Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

А. И. Генералов, И. О. Исаметдинов

РАЗЛОЖЕНИНИЕ ГРУППЫ ГРОТЕНДИКА СТАБИЛЬНЫХ КАТЕГОРИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория(см. [1]), в которой классы изоморфизмов объектов образуют множество. Определим группу Гротендика $\mathrm{K}_0(\mathcal{T})$ категории $\mathcal{T}$ как свободную абелеву группу с базисом $[A]$, где A пробегает все классы изоморфизмов объектов из $\mathcal{T}$, профакторизованную по подгруппе, порождённой элементами $[A]-[B]+[C]$, соответствующим треугольникам в $\mathcal{T}$ вида $A \to B \to C \to A[1]$. Заметим, что непосредственно из определения следует:

1. $\mathrm{K}_0(\mathcal{T})$ состоит из элементов вида $[A]$, действительно, из существования треугольников:
$$A \to A \oplus B \to B \xrightarrow{0} A[1], A \to 0 \to A[1] \xrightarrow{\mathrm{id}} A[1]$$
следует, что $[A]+[B]=[A \oplus B]$, $-[A]=[A[1]]$.
2. Если существует отображение $\varphi : \mathrm{Ob}\mathcal{T} \to G$, где G – абелева группа и для любых $A, B, C \in \mathrm{Ob}\mathcal{T}$ таких, что существует треугольник $A \to B \to C \to A[1]$, выполнено: $\varphi(B)=\varphi(A)+\varphi(C)$, то существует и единственен гомоморфизм групп $\psi : \mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to G$ такой, что $\varphi = \psi\theta_{\mathcal{T}}$, где $\theta_{\mathcal{T}}$– каноническое отображение $\mathrm{Ob}\mathcal{T} \to \mathrm{K}_0(\mathcal{T})$.
3. Если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ – точный функтор между триангулированными категориями, то существует и единственен гомоморфизм групп $\mathrm{K}_0(F) : \mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{T}')$ такой, что коммутативна диаграмма:
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}\mathcal{T} & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{T}}} & \mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(F)} \\ \mathrm{Ob}\mathcal{T}' & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{T}'}} & \mathrm{K}_0(\mathcal{T}'). \end{array}$$

Полная подкатегория $\mathcal{A}$ в $\mathcal{T}$ называется триангулированной, если выполняются свойства:
1. $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X[1] \in \mathcal{A}$.

2. Если существует треугольник $A \to B \to C \to A[1]$ и $A, B \in \mathcal{A}$, то и $C \in \mathcal{A}$.

Полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A}$ в $\mathcal{T}$ называется плотной, если $\forall X \in \mathcal{T} \quad \exists Y \in \mathcal{T} : X \oplus Y \in \mathcal{A}$.

В [2, Следствие 2.3] доказано, что если $\mathcal{A}$ – плотная полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{T}$, то канонический гомоморфизм $i : \mathrm{K}_0(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}_0(\mathcal{T})$ является мономорфизмом.

Пусть $\Bbbk$ – поле, A – конечномерная $\Bbbk$-алгебра, $S_1, \ldots, S_n$ – все простые (попарно неизоморфные) A-модули, $P_1, \ldots, P_n$ – их проективные накрытия. Введём c_{ij} – число S_j как факторов в композиционном ряду P_i. Числа c_{ij} образуют матрицу $C(A)$, называемую матрицей Картана алгебры A.

Конечномерная $\Bbbk$-алгебра A называется квазифробениусовой, если левый модуль над A инъективен тогда и только тогда, когда он проективен. Заметим, что если G – конечная группа, то групповая алгебра $\Bbbk G$ – квазифробениусова, а матрица Картана $C(\Bbbk G)$ симметрична. В дальнейшем все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Обозначим через $\mathrm{mod}\, A$ категорию конечнопорождённых модулей над квазифробениусовой алгеброй A. Построим стабильную категорию $\mathrm{stmod} A$. Её объекты – те же, что и у $\mathrm{mod}\, A$, а морфизмы определяются так: если $M, N \in \mathrm{Ob}\,(\mathrm{mod}\, A)$, то $P(M,N)$ – подмножество, которое является подгруппой $\mathrm{Hom}_A(M,N)$, состоящее из тех морфизмов, которые пропускаются через объекты, проективные в $\mathrm{mod}\, A$, а

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{stmod} A}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/P(M,N).$$

В [3] доказано, что она может быть триангулирована следующим образом: для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{stmod} A)$ зафиксируем $X \xrightarrow{i_X} I(X)$, где i_X – вложение, $I(X)$ – инъективный модуль. Тогда можно построить короткую точную последовательность (в $\mathrm{mod}\, A$):

$$0 \to X \xrightarrow{i_X} I(X) \xrightarrow{\varepsilon_X} \Omega^{-1} X \to 0.$$

Ω^{-1} на морфизмах определяется естественным образом(см. [3]).

Пусть $E : 0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ – короткая точная последовательность в $\mathrm{mod}\, A$. Тогда существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \to 0 \\ & \| & & \downarrow \varphi & & \downarrow h & \\ 0 \to & X & \xrightarrow{i_X} & I(X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \Omega^{-1} X & \to 0. \end{array}$$

Класс морфизма h (в stmod$A$) не зависит от выбора φ. Тогда стандартным треугольником, ассоциированным с E, называется последовательность вида:

$$X \xrightarrow{\overline{f}} Y \xrightarrow{\overline{g}} Z \xrightarrow{-\overline{h}} \Omega^{-1} X,$$

где $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ – классы в stmod$A$ морфизмов f, g, h соответственно. Треугольником назовём любую последовательность вида $X' \xrightarrow{\overline{f'}} Y' \xrightarrow{\overline{g'}} Z' \xrightarrow{\overline{h'}} \Omega^{-1} X'$, изоморфную над stmod$A$ некоторому стандартному треугольнику.

Как сказано выше, этой триангулированной категории сопоставляется группа Гротендика $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\Bbbk G)$. Отметим, что $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\Bbbk G)$ может быть описана как коядро отображения Картана

$$c : \mathrm{K}_0(\mathrm{proj}\Bbbk G) \to \mathrm{K}_0\ (\mathrm{mod}\ \Bbbk G)$$

(см. [4, Предложение 1]; ср. также [5]); здесь proj$\Bbbk G$ – полная подкатегория в mod $\Bbbk G$, состоящая из проективных модулей.

Лемма 1. *Пусть A – квазифробениусова $\Bbbk$-алгебра, $S_1, \ldots, S_n$ – все простые (попарно неизоморфные) A-модули, M – некоторый конечнопорождённый A-модуль. Пусть m_i – число S_i как факторов в композиционном ряду M. Тогда в* $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}A)$ *:*

$$[M] = \sum_{i=1}^{n} m_i [S_i]$$

Доказательство. (Индукция по длине композиционного ряда.)

Если $M = 0$, то доказывать нечего. Иначе существует максимальный подмодуль $N \subset M$; пусть $M/N \cong S_i$. Если n_j – число S_j как факторов в композиционном ряду N, то $m_j = n_j (j \neq i), m_i = n_i + 1$. По индуктивному предположению,

$$[N] = \sum_{j=1}^{n} n_j [S_j] = \sum_{j=1}^{n} m_j [S_j] - [S_i].$$

С другой стороны, в $\operatorname{stmod} A$ существует треугольник

$$N \to M \to S_i \to \Omega^{-1} N.$$

Значит,

$$[M] = [N] + [S_i] = \sum_{j=1}^{n} m_j [S_j] - [S_i] + [S_i] = \sum_{j=1}^{n} m_j [S_j]. \quad \square$$

Пусть G – группа порядка $p^r m$, где p – простое число, $(m,p) = 1$, $r > 0$, H – силовская p-подгруппа в G, и пусть $\Bbbk$ – поле с $\operatorname{char}\Bbbk = p$. Так как $\Bbbk G$ – свободный $\Bbbk H$-модуль, а $\Bbbk H$ – локальное кольцо [6, Теорема 2.3.2], то любой проективный $\Bbbk G$-модуль P является свободным модулем над $\Bbbk H$, и следовательно, $\dim_{\Bbbk} P$ делится на p^r.

Построим гомоморфизм групп

$$\pi : \mathrm{K}_0(\operatorname{stmod}\Bbbk G) \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}, \quad [M] \mapsto \dim_{\Bbbk} M \pmod{p^r}.$$

Проверим корректность этого определения:

1. Если $M \cong N$ в $\operatorname{stmod}\Bbbk G$, то найдутся проективные $\Bbbk G$-модули P, Q такие, что $M \oplus P \cong N \oplus Q$ (в $\operatorname{mod}\Bbbk G$). Тогда $\dim_{\Bbbk} M - \dim_{\Bbbk} N = \dim_{\Bbbk} Q - \dim_{\Bbbk} P$ делится на p^r, и поэтому $\pi(M) = \pi(N)$.
2. Если $M_1 \to M_2 \to M_3 \to \Omega^{-1} M_1$ – треугольник в $\operatorname{stmod}\Bbbk G$, то существует короткая точная последовательность в $\operatorname{mod}\Bbbk G$

$$0 \to M_1' \to M_2' \to M_3' \to 0,$$

такая, что $M_i \cong M_i'$ в $\operatorname{stmod}\Bbbk G$, $i = 1, 2, 3$. И тогда

$$\pi(M_2) = \pi(M_2') = \pi(M_1') + \pi(M_3') = \pi(M_1) + \pi(M_3).$$

Пусть $\mathcal{T}$ – полная подкатегория в $\operatorname{stmod}\Bbbk G$, состоящая из модулей, чьи размерности делятся на p^r. Ясно, что $\mathcal{T}$ – плотная триангулированная подкатегория в $\operatorname{stmod}\Bbbk G$.

Предложение. *G – конечная группа, H – силовская p-подгруппа, $|H| = p^r$. Тогда имеет место короткая точная последовательность:*

$$0 \to \mathrm{K}_0(\mathcal{T}) \xrightarrow{i} \mathrm{K}_0(\operatorname{stmod}\Bbbk G) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \to 0. \qquad (*)$$

Доказательство. Ясно, что гомоморфизм π сюръективен. Кроме того, $[M] \in \ker \pi$ тогда и только тогда, когда $M \in \mathcal{T}$. $\square$

Сохраняя предыдущие обозначения и предположения, предположим дополнительно, что $H \lhd G$, а G/H – абелева группа. Кроме того предположим, что $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле. Следующее утверждение без сомнения хорошо известно, но авторы затрудняются дать соответствующую ссылку.

Лемма 2. *При выполнении предыдущих условий имеется ровно m (попарно неизоморфных) простых $\Bbbk G$-модулей: $S_1, \dots, S_m$, все они они одномерны, а их проективные накрытия $P_1, \dots, P_m$ имеют размерности* $\dim_{\Bbbk} P_i = p^r (i = 1, \dots, m)$.

Доказательство. Пусть M – простой $\Bbbk G$-модуль. Рассматриваемый как $\Bbbk H$-модуль M содержит простой $\Bbbk H$-модуль $S = {}_{\Bbbk H}\langle x \rangle$, который изоморфен тривиальному модулю $\Bbbk$. Построим линейное пространство $\widetilde{M}$, порождённое множеством $\{gx | x \in G\}$. Легко видеть, что $\widetilde{M}$ – $\Bbbk G$-модуль с тривиальным действием группы H, и поэтому $M = \widetilde{M}$ можно рассматривать как $\Bbbk(G/H)$-модуль. Так как G/H абелева, то $\dim_{\Bbbk} M = 1$ и имеется ровно $m = |G/H|$ попарно неизоморфных простых $\Bbbk(G/H)$-модулей (и следовательно, простых $\Bbbk G$-модулей).

Кроме того, если $\Bbbk G = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} P_i^{s_i}$, то

$$\dim_{\Bbbk} \Bbbk G = \sum_{i=1}^{m} s_i \dim_{\Bbbk} P_i \geqslant mp^r = |G|,$$

и следовательно, для любого i, $s_i = 1$ и $\dim_{\Bbbk} P_i = p^r$. $\square$

Теорема. *Пусть G – конечная группа, H – силовская p-подгруппа, $|H| = p^r (r > 0)$, $H \trianglelefteq G$, G/H – абелева группа, и пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле,* $\mathrm{char}\Bbbk = p$. *Тогда последовательность* $(*)$ *расщепляется. В часности,*

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\Bbbk G) \cong \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \oplus \mathrm{K}_0(\mathcal{T}).$$

Доказательство. Построим гомоморфизм групп

$$j : \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \to \mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\Bbbk G)$$

такой, что $j(m) = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} S_i$. Для проверки корректности этого определения надо доказать, что $p^r[\bigoplus\limits_{i=1}^{m} S_i] = 0$. Из леммы 2 следует, что

$\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij} = \dim_{\Bbbk} P_i = p^r$. А тогда, с учётом симметричности матрицы $C(\Bbbk G) = (c_{ij})$, получаем:

$$p^r[\bigoplus_{i=1}^{m} S_i] = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{m} c_{ij})[S_i] = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}[S_i]) = \sum_{j=1}^{m}[P_j] = 0.$$

Наконец, ясно, что $\pi \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}}$, и, таким образом, последовательность $(*)$ расщепляется. $\square$

Литература

1. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры.* т. 1, *Введение в теорию когомологий и производные категории*, М., Наука, 1988.
2. R. W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories.* Compos. Math., **105**, No. 1 (1997), 1–27.
3. D. Happel, *On the derived category of a finite-dimentional algebra.* Comment. Math. Helv., **62**, No. 3 (1987), 339–389.
4. H. Tachikawa, T. Wakamatsu, *Cartan matricies and Grothendieck groups of stable categories.* J. Algebra, **144**, No. 2 (1991), 390–398.
5. R. Martinez-Villa, *The stable group of a selfinjective Nakayama algebra.* Commun. Algebra, **19**, No. 2 (1991) 509–517.
6. И. Херстейн, *Некоммутативные кольца.* М., Мир, 1972.

Generalov A. I., Isametdinov I. O. Decomposition of Grothendieck group of stable categories of finite groups.

Let G be a finite group with a normal Sylow p-subgroup H such that the corresponding quotient is abelian. We prove that the Grothendieck group of the stable category of G (over an algebraically closed field with characteristic p) contains a cyclic direct summand of order $|H|$.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 25 декабря 1999 г.