверждение следует непосредственно из Предложения 3.2. Предположим, что $m > 3$.

Случай 1: $m \equiv 1 \pmod 3$. Напомним, что диаграмма модуля $\Omega^m(S_2)$ получается из диаграммы модуля $\Omega^{m-2}(S_2)$ с помощью операций, описанных в следствии 2.2.

а) Если f индуцирует нулевое отображение на крайних (слева и справа) простых прямых слагаемых модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$, то существует гомоморфизм $f' : \Omega^{m-2}(S_2) \to S_i$ такой, что $f = f'\rho$, где $\rho : \Omega^m(S_2) \to \Omega^{m-2}(S_2)$ – канонический эпиморфизм. Так как $\rho = \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$ для некоторого гомоморфизма $\tilde{\rho} : \Omega^2(S_2) \to S_2$, то требуемое утверждение получается (с учетом Предложения 3.2) индукцией по m.

б) Предположим теперь, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$. Заметим, что $\Omega^m(S_2)$ имеет фактормодуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 & S_3(*) & & S_3 & \\
\alpha_1 a_1 b_1 b_2 & \searrow & & \swarrow & b_2. \\
 & & S_2 & &
\end{array} \qquad (3.3)$$

При этом f проходит через U, т.е. $f = f'\rho_1$, где $\rho_1 : \Omega^m(S_2) \to U$ канонический эпиморфизм. Кроме того, мы будем помечать звездочкой тот простой модуль из $\mathrm{top}U$, на котором f индуцирует ненулевое отображение. Далее, модуль U вкладывается в $\Omega^1(S_2)$, поскольку диаграмма модуля $\Omega^1(S_2)$ имеет открытое подмножество вида (3.3). Докажем, что гомоморфизм $f' : U \to S_3$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f'' : \Omega^1(S_2) \to S_3$, т.е. $f' = f''\rho_2$, где $\rho_2 : U \to \Omega^1(S_2)$ – вложение. Действительно, так как $\mathrm{Soc}U = S_2$ содержится в $\mathrm{Ker}f'$, то f' проходит через модуль $U/S_2 \simeq V \oplus S_3$, где $V = U(S_3, \dots, S_1)$, причем на S_3 соответствующее индуцированное отображение равно 0, и следовательно, оно продолжается (с помощью доопределения нулем) до гомоморфизма $\Omega^1(S_2)/S_2 \to S_3$. Тогда в качестве f'' берем композицию последнего гомоморфизма с каноническим эпиморфизмом $\Omega^1(S_2) \to \Omega^1(S_2)/S_2$. Таким образом, $f = f''\rho_2\rho_1$, где $\rho = \rho_2\rho_1 : \Omega^m(S_2) \to \Omega^1(S_2)$ имеет вид $\rho = \Omega^1(\tilde{\rho})$ для некоторого $\tilde{\rho} : \Omega^{m-1}(S_2) \to S_2$, и остается вновь использовать индукцию по m.

в) Наконец, предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа простом прямом слагаемом в $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$. В этом случае мы аналогично предыдущему используем фактормодуль (соответственно подмодуль) модуля $\Omega^m(S_2)$ (соответственно $\Omega^1(S_2)$), имеющий диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S_2 & & & S_1(*) & \\ a_1b_1 & \searrow & \swarrow & & \beta_2b_2a_2a_1. \\ & & S_2 & & \end{array}$$

Случай 2: $m \equiv 2 \pmod 3$. Если $f : \Omega^m(S_2) \to S_j$ индуцирует нулевое отображение на крайнем слева (простом) прямом слагаемом модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$, то требуемое утверждение получаем аналогично случаю 1а). Если же $f : \Omega^m(S_2) \to S_3$ индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$, то непосредственно видно, что f проходит через канонический эпиморфизм $\rho : \Omega^m(S_2) \to \Omega^2(S_2)$, и далее доказательство завершается аналогично случаю 1б).

Случай 3: $m \equiv 0 \pmod 3$. Сейчас диаграмма модуля $\Omega^{m-4}(S_2)$, а не модуля $\Omega^{m-2}(S_2)$, является поддиаграммой диаграммы модуля

$\Omega^m(S_2)$ (см. Следствие 2.2). Поэтому для проведения индукции по m рассуждаем аналогично случаю 1а) с заменой $\Omega^{m-2}(S_2)$ на $\Omega^{m-4}(S_2)$ (следует учесть, что сейчас $m \geqslant 6$). Однако затем надо рассматривать такие отображения f, которые индуцируют ненулевое отображение либо на одном из двух крайних слева, либо на крайнем справа простом прямом слагаемом модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$.

Пусть f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$. Тогда f проходит через фактормодуль U модуля $\Omega^m(S_2)$, имеющий диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} & S_2(*) & & & S_3 & & & S_3 & \\ \alpha_2a_2a_1b_1 & & \searrow & \swarrow c & \alpha_1a_1b_1b_2 & \searrow & \swarrow & b_2. \\ & & & S_3 & & & S_2 & & \end{array} \qquad (3.4)$$

Учитывая, что U вкладывается в модуль $\Omega^3(S_2)$, завершаем доказательство требуемого утверждения аналогично случаю 1б).

Если f индуцирует ненулевое отображение на втором слева прямом слагаемом в $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$, то аналогично предыдущему вновь используем модуль U с диаграммой (3.4) (на сей раз звездочка должна стоять у среднего слагаемого в $\mathrm{top}U$).

Наконец, в случае, когда f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа прямом слагаемом модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_2)$, то аналогичным образом используем модуль с диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} & S_2 & & S_2(*) & \\ a_1b_1 & \searrow & & \swarrow & \beta_2b_2a_2, \\ & & S_2 & & \end{array}$$

который одновременно является фактормодулем модуля $\Omega^m(S_2)$ и подмодулем в $\Omega^3(S_2)$.

Предложение 3.4. *Любое каноническое отображение $f\colon \Omega^m(S_3) \to S_i$ $(i = 2, 3)$ представляется в виде композиции отображений $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_5$, $\hat{y}_1$, а также их Ω-сдвигов.*

Доказательство. Для $m \leqslant 2$ утверждение непосредственно вытекает из Предложения 3.2. Предположим, что $m \geqslant 3$. Напомним, что диаграмма модуля $\Omega^m(S_3)$ получается из диаграммы модуля $\Omega^{m-2}(S_3)$ с помощью операций, описанных в Следствии 2.5. Поэтому рассуждения, аналогичные случаю 1а) из доказательства Предложения 3.3, позволяют ограничиться в дальнейшем рассмотрением только таких f, которые индуцируют ненулевые отображения на крайних (слева и справа) простых прямых слагаемых модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_3)$. В этих случаях проводятся однотипные рассуждения, аналогичные случаю 1б) доказательства Предложения 3.3, в которых данное отображение f проводится через некоторый модуль U, являющийся одновременно фактормодулем модуля $\Omega^m(S_3)$ и подмодулем в некотором $\Omega^i(S_3)$, где $i \leqslant 2$. Поэтому мы, разбирая ниже различные случаи, будем только указывать диаграмму подходящего модуля U. Кроме того, ввиду Следствия 2.5 имеется право-левая симметрия между присоединяемыми к диаграмме $\Omega^{m-2}(S_3)$ зигзагами (если их рассматривать в совокупности по всем трем случаям а), б), в) Следствия 2.5). Это позволяет ограничиться рассмотрением только таких f, которые индуцируют ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом модуля $\mathrm{top}\Omega^m(S_3)$.

Если $m \equiv 0 \pmod 3$, то надо рассматривать модуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} S_3(*) & & & & S_3 \\ & \alpha_1 a_1 b_1 b_2 \searrow & & \swarrow b_2 & & \searrow c \\ & & S_2 & & & & S_3 \end{array} ;$$

при этом $U \subset \Omega^2(S_3)$. Если $m \equiv 1 \pmod 3$, то рассматриваем модуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_3(*) & & S_2 \\ c^{n-1} \searrow & & \swarrow a_2 \\ & S_3, & \end{array}$$

а если $m \equiv 2 \pmod 3$, то рассматриваем модуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_2(*) & & S_3 \\ \alpha_2 a_2 a_1 b_1 \searrow & & \swarrow c. \\ & S_3 & \end{array}$$

В последних двух случаях соответствующий модуль U вкладывается в $\Omega^1(S_3)$.

Предложение 3.5. *Любое каноническое отображение* $f\colon \Omega^m(S_1) \to S_i$ $(i = 1, 2)$ *представляется в виде композиции отображений* $\hat{x}_3$, $\hat{x}_4$, $\hat{z}_2$, *а также их* Ω*-сдвигов.*

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из периодичности модуля S_1 (см. Предложение 2.7) и из Предложения 3.2.

Из Предложений 3.3–3.5 непосредственно вытекает

Следствие 3.6. k*-алгебра* $\mathcal{E}(\overline{R})$ *порождается элементами*

$$x_i (i = 1, \dots, 5), \quad y_j (j = 1, 2), \quad z_t (t = 1, 2). \tag{3.5}$$

§4. Соотношения

По-прежнему, R обозначает одну из алгебр $R_{e,n}$.

Предложение 4.1. *Для образующих* (3.5) *алгебры* $\mathcal{E}(\overline{R})$ *выполняются соотношения* (1.1), *а также*

$$x_1^2 = \begin{cases} y_1, & \text{если} \quad n = 2 \\ 0, & \text{если} \quad n > 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Доказательство. Все соотношения проверяются единообразно. Для иллюстрации используемой техники мы докажем только соотношение (4.1), а также последнее соотношение из (1.1). Проверка остальных соотношений предоставляется читателю.

Элемент x_1^2 представляется отображением $\widehat{x_1^2} = \hat{x}_1 \circ \Omega^1(\hat{x}_1)$, а последнее задается объемлющим квадратом следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{lc} & \begin{tikzcd} Q_2(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & c^{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & Q_1(S_3) \arrow[d, "{(1,0)}"] \\ Q_1(S_3) \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Q_0(S_3) \arrow[d, "c^{n-1}"] \\ Q_0(S_3) \arrow[r, "c^n"'] & P_3. \end{tikzcd} \end{array}$$

$\Omega^1(\hat{x}_1)$: (верхний квадрат); $\hat{x}_1$: (нижний квадрат)

При $n > 2$ композиция $c^n(0, c^{n-2}, 0)$ равна нулю, и следовательно, $x_1^2 = 0$. С другой стороны, при $n = 2$ этот объемлющий квадрат описывает в точности отображение $\hat{y}_1$.

Далее, элементы $z_1 y_2$ и $y_2 z_1$ представляются отображениями $\hat{z}_1 \circ \Omega^3(\hat{y}_2)$ и $\hat{y}_2 \circ \Omega^2(\hat{z}_1)$ соответственно:

$$
\begin{array}{lc}
\Omega^3(\hat{y}_2): & \begin{tikzcd} Q_5(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}"] & Q_4(S_2) \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}"] \\ Q_3(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "{(0,0,1)}"] & Q_2(S_2) \arrow[d, "{(0,\beta_2 b_2 a_2)}"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r] & P_2 \end{tikzcd} , \\
\hat{z}_1: &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lc}
\Omega^2(\hat{z}_1): & \begin{tikzcd} Q_5(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Q_4(S_2) \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}"] \\ Q_2(S_2) \arrow[r] \arrow[d, swap, "{(0,1)}"] & Q_1(S_2) \arrow[d, "{(0,-b_1)}"] \\ Q_0(S_2) \arrow[r] & P_2 \end{tikzcd} . \\
\hat{y}_1: &
\end{array}
$$

Сравнение объемлющих квадратов последних двух диаграмм приводит к соотношению $z_1 y_2 = -y_2 z_1$.

Пусть $\mathcal{E} = k[\mathcal{R}]/I$ (соответственно $\mathcal{E}' = k[\mathcal{R}]/I'$) – k-алгебра, определенная в §1, где I (соответственно I') – идеал в алгебре путей $k[\mathcal{R}]$ колчана $\mathcal{R}$, порожденный элементами, соответствующими соотношениям (1.1) и (1.2) (соответственно (1.1) и (1.2$'$)).

Если $n > 2$, то ввиду Предложения 4.1 существует сюръективный гомоморфизм градуированных k-алгебр $\mathcal{E} \to \mathcal{E}(\overline{R})$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$ (т.е. соответствующие стрелкам в $\mathcal{R}$) в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{E}(\overline{R})$, введенные в §3. Если $n = 2$, то имеется аналогичный сюръективный гомоморфизм $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}(\overline{R})$.

Далее мы будем рассматривать только случай $n > 2$. Для $n = 2$ в нижеследующих рассуждениях необходимо сделать соответствующие изменения, и мы это предоставляем читателю.

Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение, соответствующее градуировке на $\mathcal{E}$ (см. §1). Через e_1, e_2, e_3 обозначим идемпотенты алгебры $k[\mathcal{R}]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{R}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Для завершения доказательства Теоремы 1.1 (для случая $n > 2$) достаточно доказать, что для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и любых $m \geqslant 0$

$$\dim_k(e_i\mathcal{E}^m e_j) = \dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_j, S_i). \tag{4.2}$$

Мы сделаем это в несколько шагов. Поскольку для $m = 0$ соотношение (4.2) очевидно, то в дальнейшем предполагаем, что $m \geqslant 1$.

Предложение 4.2. $\dim_k(e_2\mathcal{E}^m e_2) = \dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_2, S_2)$.

Доказательство. Введем обозначение $d_m = \dim_k(e_2\mathcal{E}^m e_2)$. Заметим, что как k-алгебра $e_2\mathcal{E}e_2$ порождается элементами y_2, z_1 и $z' = x_2x_1x_5$. Поскольку $z_1y_2 = -y_2z_1$, $z_1z' = 0 = z'z_1$, $y_2z' = -z'y_2$, то “одночлены” вида $y_2^s z_1^t$, $y_2^s(z')^t$, где $2s + 3t = m$ $(s, t \geqslant 0)$, составляют k-базис пространства $e_2\mathcal{E}^m e_2$. Докажем, что

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2} + 2, & \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod 3 \\ d_{m-2}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Действительно, одночленам вида $y_2^s z_1^t$, $y_2^s(z')^t$, у которых $s > 0$, однозначно соответствуют элементы аналогичного k-базиса пространства $e_2\mathcal{E}^{m-2}e_2$ (например, достаточно опускать один сомножитель y_2). Кроме того, имеется два одночлена вида z_1^t, $(z')^t$ в точности, когда $m = 3t$, $t \in \mathbb{N}$.

Далее, последовательность $\{\dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_2, S_2)\}_{m\geqslant 1}$ ввиду Следствия 2.3б) удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.3). Остается заметить, что

$$d_1 = 0 = \dim_k \operatorname{Ext}^1_R(S_2, S_2), \quad d_2 = 1 = \dim_k \operatorname{Ext}^2_R(S_2, S_2).$$

Предложение 4.3. $\dim_k(e_3\mathcal{E}^m e_3) = \dim_k \operatorname{Ext}^m_R(S_3, S_3)$.

Доказательство. Вновь введем обозначение $d_m = \dim_k(e_3\mathcal{E}^m e_3)$. Докажем, что

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2} + 2, & \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod 3 \\ d_{m-2} + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Алгебра $e_3\mathcal{E}e_3$ порождается элементами $x_1, y_1, y' = x_5x_2$; при этом $x_1y_1 = y_1x_1$, $y_1y' = -y'y_1$, $x_1^2 = 0 = (y')^2$. Таким образом, k-базис пространства $e_3\mathcal{E}^m e_3$ состоит из "одночленов" следующих типов:

$$\begin{cases} y_1^s(x_1y')^t,\ y_1^s(y'x_1)^t, & \text{где } 2s+3t = m (s,t \geqslant 0),\\ y_1^s x_1(y'x_1)^t, & \text{где } 2s+3t+1 = m (s,t \geqslant 0),\\ y_1^s y'(x_1y')^t, & \text{где } 2s+3t+2 = m (s,t \geqslant 0). \end{cases} \tag{4.5}$$

Число одночленов вида (4.5), содержащих y_1, равно d_{m-2}. Рассмотрим теперь одночлены вида (4.5), не содержащие y_1. Для $m = 3t$, $t \in \mathbb{N}$, имеется два таких одночлена: $(x_1y')^t$ и $(y'x_1)^t$, а для $m = 3t+1$ или $m = 3t+2$ ($t \in \mathbb{N}$) – ровно один такой одночлен: $x_1(y'x_1)^t$ или $y'(x_1y')^t$ соответственно.

Остается заметить, что ввиду Следствия 2.6б) последовательность $\{\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_3,S_3)\}_{m\geqslant 1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.4), и что

$$d_1 = 1 = \dim_k \operatorname{Ext}_R^1(S_3,S_3), \quad d_2 = 2\dim_k \operatorname{Ext}_R^2(S_3,S_3).$$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 4.4. $\dim_k(e_1\mathcal{E}^m e_1) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_1,S_1)$.

Предложение 4.5. $\dim_k(e_2\mathcal{E}^m e_3) = \dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_3,S_2)$.

Доказательство. Всякий путь ρ из вершины 3 в вершину 2 колчана $\mathcal{R}$ (рассматриваемый как элемент алгебры $\mathcal{E}$) представляется в виде $\rho = w_1 \cdot x_2 \cdot w_2$, где $w_1 \in e_2\mathcal{E}e_2$, $w_2 \in e_3\mathcal{E}e_3$. Так как

$$y_2x_2 = x_2y_1, \quad z_1x_2 = 0 \quad \text{и} \quad z'x_2 = (x_2x_1x_5)x_2 = x_2(x_1x_5x_2),$$

то можно считать, что $\rho = x_2 \cdot w$, где $w \in e_3\mathcal{E}e_3$. Поскольку $x_2y' = 0$, размерность $d_m = \dim_k(e_2\mathcal{E}^m e_3)$ равна числу одночленов вида $y_1^s(x_1y')^t$ или $y_1^s x_1(y'x_1)^t$, для которых $2s+3t = m-1$ или $2s+3t+1 = m-1$ соответственно. Аналогично доказательствам Предложений 4.2 и 4.3 получаем, что

$$\begin{aligned} d_m - d_{m-2} &= \begin{cases} 0, & \text{если } m-1 \equiv 2 \pmod 3\\ 1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}\\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 0 \pmod 3\\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ввиду Следствия 2.6а) последовательность

$$\{\dim_k \operatorname{Ext}_R^m(S_3, S_2)\}_{m\geqslant 1}$$

удовлетворяет соотношению, аналогичному (4.6). Наконец, поскольку

$$d_1 = 1 = \dim_k \operatorname{Ext}_R^1(S_3, S_2), \quad d_2 = 1 = \dim_k \operatorname{Ext}_R^2(S_3, S_2),$$

то получаем требуемое утверждение.

Аналогичным образом доказывается справедливость соотношения (4.2) для оставшихся пар (i, j). Это завершает доказательство Теоремы 1.1.

Из приведенных в §§3, 4 рассуждений вытекает следующее описание Ext-алгебр

$$\mathcal{E}(S_i) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_i)$$

(относительно произведения Йонеды) простых R-модулей.

Предложение 4.6. а) $\mathcal{E}(S_1) \simeq k[\beta, \gamma]/(\beta^2)$, *где* $\deg\beta = 2$, $\deg\gamma = 3$.

б) $\mathcal{E}(S_2) \simeq k\langle\beta, \gamma_1, \gamma_2\rangle/(\gamma_1\beta+\beta\gamma_1, \gamma_2\beta+\beta\gamma_2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2\gamma_1)$, *где* $\deg\beta = 2$, $\deg\gamma_i = 3$ $(i = 1, 2)$.

в) *для* $n > 2$

$$\mathcal{E}(S_3) = k\langle\alpha, \beta_1, \beta_2\rangle/(\alpha\beta_1 - \beta_1\alpha, \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_1, \alpha^2, \beta_2^2),$$

где $\deg\alpha = 1$, $\deg\beta_i = 2$ $(i = 1, 2)$;
для $n = 2$

$$\mathcal{E}(S_3) = k\langle\alpha, \beta\rangle/(\alpha^2\beta + \beta\alpha^2, \beta^2),$$

где $\deg\alpha = 1$, $\deg\beta = 2$.

Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики 2. Для группы A_7 главный блок (алгебры $k[A_7]$) Морита-эквивалентен алгебре $R_{1,2}[6]$, при этом тривиальный модуль k соответствует вершине 2 колчана $\mathcal{R}$. Таким образом, Следствие 1.2 вытекает из Предложения 4.6б).

Литература

1. K. Erdmann, *Algebras and dihedral defect groups.* Proc. London Math. Soc., **54**, Pt. 1 (1987), 88–114.
2. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* Lecture Notes in Math., **1428** (1990) 311 pp.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. 3, No. 15 (1999) 3–10.
4. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology.* Commun. Algebra, **15**, No. 1/2 (1987), 53–121.
5. С. Маклейн, *Гомология.* М., Мир (1966).
6. K. Erdmann, *Principal blocks of groups with dihedral Sylow 2-subgroups.* Commun. Algebra, **5** (1977), 665–694.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of dihedral type, I.

The technique is developed which is related with Benson-Carlson diagrammatic method. Using this technique we describe Yoneda algebras of algebras constituting some series of algebras of dihedral type. We also describe Ext-algebras of simple modules over considered algebras.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 ноября 1999 г.