Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

М. Б. Звягина

ЛОКАЛЬНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ МОДУЛЕЙ НАД НЕТЕРОВЫМИ КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

В статье [1] доказана общая теорема о существовании локальной двойственности: пусть Λ – ассоциативное кольцо с единицей, тогда всякая малая полная подкатегория категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ левых унитарных Λ-модулей двойственна малой полной подкатегории ${}_\Gamma\mathfrak{M}$ при некотором ассоциативном кольце с единицей Γ. Настоящая публикация является продолжением [1] и посвящена применениям доказанной теоремы к различным типам нетеровых коммутативных колец. Мы будем ссылаться на статью [1] специальным образом: так, ремарка "см. лемму [1] 2.2" отсылает читателя к лемме 2.2 из [1]. Основные обозначения и определения приведены в преамбуле и первом параграфе [1]; мы не станем их здесь воспроизводить. Кольцо Λ в настоящей работе, если не оговорено противное, предполагается нетеровым коммутативным.

Заметим, что в случае коммутативного Λ имеется естественный кольцевой гомоморфизм $\Lambda \to \Gamma({}_\Lambda V) = \mathrm{Hom}_\Lambda(V, V)$ при произвольном ${}_\Lambda V$, так что категория ${}_{\Gamma({}_\Lambda V)}\mathfrak{M}$ может быть отождествлена с подкатегорией ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, и функтор $G_\Lambda = \mathrm{Hom}_\Lambda(\ , V)$ действует на ${}_{\Gamma({}_\Lambda V)}\mathfrak{M}$. При этом имеется естественный мономорфизм

$$H_V(\mathcal{Y}) \to G_V(\mathcal{Y}) \quad \text{для} \quad {}_{\Gamma({}_\Lambda V)}\mathcal{Y}, \quad H_V = \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V)}(\ , V).$$

§1. Модули над локальными кольцами

В этом параграфе Λ – локальное нетерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$ и полем вычетов $k \simeq \Lambda/\mathfrak{M}$. Результаты, приведенные здесь, известны – см., например, [2, 3]. Мы выведем эти результаты из общей теоремы о локальной двойственности.

Лемма 1.1. *Пусть ${}_\Lambda V(\Lambda)$ – инъективная оболочка ${}_\Lambda k$, тогда*

(a) *модуль ${}_\Lambda V(\Lambda)$ – инъективный кообразующий;*

(b) $V(\Lambda) = \varinjlim G_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n)$;

(c) *кольцо* $\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))$ *изоморфно пополнению* $\widehat{\Lambda} = \varprojlim \Lambda/\mathfrak{M}^n$ *кольца* Λ.

Доказательство. (a) Утверждение непосредственно следует из леммы [1] 2.3.

(b)[1] Положим $V_1 = \{x \in V(\Lambda) \mid \mathfrak{M}^n x = 0$ при некотором $n\}$ и покажем, что $V_1 = V(\Lambda)$. Поскольку $k \subset V_1$ и ${}_\Lambda V(\Lambda)$ – инъективная оболочка ${}_\Lambda k$, для этого достаточно проверить инъективность ${}_\Lambda V_1$.

Пусть I – идеал кольца Λ; нам нужно показать, что всякий гомоморфизм Λ-модулей $I \xrightarrow{f} V_1$ продолжается до $\Lambda \to V_1$. Имеем

$$V_1^{(1)} \subset V_1^{(2)} \subset \ldots \subset V_1^{(n)} \subset V_1^{(n+1)} \subset \ldots,$$

где

$$V_1^{(n)} = \{x \in V(\Lambda) \mid \mathfrak{M}^n x = 0\}.$$

Очевидным образом

$$V_1^{(n)} \simeq G_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n), \quad V_1 \simeq \varinjlim G_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n).$$

В силу нетеровости кольца Λ идеал $I \subset \Lambda$ конечнопорожден, так что $f(I) \subset V_1^{(n)}$ при некотором n. Отсюда следует, что

$$f(\mathfrak{M}^n I) = \mathfrak{M}^n f(I) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathfrak{M}^n I \subset \ker f.$$

Докажем теперь вспомогательно утверждение:

(b_1) Пусть $J \subset I \subset \mathfrak{M}$ – такие идеалы кольца Λ, что $\mathfrak{M}^r I \subset J$ для некоторого натурального r. Тогда существует такое натуральное n, что $\mathfrak{M}^n \cap I \subset J$.

Действительно, в силу конечной порожденности идеала I и очевидного равенства $\mathfrak{M}^r(I/J) = 0$ I/J есть Λ-модуль конечной длины. Пусть $I = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_m = J$ – такая цепочка идеалов, что все X_i/X_{i+1} неприводимы. Мы будем доказывать утверждение индукцией по m; случай $m = 0$ тривиален. Пусть $m \geqslant 1$ и уже доказано, что существует такое n_1, что $\mathfrak{M}^{n_1} \cap I \subset X_{m-1}$. Кольцо Λ/J является коммутативным локальным кольцом с максимальным идеалом $\mathfrak{M}/J$, и по лемме Крулля существует такое n_2, что $(\mathfrak{M}/J)^{n_2} \not\supset X_{m-1}/J$. Пусть $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, тогда $(\mathfrak{M}/J)^n \cap I/J \subset X_{m-1}/J$, но $(\mathfrak{M}/J)^n \not\supset X_{m-1}/J$. Поскольку X_{m-1}/J

[1] Доказательство сообщено автору А. В. Яковлевым

– неприводимый модуль, это означает, что $(\mathfrak{M}/J)^n \cap (I/J) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{M}^n \cap I \subset J$, что и требовалось.

Утверждение (b_1) показывает, что $\mathfrak{M}^l \cap I \subset \ker f$ при некотором l. Поскольку модуль $I/\mathfrak{M}^l \cap I$ естественно вкладывается в $\Lambda/\mathfrak{M}^l$, а модуль $V(\Lambda)$ инъективен, существует гомоморфизм $\overline{g} : \Lambda/\mathfrak{M}^l \to V(\Lambda)$, продолжающий $\overline{f} : I/\mathfrak{M}^l \cap I \to V_1$. При этом $\mathfrak{M}^l\overline{g}(\Lambda/\mathfrak{M}^l) = 0$, поэтому $\overline{g}(\Lambda/\mathfrak{M}^l) \subset V_1$. Итак, имеем такой гомоморфизм $\overline{g} : \Lambda/\mathfrak{M}^l \to V_1$, что композиция $g : \Lambda \xrightarrow[\text{проекция}]{\text{естественная}} \Lambda/\mathfrak{M}^l \xrightarrow{\overline{g}} V_1$ является продолжением гомоморфизма $f : I \to V_1$ до $\Lambda \to V_1$. Инъективность V_1 доказана, а тем самым доказан и пункт (b).

(c) Имеем

$$\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda)) = \operatorname{Hom}_\Lambda\left(\varinjlim G_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n), V(\Lambda)\right) =$$
$$= \varprojlim G_{V(\Lambda)}\left(\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda/\mathfrak{M}^n), V(\Lambda)\right) =$$
$$= \varprojlim G^2_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n) = \varprojlim(\Lambda/\mathfrak{M}^n) = \widehat{\Lambda}$$

(тот факт, что $G^2_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n) = \Lambda/\mathfrak{M}^n$, будет доказан независимо в следующей лемме).

Лемма 1.2. *Для всякого модуля конечной длины ${}_\Lambda X$ естественные моноформизмы*

$$X \to G_{V(\Lambda)}\, H_{V(\Lambda)}(X) \quad \textit{и} \quad G_{V(\Lambda)}\, H_{V(\Lambda)}(X) \to G^2_{V(\Lambda)}(X)$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Достаточно показать, что сквозной мономорфизм $X \to G^2_{V(\Lambda)}(X)$ есть изоморфизм. Для этого заметим, что функтор $G^2_{V(\Lambda)}$ точен, и воспользуемся тривиальной индукцией по длине модуля ${}_\Lambda X$, учитывая, что

$$G_{V(\Lambda)}(k) = \operatorname{Hom}_\Lambda(k,k) = \operatorname{Hom}_k(k,k) = k$$

и потому $G^2_{V(\Lambda)}(k) = k$.

Лемма 1.3. ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}V(\Lambda)$ *– инъективный кообразующий.*

Доказательство. Дословное повторение доказательства леммы 1.1 (b) с заменой Λ на $\widehat{\Lambda}$ дает нам $\widehat{\Lambda}$-инъективность $V(\Lambda)$; поскольку $V(\Lambda)$ – существенное расширение $k \simeq \widehat{\Lambda}/\mathfrak{M}\widehat{\Lambda}$ над Λ, оно тем более существенно над $\widehat{\Lambda}$. Поэтому $V(\Lambda)$ есть инъективная оболочка k над $\widehat{\Lambda}$, и в силу леммы [1] 2.3 ${}_{\widehat{\Lambda}}V(\Lambda)$ – инъективный кообразующий, а $\widehat{\Lambda} = \Gamma({}_{\Lambda}V(\Lambda))$ по лемме 1.1 (c).

Лемма 1.4. *Всякий* $\Gamma({}_{\Lambda}V(\Lambda))$*-модуль конечной длины* $V(\Lambda)$*-рефлексивен. При этом естественный мономорфизм* $H_{V(\Lambda)}(X) \to G_{V(\Lambda)}(X)$ *для модулей* ${}_{\Gamma({}_{\Lambda}V(\Lambda))}X$ *конечной длины является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку функтор $G_{V(\Lambda)}H_{V(\Lambda)}$ точен, $V(\Lambda)$-рефлексивность модулей ${}_{\Gamma({}_{\Lambda}V(\Lambda))}X$ конечной длины доказывается, как и в лемме 2.2, тривиальной индукцией по длине. Поскольку Λ-модули ${}_{\Lambda}H_{V(\Lambda)}(X)$ имеют очевидным образом конечную длину, второе утверждение следует из леммы 1.2.

Предложение 1.1. (a) *Категория* Λ*-модулей конечной длины автодуальна;*

(b) *Категория* Λ*-модулей конечной длины двойственна категории* $\widehat{\Lambda}$*-модулей конечной длины;*

(c) *Категория* Λ*-модулей конечной длины эквивалентна категории* $\widehat{\Lambda}$*-модулей конечной длины. Эквивалентность может быть задана функторами пополнения* $\widehat{\Lambda}\underset{\Lambda}{\otimes}$ *и стирающим* ${}_{\widehat{\Lambda}}X \to_{\Lambda} X$.

Все эти утверждения непосредственно следуют из лемм 1.1–1.4.

Лемма 1.5. *Всякий артинов* Λ*-модуль допускает вложение в* $V(\Lambda)^n$ *при некотором* n.

Доказательство. Пусть ${}_{\Lambda}X$ артинов; рассмотрим подмодуль X $X_0 = \{x \in X \mid \mathfrak{M}x = 0\}$. Покажем, что X есть существенное расширение X_0. Действительно, для ненулевого $x \in X$ убывающая последовательность подмодулей X $\Lambda x \supset \mathfrak{M}x \supset \mathfrak{M}^2 x \supset \ldots$ стабилизируется, $\mathfrak{M}^l x = \mathfrak{M}^{l+1}x$, откуда в силу конечной порожденности $\mathfrak{M}^l x$ и леммы Накаямы имеем $\mathfrak{M}^l x = 0$. Если $\mathfrak{M}^l x = 0$ и $\mathfrak{M}^{l-1}x \neq 0$, то для некоторого $\lambda \in \mathfrak{M}^{l-1} \lambda x \neq 0$, $\lambda x \in X_0$, т.е. $\Lambda x \cap X_0 \neq 0$. Таким образом, ${}_{\Lambda}X$ – существенное расширение ${}_{\Lambda}X_0$ и поэтому вкладывается в инъективную оболочку ${}_{\Lambda}X_0$. Но X_0 – векторное пространство над полем k, конечномерное в силу артиновости X, $X_0 \simeq k^n$. Поэтому инъективная оболочка X_0 изоморфна $V(\Lambda)^n$, так как X допускает вложение в $V(\Lambda)^n$.

Лемма 1.6. *Пусть* ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y}$ *– нетеров модуль. Тогда* ${}_\Lambda H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ *– артинов.*

Доказательство. В силу нетеровости кольца $\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda)) = \widehat{\Lambda}$ нетеровость ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y}$ эквивалентна его конечной представимости. Поэтому, согласно следствию из леммы [1] 2.1, нетеров ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y}$ $V(\Lambda)$-рефлексивен. Далее, пусть $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ – убывающая цепочка подмодулей Λ-модуля $X = H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$; ей соответствует проективная система эпиморфизмов $X/X_1 \leftarrow X/X_2 \leftarrow \dots$, причем по лемме [1] 2.8 (1) (a) все X/X_i $V(\Lambda)$-рефлексивны. Применив функтор $G_{V(\Lambda)}$, получим индуктивную систему вложений подмодулей

$${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y} \quad G_{V(\Lambda)}(X/X_1) \to G_{V(\Lambda)}(X/X_2) \to \dots ,$$

которая стабилизируется ввиду нетеровости

$${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y} : G_{V(\Lambda)}(X/X_n) \to G_{V(\Lambda)}(X/X_{n+i})$$

суть изоморфизмы, откуда $X/X_{n+i} \to X/X_n$ – также изоморфизмы, т.е. $X_n = X_{n+1} = \dots$ и артиновость ${}_\Lambda X$ установлена.

Следствие. *Класс артиновых Λ-модулей совпадает с классом модулей, допускающих вложение в $V(\Lambda)^n$ при некотором натуральном n (в силу леммы 1.5 это утверждение эквивалентно артиновости модулей $V(\Lambda)^n = H_{V(\Lambda)}(\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))^n)$, которая намедленно следует из только что доказанной леммы).*

Предложение 1.2. *Категория артиновых Λ-модулей двойственна категории нетеровых $\widehat{\Lambda}$-модулей.*

Доказательство. В силу леммы 1.5 всякий артинов ${}_\Lambda X$ $V(\Lambda)$-рефлексивен (как подмодуль $V(\Lambda)$-рефлексивного ${}_\Lambda V(\Lambda)^n$ – см. следствие из леммы [1] 2.6); эпиморфизм $\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))^n \to G_{V(\Lambda)}(X)$ дает конечную порожденность, а тем самым и нетеровость модуля ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}G_{V(\Lambda)}(X)$. Обратно, если модуль ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathcal{Y}$ нетеров, то он $V(\Lambda)$-рефлексивен, и в силу леммы 2.6 ${}_\Lambda H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ – артинов. Таким образом, функторы $G_{V(\Lambda)}$ и $H_{V(\Lambda)}$ осуществляют требуемую двойственность.

Особенно простая и красивая ситуация возникает в случае *полного* локального кольца Λ. В этом случае $\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda)) = \Lambda$ и $G_{V(\Lambda)} = H_{V(\Lambda)}$, так что имеет место полная симметрия.

Предложение 1.3. *Пусть Λ – полное локальное нетерово кольцо. Тогда категория нетеровых (эквивалентно: конечнопорожденных) Λ-модулей двойственна категории артиновых Λ-модулей.*

Следствие. *Для произвольного локального нетерова кольца Λ категория артиновых Λ-модулей эквивалентна категории артиновых $\widehat{\Lambda}$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами пополнения $\widehat{\Lambda}\underset{\Lambda}{\otimes}$ и стирающим ${}_{\widehat{\Lambda}}X \to_{\Lambda} X$.*

Предложение 1.4. ${}_{\Lambda}\Lambda$ – *$V(\Lambda)^N$-рефлективный модуль, где N – множество натуральных чисел. Иными словами, "теорема о двойном централизаторе" (предложение* [1] 2.3*) имеет место при $V = V(\Lambda)^N$.*

Доказательство. Выберем для каждого натурального n ненулевой морфизм $y_n \in G_{V(\Lambda)}(\Lambda/\mathfrak{M}^n)$. По лемме Крулля всякий элемент λ кольца Λ лежит в некотором $\mathfrak{M}^n \setminus \mathfrak{M}^{n+1}$, поэтому $\lambda y_{n+1}(1 \operatorname{mod} \mathfrak{M}^{n+1}) \neq 0$. Отображение $1 \to \{y_n(1 \operatorname{mod} \mathfrak{M}^n)\}$ задает, таким образом, мономорфизм $\Lambda \to V(\Lambda)^N$, так что ${}_{\Lambda}\Lambda$ $V(\Lambda)^N$-рефлексивен.

Замечание. Результаты, полученные для локальных колец, немедленно обобщаются на полулокальные кольца. Именно, пусть Λ – полулокальное нетерово коммутативное кольцо: положим $\Gamma(\Lambda) = \Pi\{\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M}$ – максимальный идеал $\Lambda\}$. Имеем

(a) категория Λ-модулей конечной длины автодуальна;

(b) категория Λ-модулей конечной длины двойственна категории $\Gamma(\Lambda)$-модулей конечной длины;

(c) категория Λ-модулей конечной длины эквивалентна категории $\Gamma(\Lambda)$-модулей конечной длины. Эквивалентность может быть задана функторами $\Gamma(\Lambda)\underset{\Lambda}{\otimes}$ и стирающим ${}_{\Gamma(\Lambda)}X \to_{\Lambda} X$;

(d) категория артиновых Λ-модулей двойственной категории нетеровых (эквивалентно: конечнопорожденных) $\Gamma(\Lambda)$-модулей;

(e) если $\Lambda = \prod\limits_i \Lambda_i$ – конечное прямое произведение *полных* локальных колец, то категория артиновых Λ-модулей двойственна категории нетеровых Λ-модулей;

(f) для произвольного полулокального нетерова кольца Λ категория артиновых Λ-модулей эквивалентна категории артиновых $\Gamma(\Lambda)$-модулей;

(g) модуль ${}_\Lambda\Lambda$ $V(\Lambda)^N$-рефлективен, где $V(\Lambda) = \oplus\{E(\Lambda/\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \subset \Lambda$ – максимальный идеал$\}$, $E(\Lambda/\mathfrak{M})$ обозначает инъективную оболочку простого Λ-модуля $\Lambda/\mathfrak{M}$. Иными словами, положив $V = V(\Lambda)^N$ и $\Gamma = \Gamma({}_\Lambda V)$, имеем

$$\operatorname{End}_\Lambda V = \Gamma,$$
$$\operatorname{End}_\Gamma V = \Lambda.$$

§2. Общий случай нетерова коммутативного кольца

В этом параграфе мы “глобализуем” результаты, полученные для локальных колец.

Лемма 2.1. *Над нетеровым (слева) кольцом прямые суммы инъективных (левых) модулей инъективны.*

Доказательство. См., например, [4, 3.48.3].

Далее до конца параграфа мы будем считать Λ нетеровым коммутативным кольцом и придерживаться следующих обозначений:

$\mathcal{M} = \{\mathfrak{M}\}$ – множество всех максимальных идеалов Λ;

$k_\mathfrak{M} = \Lambda/\mathfrak{M}$ для $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$;

$\Lambda_\mathfrak{M} = (\Lambda \setminus \mathfrak{M})^{-1}\Lambda$ – локализация кольца Λ;

$\widehat{\Lambda}_\mathfrak{M} = \varprojlim(\Lambda_\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}\Lambda_\mathfrak{M})$ – пополнение локального кольца $\Lambda_\mathfrak{M}$;

$V_\mathfrak{M}$ – инъективная оболочка модуля $k_\mathfrak{M}$ надо кольцом $\Lambda_\mathfrak{M}$;

$V(\Lambda) = \bigoplus\limits_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} V_\mathfrak{M}$; $\Gamma(\Lambda) = \prod\limits_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} \widehat{\Lambda}_\mathfrak{M}$ (прямое произведение *колец*).

Лемма 2.2. *Для $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$*

(a) *модуль $V_\mathfrak{M}$ есть инъективная оболочка $k_\mathfrak{M}$ над Λ;*

(b) *кольцо $\Gamma({}_\Lambda V_\mathfrak{M})$ изоморфно $\widehat{\Lambda}_\mathfrak{M}$.*

Доказательство. (a) Имеем изоморфизм функторов

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(\ , V_\mathfrak{M}) = \operatorname{Hom}_{\Lambda_\mathfrak{M}}(\Lambda_\mathfrak{M}\otimes\ , V_\mathfrak{M}),$$

так что Λ-инъективность модуля $V_\mathfrak{M}$ следует из его $\Lambda_\mathfrak{M}$-инъективности и из Λ-плоскости модуля $\Lambda_\mathfrak{M}$. Существенность расширения $k_\mathfrak{M} \subset V_\mathfrak{M}$ над Λ является очевидным следствием его существенности над $\Lambda_\mathfrak{M}$.

(b) Утверждение непосредственно следует из леммы 1.1 (c), если заметить, что на категории $\Lambda_\mathfrak{M}$-модулей функторы $\operatorname{Hom}_{\Lambda_\mathfrak{M}}$ и $\operatorname{Hom}_\Lambda$ совпадают.

Лемма 2.3. (a) $V(\Lambda) = \underset{\mathfrak{M}}{\oplus} V_{\mathfrak{M}}$ – *инъективный кообразующий* Λ-*модуль;*

(b) *кольцо* $\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))$ *изоморфно* $\Gamma(\Lambda) = \prod\limits_{\mathfrak{M}} \widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. (a) Применение лемм 2.1 и 2.2 дает нам инъективность модуля ${}_\Lambda V(\Lambda)$; лемма [1] 2.2 показывает, что ${}_\Lambda V(\Lambda)$-кообразующий.

(b) Покажем, что

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\mathfrak{M}_1}, V_{\mathfrak{M}_2}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2.$$

Действительно, пусть

$$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(V_{\mathfrak{M}_1}, V_{\mathfrak{M}_2}) \quad \text{и} \quad V_{\mathfrak{M}_i}^{(n)} = \left\{x \in V_{\mathfrak{M}_i} \mid \mathfrak{M}_i^n x = 0\right\} \quad (i = 1, 2).$$

По лемме 1.1 $V_{\mathfrak{M}_i} = \bigcup\limits_n V_{\mathfrak{M}_i}^{(n)}$ Индукцией по n убедимся в том, что $f = 0$ на $V_{\mathfrak{M}_1}^{(n)}$: если $x \in V_{\mathfrak{M}_1}^{(n)}$ и $f = 0$ на $V_{\mathfrak{M}_1}^{(n-1)}$, то $\mathfrak{M}_1 f(x) = 0$; поскольку $\mathfrak{M}_2^l f(x) = 0$, $\mathfrak{M}_2^l \neq 0$ при некотором l, в силу максимальности идеала $\mathfrak{M}_1$ имеем $f(x) = 0$.

Теперь доказываемое утверждение моментально следует из леммы 2.2 (b):

$$\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda)) = \mathrm{Hom}_\Lambda\left(\underset{\mathfrak{M}}{\oplus} V_{\mathfrak{M}}, \underset{\mathfrak{M}}{\oplus} V_{\mathfrak{M}}\right) = \prod_{\mathfrak{M}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(V_{\mathfrak{M}}, \oplus V_{\mathfrak{M}}\right) =$$

$$= \prod_{\mathfrak{M}} \mathrm{Hom}_\Lambda\left(V_{\mathfrak{M}}, V_{\mathfrak{M}}\right) = \prod_{\mathfrak{M}} \widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}} = \Gamma(\Lambda).$$

Замечание. Если Λ – область главных идеалов, то $V(\Lambda) \simeq k/\Lambda$, где k – поле частных Λ. В частности, $V(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Лемма 2.4. *Для всякого модуля конечной длины* ${}_\Lambda X$ *естественные мономорфизмы* $X \to H_{V(\Lambda)} G_{V(\Lambda)}(X)$ *и* $H_{V(\Lambda)} G_{V(\Lambda)}(X) \to G^2_{V(\Lambda)}(X)$ *являются изоморфизмами.*

Эта лемма доказывается точно так же, как и лемма 1.2 – индукцией по длине ${}_\Lambda X$ с использованием точности функтора $G^2_{V(\Lambda)}$.

Заметим, что если кольцо Λ не полулокально (т.е. множество $\mathcal{M}$ бесконечно), то ${}_{\Gamma(\Lambda)} V(\Lambda)$ не является инъективным модулем (т.к. $\underset{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}}{\oplus} k_{\mathfrak{M}} \subset V(\Lambda) \subset \prod\limits_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} V_{\mathfrak{M}}$, причем в случае бесконечного

$\mathcal{M}$ вложение $V(\Lambda) \subset \prod_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} V_{\mathfrak{M}}$ строгое, а расширение $\bigoplus_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} k_{\mathfrak{M}} \subset V(\Lambda) \subset \prod_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} V_{\mathfrak{M}}$ – существенное). Результаты двойственности, полученные для локальных и полулокальных колец, обобщаются тем не менее и на этот случай: оказывается, что функтор $H_{V(\Lambda)}$ точен и строг на достаточно большой подкатегории ${}_{\Gamma({}_\Lambda V(\Lambda))}\mathfrak{M}$.

Мы назовем $\Gamma(\Lambda)$-модуль *финитным*, если $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y} = 0$ при почти всех $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$.

Лемма 2.5. *Пусть ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}^0$ – полная подкатегория ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}$, объектами которой являются финитные модули. Тогда функтор $H_{V(\Lambda)}$ точен на ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}^0$, причем все объекты ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}^0$ имеют много морфизмов в $V(\Lambda)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если в точной последовательности $\Gamma(\Lambda)$-модулей $0 \to \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y} \to T_2 \to 0$ $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ финитны, то таков же и $\mathcal{Y}$ (ибо из $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}_1 = 0$, $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}_2 = 0$ следует $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y} = 0$). Если $\mathcal{Y}$ – объект категории ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}^0$, то

$$H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{Hom}_{\prod\limits_{\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}\neq 0}} \left(\mathcal{Y}, \bigoplus_{\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}\neq 0} V_{\mathfrak{M}}\right),$$

а конечная прямая сумма $\bigoplus_{\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}\neq 0} V_{\mathfrak{M}}$ есть инъективный кообразующий над соответствующим конечным прямым произведением колец. Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма 2.6. *Всякий $\Gamma(\Lambda)$-модуль конечной длины $V(\Lambda)$-рефлексивен. При этом естественный мономорфизм $H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y}) \to G_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ для модулей ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ конечной длины является изоморфизмом.*

Доказательство. $\Gamma(\Lambda)$-модули длины 1 имеют вид $k_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$. Поэтому все $\Gamma(\Lambda)$-модули конечной длины финитны, и по лемме 2.5 функтор $G_{V(\Lambda)}H_{V(\Lambda)}$ точен на категории $\Gamma(\Lambda)$-модулей конечной длины. Далее доказательство проводится тривиальной индукцией по длине модуля. Тот факт, что для ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ конечной длины $H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y}) \to G_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ есть изоморфизм, следует из $V(\Lambda)$-рефлексивности ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ и из леммы 2.4 (поскольку ${}_{\Lambda}H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ очевидным образом имеет конечную длину).

Таким образом, в случае произвольного нетерова коммутативного Λ мы снова получаем автодуальность категории Λ-модулей конечной длины.

Предложение 2.1. (a) *Категория Λ-модулей конечной длины автодуальна;*

(b) *категория Λ-модулей конечной длины двойственна категории $\Gamma(\Lambda)$-модулей конечной длины;*

(c) *категория Λ-модулей конечной длины эквивалентна категории $\Gamma(\Lambda)$-модулей конечной длины. Эквивалентность может быть задана функторами $\Gamma(\Lambda)\underset{\Lambda}{\otimes}$ и стирающим ${}_{\Gamma(\Lambda)}X \to_{\Lambda} X$.*

Доказательство. Все утверждения непосредственно следуют из лемм 2.3–2.6.

Лемма 2.7. *Всякий артинов Λ-модуль вкладывается в конечную прямую сумму $\underset{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}}{\oplus} V_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$ ($n_{\mathfrak{M}} = 0$ при почти всех $\mathfrak{M}$).*

Доказательство. Пусть ${}_{\Lambda}X$ – артинов. Для $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$ положим $X_{\mathfrak{M}}^0 = \{x \in X \mid \mathfrak{M}x = 0\}$. $X_{\mathfrak{M}}^0$ – векторное пространство над $k_{\mathfrak{M}}$, конечномерное в силу артиновости ${}_{\Lambda}X$: $X_{\mathfrak{M}}^0 \simeq k_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$. Поскольку $X_{\mathfrak{M}_1}^0 \cap X_{\mathfrak{M}_2}^0 = 0$ при $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, ${}_{\Lambda}X$ содержит подмодуль $X^0 = \sum\limits_{m} X_{\mathfrak{M}}^0$, изоморфный прямой сумме $\underset{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}}{\otimes} k_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$; опять же в силу артиновости ${}_{\Lambda}X$ почти все $n_{\mathfrak{M}}$ равны нулю.

Далее, если $0 \neq x \in X$, то $\Lambda_{\mathfrak{M}} \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda x \neq 0$ при некотором $\mathfrak{M}$; поскольку $\Lambda x \subset X$ – артинов Λ-модуль, $\Lambda_{\mathfrak{M}} \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda x$ очевидным образом артинов $\Lambda_{\mathfrak{M}}$-модуль, и в силу леммы 1.5 имеем

$$\mathfrak{M}\left(\frac{\lambda}{s} \underset{\Lambda}{\otimes} x\right) = 0, \quad \frac{\lambda}{s} \underset{\Lambda}{\otimes} x \neq 0$$

при некотором $\lambda/s \in \Lambda_{\mathfrak{M}}$. Отсюда $\mathfrak{M}\lambda x = 0$, $\lambda x \neq 0$, т.е. $\lambda x \in X_{\mathfrak{M}}^0 \subset X^0$, $\lambda x \neq 0$. Таким образом, ${}_{\Lambda}X$ есть существенное расширение модуля ${}_{\Lambda}X^0$, изоморфного прямой сумме $\underset{\mathfrak{M}}{\oplus} k_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$ – поэтому ${}_{\Lambda}X$ вкладывается в инъективную оболочку ${}_{\Lambda}X^0$, изоморфную конечной прямой сумме $\underset{\mathfrak{M}}{\oplus} V_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$.

Следствие. *Артиновы Λ-модули $V(\Lambda)$-рефлексивны.*

Лемма 2.8. *Модуль ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ нетеров в том и только в том случае, когда он финитен и конечнопорожден над кольцом $\prod\limits_{\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}\mathcal{Y}\neq 0} \widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Очевидно.

Лемма 2.9. *Если ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ нетеров, то ${}_{\Lambda}H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ артинов.*

Эта лемма доказывается в точности так же, как лемма 1.6: хотя ${}_{\Gamma(\Lambda)}V(\Lambda)$ и не является инъективным кообразующим, лемма [1] 2.8 фактически применима, т.к. функтор $H_{V(\Lambda)}$ точен на категории ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathfrak{M}^0$ и все финитные $\Gamma(\Lambda)$-модули имеют много морфизмов в $V(\Lambda)$ – а нетеровы $\Gamma(\Lambda)$-модули финитны.

Следствие. *Класс артиновых Λ-модулей совпадает с классом модулей, допускающих вложение в конечную прямую сумму $\bigoplus\limits_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} V_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$.*

Суммируя предыдущие результаты, получаем:

Предложение 2.2. *Категория артиновых Λ-модулей двойственна категории нетеровых $\Gamma(\Lambda)$-модулей.*

Доказательство. Если ${}_{\Lambda}X$ артинов, то из точной последовательности

$$0 \to X \to \bigoplus_{\mathfrak{M}} V_{\mathfrak{M}}^{n_{\mathfrak{M}}}$$

имеем

$$\prod_{\mathfrak{M}} (\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}})^{n_{\mathfrak{M}}} \to G_{V(\Lambda)}(X) \to 0,$$

так что $G_{V(\Lambda)}(X)$ – нетеров. Обратно, для нетерова ${}_{\Gamma(\Lambda)}\mathcal{Y}$ $H_{V(\Lambda)}(\mathcal{Y})$ артинов по лемме 2.9. $V(\Lambda)$-рефлексивность артиновых Λ-модулей и нетеровых $\Gamma(\Lambda)$-модулей нами уже проверена.

Предложение 2.3. *Пусть $\Lambda = \prod\limits_{\alpha} \Lambda_\alpha$ – прямое произведение полных локальных нетеровых колец Λ_α (ненетерово в случае бесконечного множества индексов α!) Тогда категория артиновых Λ-модулей двойственна категории нетеровых Λ-модулей.*

Следствие. *Для нетерова коммутативного кольца Λ категория артиновых Λ-модулей эквивалентна категории артиновых $\Gamma(\Lambda)$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами $\Gamma(\Lambda)\underset{\Lambda}{\otimes}$ и стирающим ${}_{\Gamma(\Lambda)}X \to_{\Lambda} X$.*

Наконец, последний наш результат – о "двойном централизаторе".

Предложение 2.4. ${}_{\Lambda}\Lambda$ – $V(\Lambda)^{\mathcal{M}\times N}$*-рефлексивный модуль (где N – множество натуральных чисел). Иными словами, положив*

$$V = V(\Lambda)^{\mathcal{M}\times N} \quad \text{и} \quad \Gamma = \Gamma({}_{\Lambda}V),$$

имеем

$$\operatorname{End}_{\Lambda} V = \Gamma,$$
$$\operatorname{End}_{\Gamma} V = \Lambda.$$

Доказательство. Предложение 1.4 дает нам мономорфизмы $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}} \to V_{\mathfrak{M}}^N$; сочетая эти мономорфизмы с есственными вложениями $V_{\mathfrak{M}} \to V(\Lambda)$, имеем мономорфизм $\widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}} \to V(\Lambda)^N$, дающие при прямом перемножении мономорфизм $\Gamma(\Lambda) \to V(\Lambda)^{\mathcal{M}\times N}$. Поскольку модуль ${}_{\Lambda}\Lambda$ вкладывается в ${}_{\Lambda}\Gamma(\Lambda)$, он вкладывается и в $V = V(\Lambda)^{\mathcal{M}\times N}$, а потому является V-рефлексивным.

§3. Области главных идеалов. Нетеровы факториальные области

Область главных идеалов Λ является нетеровым коммутативным кольцом, к которому применим все результаты предыдущего параграфа. Множество $\mathcal{M}$ максимальных идеалов Λ можно отождествить множеством $\mathcal{P} = \{p\}$ неразложимых элементов (с точностью до единиц); модуль V_p естественно обозначать через $\Lambda/p^{\infty}\Lambda$; канонический инъективный кообразующий $V(\Lambda) = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} (\Lambda/p^{\infty}\Lambda)$ изоморфен k/Λ, где k – поле частных кольца Λ. С соответствующими заменами можно переформулировать предложения 2.1–2.4. Структурная теорема о строении конечнопорожденных модулей над областью главных идеалов дает нам следующие дополнительные результаты (в предложениях 3.1–3.3 Λ предполагается областью главных идеалов).

Предложение 3.1. (a) *Категория конечнопорожденных периодических Λ-модулей автодуальна;*

(b) *категория конечнопорожденных периодических Λ-модулей двойственна категории конечнопорожденных периодических финитных $\Gamma(\Lambda)$-модулей;*

(c) *категория конечнопорожденных периодических Λ-модулей эквивалентна категории конечнопорожденных периодических финитных $\Gamma(\Lambda)$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами $\Gamma(\Lambda)\otimes_{\Lambda}$ и стирающим.*

Предложение 3.2. *Всякий артинов Λ-модуль изоморфен конечной прямой сумме*

$$\bigoplus_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ i=1,\dots,l_p}} \left(\Lambda/p^{n_p^{(i)}}\Lambda\right),$$

где $n_p^{(i)}$ – неотрицательное целое число или ∞ ($l_p = 0$ при почти всех p).

Предложение 3.3. *Категория конечнопорожденных Λ-модулей двойственна малой полной подкатегории $\Gamma\left({}_\Lambda(k/\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}\right)$-модулей, объекты которой изоморфны конечным прямым суммам модулей вида $(k/\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}$ и $(\Lambda/p^n\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}$.*

Вот одно забавное применение полученных результатов: мы сейчас покажем, что для кольца вида $\Lambda = \prod\limits_\alpha \Lambda_\alpha$, где Λ_α – полные кольца дискретного нормирования, в категории нетеровых Λ-модулей существуют "проективные оболочки".

Будем обозначать через $\mathrm{Noeth}\,(\Lambda)$ и $\mathrm{Art}\,(\Lambda)$ категории нетеровых и артиновых Λ-модулей соответственно.

Лемма 3.1. *Пусть $\Lambda = \prod\limits_\alpha \Lambda_\alpha$ – прямое произведение полных колец дискретного нормирования. Инъективные объекты категории $\mathrm{Art}\,(\Lambda)$ суть модули вида $\bigoplus\limits_\alpha (\Lambda_\alpha/p_\alpha^\infty\Lambda_\alpha)^{n_\alpha}$, где p_α – униформизанта кольца Λ_α и почти все n_α равны нулю.*

Доказательство. Поскольку всякий артинов Λ-модуль изоморфен конечной прямой сумме модулей вида $\Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha$, где l_α – целое неотрицательное число или ∞, достаточно показать, что модули вида $\Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha$ не являются инъективными объектами категории $\mathrm{Art}\,(\Lambda)$ при конечных l_α. Этот факт следует из непродолжимости тождественного морфизма $\Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha \xrightarrow{id} \Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha$ до $\Lambda_\alpha/p^{l_\alpha+1}\Lambda_\alpha \xrightarrow{id} \Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha$

Лемма 3.2. *Пусть по-прежнему $\Lambda = \prod_\alpha \Lambda_\alpha$ – прямое произведение полных колец дискретного нормирования. В категории $\mathrm{Art}\,(\Lambda)$ существуют инъективные оболочки.*

Доказательство. Инъективная оболочка $\Lambda_\alpha/p^{l_\alpha}\Lambda_\alpha$ в $\mathrm{Art}\,(\Lambda)$ совпадает с инъективной оболочкой этого модуля в ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и равна

$\Lambda_\alpha/p_\alpha^\infty\Lambda_\alpha$; инъективная оболочка конечной прямой суммы артиновых модулей равна прямой сумме инъективных оболочек этих модулей.

Следствие. *Пусть* $\Lambda = \prod_\alpha \Lambda_\alpha$, Λ_α *суть полные кольца дискретного нормирования. В категории* $\mathrm{Noeth}\,(\Lambda)$ *существуют "проективные кооболочки". Подробнее: для всякого нетерова* Λ*-модуля* X *существует такой эпиморфизм проективного объекта* $\mathrm{Noeth}\,(\Lambda) P(X)$ *на* X*, что всякий гомоморфизм проективного объекта* P *категории* $\mathrm{Noeth}\,(\Lambda)$ *в объект* $P(X)$*, достраивающий диаграмму*

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & P(X) & & \end{array}$$

до коммутативной, является эпиморфизмом.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 2.3 и предложения 2.3.

К нетеровой факториальной области Λ, конечно, тоже применимы результаты §2. Однако в этом случае наряду с каноническим инъективным кообразующим $V(\Lambda)$ полезно рассмотреть другой инъективный Λ-модуль $V^*(\Lambda) = \bigoplus\limits_{p\in\mathcal{P}} (\Lambda/p^\infty\Lambda)$, где $\mathcal{P} = \{p\}$ – множество неразложимых элементов кольца Λ (с точностью до единиц). Хотя ${}_\Lambda V^*(\Lambda)$ и не является кообразующим, функторы $G_{V^*(\Lambda)}$ и $H_{V^*(\Lambda)}$ осуществляют некоторую локальную двойственность. В частности, для модуля $V^*(\Lambda)$ верна "теорема о двойном централизаторе" – доказательством этого нетривиального факта мы и завершим настоящий параграф. Прочие результаты мы лишь сформулируем: доказательства их либо тривиальны, либо могут быть скопированы (с очевидными изменениями) из §2.

Лемма 3.3. *Пусть* Λ *– кольцо дискретного нормирования с униформизантой* p*. Обозначим через* $\Lambda/p^\infty\Lambda$ *индуктивный предел последовательности мономорфизмов*

$$0 \longrightarrow \Lambda/p\Lambda \longrightarrow \Lambda/p^2\Lambda \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda/p^n\Lambda \longrightarrow \Lambda/p^{n+1}\Lambda \longrightarrow \ldots,$$

$$\lambda \bmod p^n\Lambda \longrightarrow p\lambda \bmod p^{n+1}\Lambda.$$

Утверждается, что

(a) $\Lambda/p^\infty\Lambda$ *есть инъективная оболочка* $\Lambda/p\Lambda$ *над* Λ*;*

(b) *кольцо* $\Gamma({}_\Lambda\Lambda/p^\infty\Lambda)$ *изоморфмно пополнению* $\widehat{\Lambda}=\varprojlim(\Lambda/p^n\Lambda)$ *кольца* Λ.

Далее до конца параграфа мы будем считать Λ нетеровой факториальной областью и придерживаться следующий обозначений:

$\mathcal{P}=\{p\}$ – множество неразложимых элементов Λ (с точностью до единиц);

$\Lambda_p=(\Lambda\setminus p\Lambda)^{-1}\Lambda$ – локализация кольца Λ $(p\in\mathcal{P})$;

$\widehat{\Lambda}_p=\varprojlim(\Lambda_p/p^n\Lambda_p)$ – пополнение локального кольца Λ_p;

$\Lambda/p^\infty\overset{\text{def}}{=}\Lambda_p/p^\infty\Lambda_p$ (в обозначениях леммы 3.3);

$V^*(\Lambda)=\bigoplus\limits_{p\in\mathcal{P}}(\Lambda/p^\infty\Lambda)$; $\Gamma^*(\Lambda)=\prod\limits_{p\in\mathcal{P}}\widehat{\Lambda}_p$.

Лемма 3.4. (a) ${}_\Lambda V^*(\Lambda)$ – *инъективный модуль;*
(b) *кольцо* $\Gamma({}_\Lambda V^*(\Lambda))$ *изоморфно* $\Gamma^*(\Lambda)$.

Предложение 3.4. *Обозначим через* $\mathcal{L}(\Lambda)$ *категорию* Λ*-модулей, раскладывающихся в конечную прямую сумму*

$$\bigoplus_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ i=1,\dots,l_p}}\left(\Lambda/p^{n_p^{(i)}}\Lambda\right),$$

где $n_p^{(i)}$ – *целые неотрицательные числа* ($l_p=0$ *при почти всех* p); *соответственно через* $\mathcal{L}(\Gamma^*(\Lambda))$ *обозначим категорию* $\Gamma^*(\Lambda)$*-модулей, раскладывающихся в конечную прямую сумму*

$$\bigoplus_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ i=1,\dots,l_p}}\left(\Gamma^*(\Lambda)/p^{n_p^{(i)}}\Gamma^*(\Lambda)\right).$$

(a) *Категория* $\mathcal{L}(\Lambda)$ *автодуальна;*

(b) *категория* $\mathcal{L}(\Lambda)$ *двойственна категории* $\mathcal{L}(\Gamma^*(\Lambda))$*;*

(c) *категория* $\mathcal{L}(\Lambda)$ *эквивалентна категории* $\mathcal{L}(\Gamma^*(\Lambda))$. *Эквивалентность может быть задана функторами* $\Gamma^*(\Lambda)\otimes_\Lambda$ *и стирающим* ${}_{\Gamma^*(\Lambda)}X\to{}_\Lambda X$.

Предложение 3.5. *Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Lambda)$ категорию Λ-модулей, допускающих вложение в конечную прямую сумму $\underset{p\in\mathcal{P}}{\oplus}(\Lambda/p^{\infty}\Lambda)^{n_p}$ (n_p – целые неотрицательные числа, нулевые при почти всех p).*

(a) *$\mathcal{L}_1(\Lambda)$ двойственна категории нетеровых $\Gamma^*(\Lambda)$-модулей;*

(b) *$\mathcal{L}_1(\Lambda)$ эквивалентна категории артиновых $\Gamma^*(\Lambda)$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами $\Gamma^*(\Lambda)\otimes_{\Lambda}$ и стирающим ${}_{\Gamma^*(\Lambda)}X \to_{\Lambda} X$.*

(c) *всякий объект категории $\mathcal{L}_1(\Lambda)$ изоморфен конечной прямой сумме*

$$\underset{\substack{p\in\mathcal{P}\\ i=1,\dots,l_p}}{\oplus}\left(\Lambda/p^{n_p^{(i)}}\Lambda\right),$$

где $n_p^{(i)}$ – неотрицательное целое число или ∞ и почти все l_p равны нулю.

Предложение 3.6 (“теорема о двойном централизаторе”). *${}_{\Lambda}\Lambda$ – $V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}$-рефлексивный модуль. Иными словами, обозначим через Γ кольцо $\Gamma\left({}_{\Lambda}V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}\right)$, имеем*

$$\operatorname{End}_{\Lambda}\left(V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}\right)=\Gamma,$$
$$\operatorname{End}_{\Gamma}\left(V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}\right)=\Lambda.$$

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность Λ-модулей

$$0\longrightarrow\Lambda\xrightarrow{\rho}V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}\xrightarrow{\pi}\mathcal{Y}\longrightarrow 0,$$

в которой вложение $\rho=\{\rho_{p,n}\}_{(p,n)\in\mathcal{P}\times N}$ задано так:

$$\rho_{p,n}(\lambda)=\lambda \operatorname{mod} p^n\oplus 0\in\Lambda/p^{\infty}\Lambda\oplus\left(\underset{q\neq p}{\oplus}\Lambda/q^{\infty}\Lambda\right)=V^*(\Lambda).$$

В силу леммы [1] 2.6 нам достаточно доказать, что ${}_{\Lambda}\mathcal{Y}$ имеет много морфизмов в $V^*(\Lambda)$. Этим мы и займемся.

Возьмем ненулевой $y\in\mathcal{Y}$ и покажем, что аннулятор $\operatorname{Ann}(y)$ содержится в некотором простом идеале $p\Lambda\subset\Lambda$, $p\in\mathcal{P}$ (и тем самым существует ненулевой морфизм $\Lambda y\to V^*(\Lambda)$, $y\to 1 \operatorname{mod} p\oplus 0$). Обозначим через $\{y(p,n)\}_{(p,n)\in\mathcal{P}\times N}$ произвольный прообраз y в $V^*(\Lambda)^{\mathcal{P}\times N}$, $y=\pi\{y(p,n)\}$, и пусть $y_q(p,n)$ – естественная проекция $\{y(p,n)\}$ на $\Lambda/q^{\infty}\Lambda$ ($q\in\mathcal{P}$).

Заметим, что при $\mu \in \operatorname{Ann}(y)$ $\mu\{y(p,n)\} \in \rho(\Lambda)$, т.е.

$$\{\mu y(p,n)\} = c \bmod p^n \oplus 0$$

для некоторого $c \in \Lambda$, или эквивалентно

$$\mu y_n(p,n) = c \bmod p^n, \quad \mu y_q(p,n) = 0 \quad \text{при} \quad q \neq p.$$

Отсюда видим, что

(a) если при некоторых $p \neq q \in \mathcal{P}$, $n \in N$ $y_q(p,n) \neq 0$, то $\operatorname{Ann}(y) \subset q\Lambda$;

(b) если при некоторых $p \in \mathcal{P}$, $n \in N$ $p^n y_q(p,n) \neq 0$, то $\operatorname{Ann}(y) \subset p\Lambda$.

Осталось рассмотреть случай

$$y(p,n) = \widetilde{y}_p(p,n) \bmod p^n \oplus 0, \quad \widetilde{y}_p(p,n) \in \Lambda_p. \qquad (*)$$

В этом случае имеем $\mu\widetilde{y}(p,n) \equiv c \pmod{p^n}$, поэтому примарное p^n, делящее μ, делит и c, так что $c \equiv 0 \pmod{\mu}$, $c = \mu c_1$.

Мы утверждаем, что

(c) в случае $(*)$ всегда найдутся такие $p \in \mathcal{P}$, $l \in N$, что

$$\widetilde{y}_p(p,l) \not\equiv \widetilde{y}_p(p,l+1) \pmod{p^l}.$$

Действительно, предположив противное, мы имели бы при всяком $p \in \mathcal{P}$ "целое p-адическое число" $y(p) = \varprojlim \widetilde{y}(p,n) \in \widehat{\Lambda}_p$, и из сравнений $\mu y(p,n) \equiv c \pmod{p^n}$ предельным переходом получили бы $\mu y(p) = c = \mu c_1$, так что $y(p) = c_1$ (ибо $\widehat{\Lambda}_p$ – область целостности), или эквивалентно $y(p,n) = c_1 \bmod p^n \oplus 0 = \rho(c_1)$, что противоречило бы изначальному допущению $y \neq 0$. Осталось заметить, что

(d) если в случае $(*)$ $y_p(p,l) \not\equiv y_p(p,l+1) \pmod{p^l}$, то $\operatorname{Ann}(y) \subset p\Lambda$.

Действительно, из сравнений $\mu\widetilde{y}(p,n) \equiv \mu c_1 \pmod{p^n}$ следует, что при $\mu \not\equiv 0 \pmod{p}$ $\widetilde{y}(p,n) \equiv c_1 \pmod{p^n}$ при всех n, так что $\widetilde{y}(p,l) \equiv \widetilde{y}(p,l+1) \pmod{p^l}$ – вопреки нашему допущению. Поэтому всякое $\mu \in \operatorname{Ann}(y)$ делится на p.

Предложение доказано.

§4. Абелевы группы. Двойственность Понтрягина

Случай $\Lambda = \mathbb{Z}$ является наиболее частным – и наиболее важным. Поэтому мы позволили себе отдельно переформулировать полученные результаты для этого частного случая.

Лемма 4.1. *Абелева группа $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является инъективной кообразующей, причем*

$$\Gamma\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) = \prod_{p-\text{ простое}} \mathbb{Z}_p$$

($\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p-адических чисел).

Предложение 4.1. (a) *Категория конечных абелевых групп автодуальна;*

(b) *Категория конечных абелевых групп двойственна категории конечных $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p$-модулей;*

(c) *Категория конечных абелевых групп эквивалентна категории конечных $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами $\prod\limits_p \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}}$ и стирающим ${}_{\prod \mathbb{Z}_p}X \to_{\mathbb{Z}} X$.*

Предложение 4.2. (a) *Категория артиновых абелевых групп двойственна категории нетеровых $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p$-модулей;*

(b) *Категория артиновых абелевых групп эквивалентна категории артиновых $\prod\limits_p \mathbb{Z}_p$-модулей. Эквивалентность может быть задана функторами $\prod\limits_p \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}}$ и стирающим;*

(c) *Всякая артинова абелева группа изоморфна конечной прямой сумме*

$$\bigoplus_{\substack{p-\text{ простое} \\ i=1,\dots,l_p}} \left(\mathbb{Z}/p^{n_p^{(i)}}\mathbb{Z}\right),$$

где $n_p^{(i)}$ – неотрицательное целое число или ∞ и почти все l_p равны нулю.

Предложение 4.3. (a) *Абелева группа* $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N$*-рефлексивна. Иными словами, положив* $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N\right)$, *имеем*

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N = \Gamma,$$
$$\mathrm{End}_{\Gamma}\,(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N = \mathbb{Z}.$$

(b) *Категория конечнопорожденных абелевых групп двойственна малой полной подкатегории* ${}_{\Gamma(\mathbb{Z}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N)}\mathfrak{M}$, *объекты которой изоморфны конечным прямым суммам модулей вида* $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^N$, $(\mathbb{Z}/p^b\mathbb{Z})^N$.

Помимо $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ в категории ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ существует еще один канонический инъективный кообразующий, “непрерывный” – именно, $V_c(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Предложение 4.4. *Следующие абелевы группы являются* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*-рефлексивными:*

(a) *все конечнопорожденные;*

(b) $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}$, $\mathbb{Z}^{(\mathbb{R})}$, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{Z})}$, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{R})} \simeq \mathbb{R}$.
(Напомним, что $Y^{(I)}$ *означает прямую сумму* I *экзампляров* Y.*)*

Доказательство. (a) Достаточно заметить, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ вкладывается в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и поэтому всякая конечнопорожденная абелева группа вкладывается в конечную степень $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

(b) Достаточно доказать $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-рефлексивность самой большой из перечисленных абелевых групп, именно $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}$ (остальные в нее вкладываются), а этот факт немедленно следует из разложения $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в прямую сумму $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}$.

Функторы $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\ ,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и $H_{\mathrm{Top}}(\ ,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ осуществляют хорошо известную двойственность Понтрягина между категорией ${}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ и категорией компактных абелевых групп. Всякая компактная абелева группа наделяется, таким образом, структурой левого $\Gamma({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модуля. При этом непрерывные гомоморфизмы компактных абелевых групп $\mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ составляют некоторую подгруппу $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ абелевой группы $\mathrm{Hom}_{\Gamma({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z})}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$. Какие именно $\Gamma({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модули могут быть наделены структурой компактных абелевых групп и какие из их $\Gamma({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-морфизмов являются непрерывными? Ответ на этот вопрос дает результат о *глобальной двойственности*, изложение которого выходит за рамки настоящей работы; мы намерены посвятить этому результату отдельную публикацию.

Автор глубоко признателен А. В. Яковлеву за интерес к работе и внимательное чтение рукописи, А. Ф. Иванову за постоянное внимание и содержательные беседы, а также Б. Б. Лурье за дружескую поддержку.

Литература

1. М. Б. Звягина, *Теорема о локальной двойственности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 66–73.
2. R. Hartshorne, *Residues and Duality.* Lect. Notes in Math., 20 (1966).
3. A. Grothendieck, *Local cohomology.* Mimeographed seminar notes by R. Hartshorne, Harvard (1961).
4. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1.* Мир, М. (1977).
5. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы.* Наука, М. (1973).

Zwiagina M. B. Local duality for modules over Noetherian commutative rings.

Some applications of the general theorem on the existence of local duality for modules over Noetherian commutative rings are given.

Let Λ be a Noetherian commutative ring, let $\mathcal{M} = \{\mathfrak{M}\}$ be a set of maximal ideals in Λ, and let $\widehat{\Lambda} = \varprojlim \Lambda_{\mathfrak{M}}$, $\Gamma(\Lambda) = \prod_{\mathfrak{M}\in\mathcal{M}} \widehat{\Lambda}_{\mathfrak{M}}$. Then the category of Artin modules is dual to the category of Noetherian modules.

Several structural results are proved including the theorem of the structure of Artin modules over principal ideal domains. For rings of special kinds, theorems on double centralizers are proved.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 ноября 1999 г.