Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

М. Н. Корниенко

МОНОИД ПОЛУПРОСТЫХ МУЛЬТИКЛАССОВ ГРУППЫ $G = G_2(K)$

Пусть G – группа; $C_1, \dots, C_k \subset G$ – некоторая конечная последовательность ее классов сопряженных элементов (возможно $C_i = C_j$ при $i \neq j$). Под мультиклассом мы понимаем множество $M = C_1 \cdot \ldots \cdot C_k = \{c_1 \dots c_k \mid c_i \in C_i\}$. Свойства мультиклассов, в частности, условие $M = G$, исследовались в ряде работ [7–15]. В [13, 14] рассматривался случай, когда G – простая алгебраическая группа, а мультиклассы рассматривались с точностью до замыкания в топологии Зарисского. В частности, в [13] описана структура мультиклассов, порождаемых полупростыми классами сопряженных элементов, а также правило их перемножения для группы $G = \mathrm{SL}_n(K)$, где K – алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Естественно рассмотреть аналогичные конструкции и для других простых алгебраических групп. Здесь мы рассматриваем случай $G = G_2(K)$.

1. Обозначения и терминология

1.1. *Для системы корней типа* G_2 мы используем обозначения [2], в частности, положительными корнями будут

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \qquad 2\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2,$$
$$3\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

где $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1$ – система простых корней.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 0; далее, $G = G_2(K)$ – это простая алгебраическая группа, соответствующая системе G_2; $W = W(G_2)$ – ее группа Вейля.

Для любого корня α соответствующую корневую подгруппу будем обозначать X_α (напомним, $X_\alpha = \langle x_\alpha(k) \mid k \in K \rangle$). Далее, $w_\alpha \in W$ – элемент группы Вейля, соответствующий корню α.

1.2. Пусть $M_{\mathrm{cs}}(G)$ – множество всех замыканий (в топологии Зарисского) мультиклассов группы G, порожденных полупростыми классами. Определим на $M_{\rm cs}(G)$ алгебраическую операцию по правилу $m_1 \cdot m_2 = \overline{m_1 m_2}$, где $\overline{m}$ – замыкание m в топологии Зарисского. Очевидно, $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$ и $(m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$ (см. [13]). Таким образом, $M_{\rm cs}(G)$ становится коммутативным моноидом, где единица – это класс 1. Группа G также является элементом моноида $M_{\rm cs}(G)$ [13], который мы будем обозначать символом 0.

1.3. Пусть $T \leqslant G$ – максимальный тор, $t \in T$. Пусть, далее, $C_W(t) = \langle w \in W \mid w(t) = t \rangle$. Так как группа G односвязна, элемент t регулярен тогда и только тогда, когда $C_W(t) = 1$ (см. [5, II, §3, 4]).

Для любого регулярного $t \in T$ будем обозначать через C_{t_r} соответствующий класс сопряженных элементов.

Далее, если $t \in T$ – нерегулярный элемент, то $C_W(t) \leqslant W$ – подгруппа, порожденная отражениями [5, II, §4]. Очевидно, что с точностью до сопряжения в W имеются следующие собственные подгруппы, порожденные отражениями

$$\langle w_{\alpha_1} \rangle, \quad \langle w_{\alpha_2} \rangle, \quad \langle w_{\alpha_1}, w_{3\alpha_1 + 2\alpha_2} \rangle, \quad W(A_2),$$

где $W(A_2)$ – группа Вейля подсистемы длинных корней типа A_2, содержащихся в G_2.

Далее, так как G односвязна, то $C_W(t) = W$ тогда и только тогда, когда $t = 1$. (Действительно, централизатор полупростого элемента $C_G(t)$ в односвязной группе связен [5, II, §3, 3.9]. Следовательно, группа $C_G(t)$ порождается корневыми подгруппами X_α для тех корней α, для которых $\alpha(t) = 1$ [5, II, §4, 4.1]. Если $w_\alpha(t) = t$, то $\dot{w}_\alpha \in C_G(t)$, где $\dot{w}_\alpha$ – некоторый прообраз w_α в группе $N = N_G(T)$. Тогда $X_{\pm\alpha} \subset C_G(t)$. Следовательно, если $C_W(t) = W$, то $X_{\pm\alpha} \subset C_G(t)$ для любого α, то есть $G = C_G(t)$, откуда $t \in Z(G)$. Так как $Z(G_2(K)) = 1$ равенство $C_W(t) = W$ имеет место только для элемента $t = 1$.)

1.4. Далее, пусть t – нерегулярный элемент, отличный от 1. Так как подсистема длинных корней в G_2 – это A_2 (то есть тоже система ранга 2), то максимальные торы групп $G_2(K)$ и $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$ совпадают. При этом мы можем отождествлять элемент t с матрицей

$$\mathrm{diag}\,(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{SL}_3(K), \quad \alpha\beta\gamma = 1.$$

Элементы группы Вейля $W(A_2)$ действуют как перестановки собственных значений α, β, γ. При этом можно считать

$$\alpha \leftrightarrow \beta : w_{\alpha_2}$$

$$\beta \leftrightarrow \gamma : w_{3\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\gamma \leftrightarrow \alpha : w_{3\alpha_1+2\alpha_2}$$

Далее, $W(G_2)$ – это группа симметрий правильного шестиугольника, а $W(A_2) \leqslant W(G_2)$ – это подгруппа симметрий правильного треугольника, поэтому $W(G_2) = W(A_2) \times Z_2$, где Z_2 – это группа второго порядка $\{1, \sigma\}$, где σ – инверсия (то есть замена знака координат). Инверсию можно расписать как произведение ортогональных отражений, скажем,

$$\sigma = w_{\alpha_1} \cdot w_{3\alpha_1+2\alpha_2} = w_{\alpha_2} \cdot w_{2\alpha_1+\alpha_2} = \dots .$$

Случай I. $C_W(t) = \langle w_{\alpha_1} \rangle$.

Пусть $t = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Так как $\sigma(t) = \operatorname{diag}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$, а $w_{3\alpha_1+2\alpha_2}(t) = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, то условие $w_{\alpha_1}(t) = t$ можно записать следующим образом:

$$w_{\alpha_1}(t) = w_{3\alpha_1+2\alpha_2}\sigma(t) = w_{3\alpha_1+2\alpha_2}\big(\operatorname{diag}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})\big) =$$
$$= \operatorname{diag}(\gamma^{-1}, \beta^{-1}, \alpha^{-1}) = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Следовательно, $w_{\alpha_1}(t) = t$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \gamma^{-1}$, $\beta = \beta^{-1}$. Так как $\alpha\beta\gamma = 1$, то $\beta = 1$. Таким образом получаем классы, соответствующие матрице $\operatorname{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1})$ (очевидно, α, α^{-1}, 1 могут стоять на любых местах, так как их можно переставлять при помощи $W(G_2)$). Далее, если $\alpha \neq \alpha^{-1}$, то $C_W(t) = \langle w_{\alpha_1} \rangle$. Таким образом, для любого $\alpha \in K^*$, $\alpha \neq \pm 1$, определим класс сопряженности C_α, для которого $C_W(t) = \langle w_{\alpha_1} \rangle$, где $t \in C_\alpha \cap T$.

Случай II. $C_W(t) = \langle w_{\alpha_2} \rangle$.

Имеем $w_{\alpha_2}(\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)) = \operatorname{diag}(\beta, \alpha, \gamma)$. Следовательно, $w(t) = t$ в том и только в том случае, когда $\alpha = \beta$. Так как $\alpha\beta\gamma = 1$, то условие $w_{\alpha_2}(t) = t$ равносильно условию $t = \operatorname{diag}(\beta, \beta, \beta^{-2})$. Далее, если $\beta \neq \pm 1$, $\beta \neq \sqrt[3]{1}$, то $C_W(t) = \langle w_{\alpha_2} \rangle$.

Таким образом, получаем классы сопряженных, у которых $C_W(t) = \langle w_{\alpha_2} \rangle$. Их обозначаем $C_{\beta\beta}$, где $\beta \in K^*$, $\beta \neq \pm 1$, $\sqrt[3]{1}$.

Случай III. $C_W(t) = \langle w_{\alpha_1}, w_{3\alpha_1+2\alpha_2}\rangle$.

В этом случае $\sigma \in C_W(t)$, а именно $\sigma = w_{\alpha_1} w_{3\alpha_1+2\alpha_2}$. Если $\sigma(t) = t$, то $\alpha = \alpha^{-1}$, $\beta = \beta^{-1}$, $\gamma = \gamma^{-1}$, следовательно, $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$. Так как $\det t = 1$ и $t \neq 1$, то среди собственных значений два равны -1, а одно 1. Так как $w_{3\alpha_1+2\alpha_2}(t) = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma) = t$, то $\alpha = -1$, $\gamma = -1$, $\beta = 1$. Следовательно, имеем единственный класс с $C_W(t) = \langle w_{\alpha_1}, w_{3\alpha_1+2\alpha_2}\rangle$, представительно которого в T есть $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$. Обозначим этот класс C_{-1}.

Случай IV. $C_W(t) = W(A_2)$.

Здесь $t = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ инвариантен относительно перестановок α, β, γ. Тогда $t = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \alpha)$, $\alpha \neq 1$, $\alpha^3 = 1$, то есть $\alpha = \sqrt[3]{1}$. Обозначим через ε первообразный корень третьей степени из 1, а через C_ε – соответствующий класс. Так как элемент $t = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ инвариантен относительно $W(A_2)$ и не инвариантен относительно σ (напомним, что $\sigma(t) = t^{-1} \neq t$), то $C_W(t) = W(A_2)$.

Таким образом имеем следующие классы полупростых элементов:

1. C_α $\big(\alpha \neq 1,\ t = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1})\big)$;
2. $C_{\beta\beta}$ $\big(\beta \neq \pm 1, \sqrt[3]{1},\ t = \mathrm{diag}(\beta, \beta, \beta^{-2})\big)$;
3. C_{-1} $\big(t = \mathrm{diag}(-1, 1, -1)\big)$;
4. C_ε $\big(\varepsilon = \sqrt[3]{1},\ t = \mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)\big)$;
5. C_{t_r} (t_r – регулярный);
6. 1.

1.5. Для любой редуктивной алгебраической группы H определен естественный морфизм $\pi : H \to \Phi = H/\mathrm{Int}\, H$, где $H/\mathrm{Int}\, H$ – алгебраический фактор группы H относительно действия H на H сопряженными. Пусть H – связная группа. Если $X \subset H$ есть $\mathrm{Int}\, H$-инвариантное подмножество, такое, что $\overline{\pi(X)} = \Phi$, то $\overline{X} = H$ [3,II,§3]. Далее, пусть $Y \subset H$ является замкнутым $\mathrm{Int}\, H$-инвариантным подмножеством, T – максимальный тор в H, а W – группа Вейля. Тогда существует естественный фактор-морфизм $\theta : T \to T/W \cong \Phi$. При этом, $\theta(T \cap Y) = \pi(Y)$ [5, II, §3]. Отсюда следует, что если Y – неприводимо, то $T \cap Y$ есть объединение неприводимых компонент одной размерности, образующих одну орбиту под действием группы Вейля. Отметим, что так как группа H связна, то любой ее класс сопряженности, а следовательно и мультикласс, связен.

1.7. Определим теперь следующие замкнутые $\operatorname{Int} G$-инвариантные подмножества в G:

7. Пусть T_x – подтор тора T, состоящий из элементов, соответствующих диагональным матрицам (в $\mathrm{SL}_3(K)$) вида $\operatorname{diag}(x, 1, x^{-1})$, где x пробегает множество K^*. Положим $M_x = \overline{\operatorname{Int} G \cdot T_x}$ (здесь $\operatorname{Int} G$ – действие группы G сопряжениями на себе, то есть $\operatorname{Int} G \cdot X = \{\sigma X \sigma^{-1} \mid \sigma \in G\}$).
8. Пусть T_{yy} – подтор тора T, состоящий из элементов, соответствующих диагональным матрицам (в $\mathrm{SL}_3(K)$) вида $\operatorname{diag}(y, y, y^{-2})$, где y пробегает множество K^*. Положим $M_{yy} = \overline{\operatorname{Int} G \cdot T_{yy}}$.
9. Пусть T_{-yy} – подмножество тора T, состоящее из элементов, соответствующих диагональным матрицам (в $\mathrm{SL}_3(K)$) вида $\operatorname{diag}(y, -y, -y^{-2})$, где y пробегает множество K^*. Положим $M_{-yy} = \overline{\operatorname{Int} G \cdot T_{-yy}}$.

1.8. Ниже мы рассматриваем неприводимое представление $\rho : G = G_2(K) \to \mathrm{GL}(V)$, где $V = V(\omega_1)$ – неприводимый G-модуль старшего веса ω_1. Здесь $\dim V = 7$, ω_1 определяется согласно формуле $\langle \omega_1, \alpha_1 \rangle = 1$ и $\langle \omega_1, \alpha_2 \rangle = 0$, то есть $\omega_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$. Далее, в V можно выбрать базис $e_{M_1}, e_{M_2}, e_{M_3}, e_{-M_1}, e_{-M_2}, e_{-M_3}, e_{M_0}$, где M_i – следующие веса:

$$\begin{aligned} M_1 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_1, & M_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, & M_3 &= -\varepsilon_3 + \varepsilon_2, & \\ -M_1 &= -\varepsilon_3 + \varepsilon_1, & -M_2 &= -\varepsilon_1 + \varepsilon_2, & -M_3 &= \varepsilon_3 - \varepsilon_2, & M_0 &= 0. \end{aligned}$$

Далее, V как $A_2(K)$-модуль ($A_2(K)(\cong \mathrm{SL}_3(K)) \leqslant G = G_2(K)$) разлагается в прямую сумму $V = V_1 + V_2 + V_0$, где

$$V_1 = \langle e_{M_1}, e_{M_2}, e_{M_3} \rangle, \quad V_2 = \langle e_{-M_1}, e_{-M_2}, e_{-M_3} \rangle,$$

$V_0 = \langle e_{M_0} \rangle$ – подпространства, порождаемые соответствующими весовыми векторами. Таким образом, если элемент g группы $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$ представляется диагональной матрицей $\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, то $\rho(g)$ представляется диагональной матрицей $\operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}, 1)$.

1.9. При доказательстве основного результата мы используем следующий простой факт:

Лемма 1. *Пусть σ, $\tau \in \mathrm{GL}_2(K)$, где K – алгебраическое замкнутое поле, σ и τ – нескалярные матрицы. Тогда для любой нескалярной* *матрицы* $\varepsilon \in \mathrm{GL}_2(K)$ *такой, что* $\det\varepsilon = \det\sigma \cdot \det\tau$ *существуют матрицы* γ, $\delta \in \mathrm{SL}_2(K)$, *удовлетворяющие следующему условию:* $\varepsilon = \gamma\sigma\gamma^{-1}\delta\tau\delta^{-1}$.

Доказательство. Пусть $a = \det\sigma$, $b = \det\tau$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \cdot \mathrm{diag}\left(\sqrt{a}^{\,-1}, \sqrt{a}^{\,-1}\right) \\ \tau_1 &= \tau \cdot \mathrm{diag}\left(\sqrt{b}^{\,-1}, \sqrt{b}^{\,-1}\right) \end{aligned}\right\} \in \mathrm{SL}_2(K).$$

Отсюда нецентральную матрицу

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \mathrm{diag}\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}, \left(\sqrt{ab}\right)^{-1} \in \mathrm{SL}_2(K)$$

можно представить в виде $\varepsilon = \gamma\sigma_1\gamma^{-1}\delta\tau_1\delta^{-1}$ для некоторых γ, $\delta \in \mathrm{SL}_2(K)$ (см. [10]). Умножая обе части на скалярную матрицу

$$\mathrm{diag}\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{diag}\left(\sqrt{a}, \sqrt{a}\right) \cdot \mathrm{diag}\left(\sqrt{b}, \sqrt{b}\right),$$

получаем требуемое выражение. ■

2. Основной результат

Теорема. *Моноид* $M_{\mathrm{cs}}(G)$ *состоит из элементов следующих типов:*

C_α, $C_{\beta\beta}$, C_{-1}, C_ε, C_{t_r}, 1 *(классы сопряженных),*

M_{yy}, M_{-yy}, 0 *(мультиклассы).*

При этом,

$m_1 \cdot m_2 = 0$

для любых m_1, $m_2 \neq 1$ *за исключением случаев:*

$C_\varepsilon \cdot C_\varepsilon = M_{yy}$, $C_\varepsilon \cdot C_{-1} = M_{-yy}$.

Следующий результат, используемый при доказательстве теоремы, является обобщением [13, Proposition 5].

Предложение. *Пусть* G *– простая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем и* m_1, m_2 *– два мультикласса группы* G. *Если* m_1 *содержит полупростой регулярный элемент группы* G, *а* $m_2 \not\subset Z(G)$, *то* $\overline{m_1\, m_2} = G$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $m_1 = C_h$ – класс сопряженных элементов регулярного полупростого элемента h, а $m_2 = C_g$ – класс сопряженных любого элемента $g \in C \setminus Z(G)$.

Пусть T – максимальный тор группы G и $t \in T$ – регулярный элемент. Тогда $C_h C_{t^{-1}} \supset G \setminus Z(G)$ (см. [10–12]), где $C_{t^{-1}}$ – класс сопряженных с элементом t^{-1}. Следовательно, $g^{-1} = \sigma h \sigma^{-1} \tau t^{-1} \tau^{-1}$ для некоторых σ, $\tau \in G$. Таким образом, $t = \left(\tau^{-1} g \tau\right)\left(\tau^{-1} \sigma h \sigma^{-1} \tau\right) \in C_g C_h$. Поскольку множество регулярных полупростых элементов плотно в G, имеем $\overline{C_g C_h} = G$. ■

Лемма 2. $\overline{C_{t_r} m} = 0$ *для любого мультикласса* $m \in M_{\mathrm{cs}}(G)$, $m \neq 1$.

Доказательство. Следует из Предложения. ■

Лемма 3. $\overline{C^2} = 0$ *для любого полупростого класса, отличного от* C_ε *и* 1.

Доказательство. Пусть $C = C_\alpha$, $t \in C_\alpha \cap T$. Рассмотрим t как элемент подгруппы $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$. Пусть Q_α – класс сопряженности t в $\mathrm{SL}_3(K)$. Так как $t = \mathrm{diag}(\alpha, 1, \alpha^{-1})$, $\alpha \neq \pm 1$, есть регулярный элемент в группе $\mathrm{SL}_3(K)$, то $\overline{Q_\alpha^2} = \mathrm{SL}_3(K)$ (см. Предложение). Следовательно, $T \subset \overline{Q_\alpha^2} \subset \overline{C_\alpha^2}$, откуда $\overline{C_\alpha^2} = G$ (см. 1.6).

Пусть $C = C_{\beta\beta}$. Пусть $t = \mathrm{diag}\left(\beta, \beta, \beta^{-2}\right) \in C_{\beta\beta} \cap T$. Рассмотрим элемент $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta)$. В базисе $\{e_{M_i}\}$ матрицы $\rho(t)$ и $\rho\left(h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta)\right)$ имеют вид:

$$\mathrm{diag}\left(\beta, \beta, \beta^{-2}, \beta^{-1}, \beta^{-1}, \beta^2, 1\right).$$

Следовательно, $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta) = t$. Так как $\beta \neq \pm 1$, то для любого $\gamma \in K^*$, $\gamma \neq \pm 1$, существуют σ, $\tau \in \langle X_{2\alpha_1+\alpha_2} \rangle$ такие, что

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma) = \sigma\, h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta)\, \sigma^{-1} \tau\, h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta)\, \tau^{-1}.$$

Отсюда для любого $\gamma \in K^*$, $\gamma \neq \pm 1$, $\mathrm{diag}(\gamma, \gamma, \gamma^{-2}) \in C_{\beta\beta}^2 \cap T$ (см. лемму 1). Следовательно, $M_{yy} \subset \overline{C_{\beta\beta}^2}$ (по определению M_{yy}; 1.7). Далее, рассмотрим элемент $t = \mathrm{diag}(\beta, \beta, \beta^{-2})$ как элемент группы $\mathrm{SL}_3(K)$. В свою очередь, t можно рассмотреть как элемент группы $F \leqslant \mathrm{SL}_3(K)$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\boxed{A}}} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A \in \mathrm{GL}_2(K) \quad \text{и} \quad x \cdot \det A = 1.$$

Здесь t будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-2} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 следует, что для любых γ, $\delta \in K^*$, $\gamma \neq \delta$, удовлетворяющих условию $\gamma\delta = \beta^{-2}$, $\gamma \neq \delta$, существуют f_1, $f_2 \in F$ такие, что

$$f_1\, t\, f_1^{-1}\, f_2\, t\, f_2^{-1} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для любых γ, $\delta \in K^*$, $\gamma \neq \delta$, $\gamma\delta = \beta^{-2}$ существует элемент $\ell = \operatorname{diag}(\beta^2, \gamma, \delta) \in \overline{C^2_{\beta\beta}} \cap T$. Очевидно, $\ell \notin M_{yy}$ при подходящих γ, δ. Далее, пересечение $M_{yy} \cap T$ состоит из неприводимых компонент размерности 1, составляющих одну W-орбиту (см. определение M_{yy}; 1.7). Так как $\overline{C^2_{\beta\beta}}$ – неприводимое замкнутое $\operatorname{Int} G$-инвариантное множество, то пересечение $\overline{C^2_{\beta\beta}} \cap T$ является объединением неприводимых компонент, также составляющих одну W-орбиту (см. 1.5). Так как $M_{yy} \cap T \subsetneqq \overline{C^2_{\beta\beta}} \cap T$, то $\overline{C^2_{\beta\beta}} \cap T = T$, а значит, (см. 1.6) $\overline{C^2_{\beta\beta}} = G$.

Пусть $C = C_{-1}$. Рассмотрим элемент $\widehat{t} = \operatorname{diag}(-1, -1, 1) \in C_{-1}$. Легко видеть, что $\widehat{t} = h_{2\alpha_1+\alpha_2}(-1)$. Рассмотрим группу $\Gamma = \langle \widehat{t}, X_{\pm\alpha_1} \rangle$. Имеем,

$$\widehat{t}\, x_{\pm\alpha_1}(u) \widehat{t}^{-1} = x_{\pm\alpha_1}\left((-1)^{\langle 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \rangle} u \right) =$$
$$= x_{\pm\alpha_1}\left((-1)^{\langle \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle} u \right) = x_{\pm\alpha_1}((-1)u) = x_{\pm\alpha_1}(-u).$$

Следовательно,

$$\Gamma \cong \langle \mathrm{SL}_2(K), \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(K),$$

где $\widehat{t}$ соответствует матрице $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Из леммы 1 получаем, что для любого $y \in \langle X_{\pm\alpha_1} \rangle$, $y \neq \pm 1$, $y = \gamma_1 \widehat{t} \gamma_1^{-1} \gamma_2 \widehat{t} \gamma_2^{-1}$ для подходящего γ_1, $\gamma_2 \in \langle X_{\pm\alpha_1} \rangle$. Следовательно, для любого $s \in K^*$, $s \neq \pm 1$, $h_{\alpha_1}(s) \in C^2_{-1}$. В базисе $\{e_{M_1}, e_{M_2}, e_{M_3}\}$ матрица $h_{\alpha_1}(s)$ – это $\operatorname{diag}(s^{-1}, s^2, s^{-1})$. Следовательно, $M_{yy} \subset \overline{C^2_{-1}}$. Рассмотрим теперь $\widehat{t} = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)$ как элемент группы $\mathrm{SL}_3(K)$. Те же рассуждения, что и в случае $C_{\beta\beta}$, показывают, что $M_x \subset \overline{C^2_{-1}}$. Так как M_x, M_{yy} есть $\operatorname{Int} G$-инвариантные замкнутые множества, а каждое из множеств $M_x \cap T \neq M_{yy} \cap T$ есть объединение неприводимых компонент, составляющих одну W-орбиту, то $\overline{C^2_{-1}} \cap T = T$ (см. 1.5), а, следовательно, $\overline{C^2_{-1}} = G$ (см. 1.6). ■

Лемма 4. *Пусть C_1, C_2 – полупростые классы такие, что $C_1, C_2 \neq C_\varepsilon$, 1. Тогда $\overline{C_1C_2} = 0$.*

Доказательство. Случай $C_1 = C_{t_r}$ или $C_2 = C_{t_r}$ охватывается леммой 2. Если C_1 или C_2 равны C_α, то утверждение леммы следует из Предложения. Действительно, пусть $C_1 = C_\alpha$, а Q_α – класс сопряженных с матрицей $\mathrm{diag}\,(\alpha, 1, \alpha^{-1})$, $\alpha \neq \pm 1$, в $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$. Тогда $\overline{Q_\alpha(A_2(K) \cap C_2)} = \mathrm{SL}_3(K)$ (по Предложению, поскольку в $\mathrm{SL}_3(K)$ матрица $\mathrm{diag}\,(\alpha, 1, \alpha^{-1})$, $\alpha \neq \pm 1$, – регулярный полупростой элемент). Из включения $T \subset \overline{Q_\alpha(A_2(K) \cap C_2)} \subset \overline{C_1C_2}$ следует, что $\overline{C_1C_2} = G$ (см. 1.6).

Остались случаи классов типа 2, 3. Так как квадраты таких классов рассмотрены выше, то можно считать $C_1 = C_{\beta\beta}$, $C_2 = C_{-1}$. Далее,

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta) = t = \mathrm{diag}\,(\beta, \beta, \beta^{-2}) \in C_{\beta\beta}.$$

Пусть

$$\widehat{t} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1) \in C_{-1}.$$

Рассмотрим группу

$$\Gamma = \langle X_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}, \widehat{t}\,\rangle.$$

Так как

$$\widehat{t} x_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}(u)\widehat{t}^{-1} = x_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}(-u),$$

то группу Γ можно рассматривать как подгруппу $\mathrm{GL}_2(K)$, где $\langle X_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}\rangle \cong \mathrm{SL}_2(K)$, а $\widehat{t}$ как матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Применяя лемму 1, получаем, что для любой нескалярной матрицы $x \in \mathrm{GL}_2(K)$ такой, что $\det x = -1$ существуют a, $b \in \mathrm{SL}_2(K)$ такие, что $x = a\,t\,a^{-1}\,b\,\widehat{t}\,b^{-1}$.

В частности, в качестве x можно взять любую нескалярную диагональную матрицу $\mathrm{GL}_2(K)$ с определителем, равным -1. Так как любую матрицу с определителем -1 можно представить в виде $y\widehat{t}$, где $y \in \mathrm{SL}_2(K)$, то для любого $\gamma \in K^*$, $\gamma \neq \pm\sqrt{-1}$, элемент $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)\ \widehat{t}$ можно взять в качестве x. Далее, элемент $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)$ соответствует матрице в $\mathrm{SL}_3(K)$ вида $\mathrm{diag}\,(\gamma, \gamma, \gamma^{-2})$, а $\widehat{t} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1)$. Следовательно,

$$\mathrm{diag}\,(\gamma, -\gamma, -\gamma^{-2}) \subset C_{\beta\beta}C_{-1} \quad \text{для любого} \quad \gamma \neq \pm\sqrt{-1}.$$

Рассмотрим теперь классы сопряженных элементов с

$$\operatorname{diag}(\beta,\beta,\beta^{-2}) \quad \text{и} \quad \operatorname{diag}(1,-1,-1) \quad \text{в} \quad A_2(K).$$

Применяя лемму 1, получаем, что в произведении таких классов находится любая диагональная матрица вида $\operatorname{diag}(-\beta,\gamma,-\beta^{-1}\gamma^{-1})$ для любого γ такого, что $\gamma^2 \neq -\beta^{-1}$. Следовательно, такие матрицы, у которых фиксировано одно собственное значение $-\beta$, а два других произвольные, не равные между собой, но с условием, что их произведение равно $-\beta^{-1}$, содержатся в $C_{\beta\beta}\,C_{-1}$. Так как множество $C_{\beta\beta}\,C_{-1}$ является $\operatorname{Int} G$-инвариантным, то множество диагональных матриц $\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in A_2(K)$, у которых одно из собственных значений $\alpha_i = -\beta^{-1}$, также содержится в $C_{\beta\beta}\,C_{-1}$. Следовательно, множество

$$M_{-\beta} = \left\{\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K) \mid \alpha_i = -\beta^{\pm 1}\right\}$$

содержится в $\overline{C_{\beta\beta}\,C_{-1}} \cap T$. Отметим, что $M_{-\beta}$ – это замкнутое множество, являющееся W-орбитой своей неприводимой компоненты,

$$M^1_{-\beta} = \left\{\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K) \mid \alpha_1 = -\beta\right\}.$$

Далее, $\dim M_{-\beta} = 1$. Как было показано выше,

$$\operatorname{diag}(\gamma,-\gamma,-\gamma^{-2}) \in C_{\beta\beta}\,C_{-1} \quad \text{для любого} \quad \gamma \neq \pm 1.$$

Следовательно, $\overline{C_{\beta\beta}\,C_{-1}} \cap T \neq M_{-\beta}$ – это замкнутое подмножество T, являющееся W-орбитой своей неприводимой компоненты, тогда $\dim \overline{C_{\beta\beta}\,C_{-1}} \cap T > 1$, то есть $\overline{C_{\beta\beta}\,C_{-1}} \cap T = T$. Следовательно $\overline{C_{\beta\beta}\,C_{-1}} = G$. ■

Лемма 5. $\overline{C_\varepsilon\,C_{\beta\beta}} = 0$.

Доказательство. Имеем

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta) = \operatorname{diag}(\beta,\beta,\beta^{-2}) \in C_{\beta\beta},$$

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon) \in C_\varepsilon.$$

Так как $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\beta)$ и $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\varepsilon)$ – нецентральные элементы группы $\langle X_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}\rangle$, то для любого $\gamma \in K^*$,

$$\gamma \neq \pm 1, \quad h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma) = \operatorname{diag}(\gamma,\gamma,\gamma^{-2}) \in C_\varepsilon\,C_{\beta\beta}$$

(лемма 1). Следовательно, $M_{yy} \subset \overline{C_\varepsilon\, C_{\beta\beta}}$. Далее,

$$\delta = h_{\alpha_1}(\beta) = \operatorname{diag}\left(\beta^{-1}, \beta^2, \beta^{-1}\right) \in C_{\beta\beta}.$$

Рассмотрим группу $\Gamma = \langle X_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}, \delta\rangle$. Как и выше отождествим ее с погруппой $\mathrm{GL}_2(K)$, так как

$$\left\langle X_{\pm(2\alpha_1+\alpha_2)}\right\rangle \cong \mathrm{SL}_2(K), \quad \text{а} \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 получаем, что для любого $\gamma \in K^*$,

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)\,\delta \notin Z(\mathrm{GL}_2(K))$$

имеет место включение $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)\,\delta \in C_\varepsilon\, C_{\beta\beta}$. Следовательно,

$$\operatorname{diag}\left(\gamma\beta^{-1},\, \gamma\beta^2,\, \gamma^{-2}\beta^{-1}\right) \in C_\varepsilon\, C_{\beta\beta} \quad \text{для любого} \quad \gamma \in K^*, \quad \gamma^2 \neq \beta^{-1}.$$

Отметим, что при $\gamma \neq \gamma^2$, $\gamma \neq \beta^2$, $\beta^{-1} \neq \beta^2$

$$\operatorname{diag}\left(\gamma\beta^{-1},\, \gamma\beta^2,\, \gamma^{-2}\beta^{-1}\right) \notin M_{yy}.$$

Следовательно, $\overline{C_\varepsilon\, C_{\beta\beta}} \cap T \neq M_{yy} \cap T$. Отсюда, как и выше, $\overline{C_\varepsilon\, C_{\beta\beta}} = G$. ■

Лемма 6. $\overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} = M_{-yy}$.

Доказательство. Покажем, что $M_{-yy} \subset \overline{C_\varepsilon\, C_{-1}}$. Имеем

$$h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\varepsilon) \in C_\varepsilon, \quad \delta = \operatorname{diag}(1, -1, -1) \in C_{-1}.$$

Рассматривая, как и выше, группу $\Gamma = \langle X_{2\alpha_1+\alpha_2}(\varepsilon), \delta\rangle$, и, применяя лемму 1, получаем

$$\operatorname{diag}(\gamma, -\gamma, -\gamma^{-2}) \in \overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} \quad \text{для любого} \quad \gamma \in K^*.$$

Следовательно, $M_{-yy} \subset C_\varepsilon\, C_{-1}$. Для почти всех $\gamma \in K^*$ (кроме конечного числа) элемент $t = \operatorname{diag}(\gamma, -\gamma, -\gamma^{-2}) \in T$ регулярен. Тогда $\dim C_t = \dim G - \dim T = 14 - 2 = 12$ (где C_t – класс сопряженных t). Рассмотрим отображение $\pi : G \to G/\mathrm{Int}\, G$. Так как t – полупростой регулярный элемент, то $\pi^{-1}(\pi(t)) = C_t$. Так как $t \in M_{-yy}$, то $C_t \subset M_{-yy}$, следовательно, размерность слоя общего положения ограничения π на M_{-yy} равна $\dim C_t$. Поэтому

$$\dim M_{-yy} = \dim C_t + \dim \pi\,(M_{-yy} \cap T) = 12 + 1 = 13 = \dim G - 1.$$

Таким образом, если $M_{-yy} \neq \overline{C_\varepsilon\, C_{-1}}$, то $\overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} > \dim M_{-yy}$, то есть $\dim \overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} = G$, откуда $\overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} = G$. Следовательно, достаточно показать, что $\overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} \neq G$. Централизатор элемента $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ – это группа $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$, а централизатор $\operatorname{diag}(-1, 1, -1)$ – это произведение коммутирующих групп $\langle X_{\pm\alpha_1}\rangle \times \langle X_{\pm(3\alpha_1+2\alpha_2)}\rangle$ (см.1.4). Тогда

$$\dim C_\varepsilon = \dim G - \dim A_2(K) = 14 - 8 = 6,$$

$$\dim C_{-1} = \dim G - \dim \langle X_{\pm\alpha_1}\rangle \times \langle X_{\pm(3\alpha_1+2\alpha_2)}\rangle = 14 - (3+3) = 8.$$

Рассмотрим отображение $\varphi : C_\varepsilon \times C_{-1} \to G$, определяемое формулой $\varphi((c_1, c_2)) = c_1 c_2$. Так как

$$\dim C_\varepsilon \times C_{-1} = \dim C_\varepsilon + \dim C_{-1} = 6 + 8 = 14 = \dim G,$$

то условие $\overline{\varphi(C_\varepsilon \times C_{-1})} = G$ эквивалентно тому, что слой общего положения отображения φ имеет размерность ноль. Пусть $\varphi^{-1}(t)$ – слой общего положения, где $t \in T$ – регулярный полупростой элемент (так как множество полупростых элементов открыто и плотно в G, мы всегда можем рассматривать именно такой слой). Пусть $(c_1, c_2) \in \varphi^{-1}(t)$, то есть $c_1 c_2 = t$. Далее, для любого $s \in T$ имеет место $s\,t\,s^{-1} = t$. Тогда $(s\,c_1\,s^{-1})(s\,c_2\,s^{-1}) = s\,t\,s^{-1} = t$, то есть для любого $s \in T$ пара $(s\,c_1\,s^{-1}, s\,c_2\,s^{-1}) \in \varphi^{-1}(t)$. Так как $\dim \varphi^{-1}(t) = 0$, то существует лишь конечное число таких пар. Следовательно, существует подгруппа $T_1 \leqslant T$ конечного индекса, такая, что $s\,c_1\,s^{-1} = c_1$, $s\,c_2\,s^{-1} = c_2$ для любого $s \in T_1$. Поскольку T – тор, то подгруппа конечного индекса T_1 совпадает с T. Следовательно, T коммутирует с c_1 и c_2, а значит $c_1 \in T$, $c_2 \in T$ и $c_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, $c_2 = \operatorname{diag}(-1, 1, -1)$ (с точностью до перестановки собственных значений 1, -1). Тогда $t = c_1 c_2 = \operatorname{diag}(-\varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon)$, но такой элемент не регулярен, что противоречит выбору t. Следовательно, $\dim \varphi^{-1}(t) > 0$ и $\overline{C_\varepsilon\, C_{-1}} \neq G$. ■

Лемма 7. $\overline{C_\varepsilon^2} = M_{yy}$, $\overline{C_\varepsilon^3} = 0$.

Доказательство. Как и выше, $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \in C_\varepsilon$. Следовательно, для любого $\gamma \in K^*$, $\gamma \neq \pm 1$, $h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma) = \operatorname{diag}(\gamma, \gamma, \gamma^{-2}) \in C_\varepsilon^2$, то есть $M_{yy} \subset \overline{C_\varepsilon^2} \neq G$. (Действительно, $\dim \overline{C_\varepsilon^2} \leqslant \dim C_\varepsilon + \dim C_\varepsilon = 6 + 6 = 12 < 14 = \dim G$.) Тогда $\overline{C_\varepsilon^2} \cap T \neq T$. Так как $M_{yy} \cap T$ – W-орбита неприводимой компоненты размерности 1 и $\dim T = 2$, то $\overline{C_\varepsilon^2} \cap T = M_{yy} \cap T$. Пусть

$\pi : G \to G/\mathrm{Int}\,G$, $\theta : T \to T/W$ – соответствующие факторные морфизмы. Тогда $T/W \cong G/\mathrm{Int}\,G$ и для любого $x \in G$ такого, что $x_s \in T$,

$$\pi(x) = \pi(x_s) = \theta(x_s), \tag{$*$}$$

где $x = x_s x_u$ – жорданова форма элемента x (см. [5, II, 3.2]). Рассмотрим ограничение $\widehat{\pi} : \overline{C_\varepsilon^2} \to G/\mathrm{Int}\,G$ морфизма π на $\overline{C_\varepsilon^2}$. Пусть $x \in \overline{C_\varepsilon^2}$, $x_s \in T$ (этого можно добиться, сопрягая x с подходящим элементом $g \in G$). Пусть C_x – класс сопряженных x. Тогда $x_s \in \overline{C_x}$ (см. [5, II, 3, 7]) и $\overline{C_x} \subset \overline{C_\varepsilon^2}$, то есть $x_s \in \overline{C_\varepsilon^2}$. Отсюда, учитывая ($*$), получаем $\widehat{\pi}(\overline{C_\varepsilon^2}) = \theta(\overline{C_\varepsilon^2} \cap T)$. Но, как показано выше, $\overline{C_\varepsilon^2} \cap T = M_{yy} \cap T$. Следовательно, $\widehat{\pi}(\overline{C_\varepsilon^2}) = \theta(M_{yy} \cap T)$. Так как θ – конечный морфизм, то $\dim \widehat{\pi}(\overline{C_\varepsilon^2}) = \dim(M_{yy} \cap T) = 1$.

Пусть $V \subset \theta(M_{yy} \cap T)$ – открытое подмножество точек, слои которых $\widehat{\pi}^{-1}(v)$, $v \in V$, имеют размерность $\dim \overline{C_\varepsilon^2} - 1$, то есть точек общего положения, $U = \widehat{\pi}^{-1}(V) \subset \overline{C_\varepsilon^2}$ – будет также открытым подмножеством. Пусть $x \in U$, $F_x = \widehat{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(x))$ – слой, C_x – класс сопряженных элемента x. Так как $U = \widehat{\pi}^{-1}(V)$ – $\subset G$-инвариантно, то $C_x \subset F_x$. Можно считать, что $x_s \in T$ (напомним, что x_s – полупростая часть жорданова разложения $x = x_s x_u$). Ввиду сказанного выше, $x_s \in M_{yy} \cap T$, то есть x_s – W-сопряжен $\mathrm{diag}(\gamma, \gamma, \gamma^{-2})$ для некоторого $\gamma \in K^*$. Можно считать, что $x_s = \mathrm{diag}(\gamma, \gamma, \gamma^{-2}) = h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)$ (сопрягая x с подходящим элементом из W) и что $\gamma \neq \pm 1$, $\sqrt[3]{1}$ (из множества U можно выбросить конечное число точек). Таким образом, централизатор элемента x_s есть $T \times \langle X_{\pm\alpha_2} \rangle$, то есть $x_u \in \langle X_{\pm\alpha_2} \rangle$. Покажем, что $x_u = 1$. Предположим противное. Можно считать, что $x_u = x_{\alpha_2}(1)$ (это можно получить также подходящим сопряжением x с элементом из $\langle X_{\pm\alpha_2} \rangle$). Теперь, если $x = h_{2\alpha_1+\alpha_2}(\gamma)\, x_{\alpha_2}(1)$, то централизатор элемента x – это группа $C_G(x) = \langle h_{2\alpha_1+\alpha_2}(t) \rangle \times \langle x_{\alpha_2}(s) \rangle$, где t пробегает множество K^*, а s – множество K. Следовательно, $\dim C_G(x) = 2$, то есть $\dim C_x = \dim G - \dim C_G(x) = 14 - 2 = 12$, и значит $\dim F_x \geqslant \dim C_x \geqslant 12$. С другой стороны, ввиду выбора F_x, $\dim F_x = \dim \overline{C_\varepsilon^2} - 1$. Следовательно, $\dim \overline{C_\varepsilon^2} \geqslant 13$, что противоречит неравенству $\dim \overline{C_\varepsilon^2} \leqslant \dim C_\varepsilon + \dim C_\varepsilon = 6 + 6 = 12$. Таким образом, $x_u = 1$, то есть $x = x_s$ – полупростой элемент. Следовательно, $C_x = \overline{C_x}$ – замкнутое по Зарисскому множество ([5, II, 3, 6]). Так как x выбирается произвольно, а в слое F_x существует только одна замкнутая орбита ([3, II, 3.3, теорема 3]), то

$F_x = C_x$. Таким образом, $U = \bigcup\limits_{x \in V'} C_x$, где V' – некоторое открытое множество в $M_{yy} \cap T$. Из определения M_{yy} следует $U \subset M_{yy}$. Далее, U – открытое подмножество в $\overline{C_\varepsilon^2}$. Так как $U \subset M_{yy} \subset \overline{C_\varepsilon^2}$, то $\overline{U} = M_{yy} = \overline{C_\varepsilon^2}$.

Покажем теперь, что $\overline{C_\varepsilon^3} = G$. Так как $C_{\beta\beta} \subset M_{yy}$, $\beta \neq \pm 1$, $\sqrt[3]{1}$, то $\overline{C_\varepsilon^3} \supset \overline{C_{\beta\beta}\, C_\varepsilon} = G$ (лемма 5). Таким образом $\overline{C_\varepsilon^3} = G$. ■

Рассмотрим случай $\overline{C_\alpha\, C_\varepsilon}$. Ниже мы покажем, что $\overline{C_\alpha\, C_\varepsilon} = G$.

Этот случай более труден, чем остальные, и требует разделения на несколько этапов.

Лемма 8. *V – конечномерное линейное пространство над алгебраически замкнутым полем K, $G \leqslant \mathrm{GL}\,(V)$ – замкнутая связная подгруппа, U, U_1, $U_2, \ldots, U_\ell \subset V$ – линейные подпространства V. Если*

$$U \cap g_1(U_1) = 0, \quad U \cap g_2(U_2) = 0, \ldots, U \cap g_\ell(U_\ell) = 0$$

для некоторой последовательности элеметов $g_1, \ldots, g_\ell \in G$, то найдется такой элемент $g \in G$, что

$$U \cap g(U_1) = 0, \quad U \cap g(U_2) = 0, \ldots, U \cap g(U_\ell) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{GL}\,(V)$. Зафиксируем базис пространства V. Тогда x представляется матрицей $(x_{pq}) \in \mathrm{GL}_n(K)$, $n = \dim V$. Пусть $e_1, \ldots, e_k$, $f_{1i}, \ldots, f_{si}$ – столбцы координат векторов базисов пространств U и U_i в фиксированном базисе V. Тогда $\{e_1, \ldots, e_k, xf_{1i}, \ldots, xf_{si}\}$ – стобцы координат векторов, порождающих пространство $U + xU_i$. Таким образом

$$\mathrm{rang}\,\{e_1, \ldots, e_k, xf_{1i}, \ldots, xf_{si}\} = \dim\,(U + xU_i).$$

Условие $U \cap xU_i \neq 0$ равносильно

$$\dim\,(U + xU_i) \leqslant m = \min\{n,\, (\dim U + \dim xU_i) - 1\}$$

или

$$\mathrm{rang}\,\{e_1, \ldots, e_k, xf_{1i}, \ldots, xf_{si}\} \leqslant m,$$

что выполняется тогда и только тогда, когда миноры матрицы $\{e_1, \ldots, e_k, xf_{1i}, \ldots, xf_{si}\}$ ранга $m{+}1$ равны нулю. Последнее условие дает систему алгебраических уравнений на коэффициентах матрицы (x_{pq}), отсюда получаем, что

$$M_i = \{x \in \mathrm{GL}\,(V) \mid U \cap xU_i \neq 0\}$$

– замкнутое подмножество в $\mathrm{GL}(V)$, следовательно, $G \cap M_i$ также замкнуто, то есть $X_i = G \backslash (G \cap M_i)$ открыто, а так как $g_i \in X_i$, то и не пусто. Отсюда $\cap X_i$ не пусто (так как G – связна), следовательно, существует $g \in \cap X_i$, который и будет искомым элементом. ■

Рассмотрим присоединенное представление $G = G_2(K)$ на алгебре Ли L группы G. Имеем

$$L = H + U, \quad U = \sum_{\alpha \in R} U_\alpha,$$

где H – картановская подалгебра, соответствующая тору T, $R = R(G_2)$ – система корней, U_α – корневое подпространство. Зафиксируем $u_\alpha \in U$, $u_\alpha \neq 0$.

Рассмотрим действие

$$\sigma = h_{\alpha_1}(\varepsilon) \in C_\varepsilon \cap T \quad \text{и} \quad \tau = h_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}(s) \in C_\alpha \cap T$$

(здесь $\varepsilon^3 = 1$, $s \neq \pm 1$) на L (действие оператора $\mathrm{ad} g$ на L для $g \in G = G_2(K)$ будем обозначать $g(\ell)$, где $\ell \in L$).

Пусть $L_1 \cong \mathrm{sl}_3(K) \subset L$ – подалгебра, порожденная H и U_α, где α пробегает все длинные корни, а $L_2 = \sum\limits_{\alpha-\text{короткий}} U_\alpha$. Имеем $L = L_1 + L_2$. Очевидно, множество неподвижных векторов L^σ оператора σ совпадает с L_1. Положим

$$V_0 = H + U_{\alpha_1} + U_{-\alpha_1}, \quad V_s = U_{\alpha_1+\alpha_2} + U_{2\alpha_1+\alpha_2} + U_{\alpha_2} + U_{3\alpha_1+\alpha_2},$$

$$V_{s^2} = U_{3\alpha_1+2\alpha_2}, \quad V_{s^{-2}} = U_{-3\alpha_1-2\alpha_2},$$

$$V_{s^{-1}} = U_{-\alpha_1-\alpha_2} + U_{-2\alpha_1-\alpha_2} + U_{-\alpha_2} + U_{-3\alpha_1-\alpha_2}.$$

Простая проверка (здесь $h_\beta(t)(U_\gamma) = t^{(\alpha\beta)} U_\gamma$) показывает:

$$\begin{aligned} \tau(v) &= s^{\pm 1} v, && \text{если} \quad v \in V_{s^{\pm 1}}, \\ \tau(v) &= s^{\pm 2} v, && \text{если} \quad v \in V_{s^{\pm 2}}, \\ \tau(v) &= v, && \text{если} \quad v \in V_0. \end{aligned}$$

Лемма 9. *Пусть $g = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(1)\, x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$. Тогда $L_1 \cap g(V_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть

$$v = h + v_{\alpha_1} + v_{-\alpha_1} \in V_0, \quad \text{где} \quad h \in H, \quad v_{\pm\alpha_1} \in U_{\pm\alpha_1},$$

и пусть $g(v) \in L_1$, то есть $g(v) \in L_1 + U^+$, где

$$U^+ = \sum_{\alpha > 0} U_\alpha.$$

Легко видеть, что $g(h) + g(v_{\alpha_1}) \in H + U^+$ [4, §12, лемма 72], откуда $g(v_{-\alpha_1}) \in L_1 + U^+$. Но

$$g(v_{-\alpha_1}) = v_{-\alpha_1} + a_1\, u_{\alpha_2} + a_2\, u_{\alpha_1+\alpha_2} + a_3\, u_{3\alpha_1+2\alpha_2} \quad (a_1, a_2, a_3 \in K)$$

[4, §12]. Если $v_{-\alpha_1} \neq 0$, то $g(v_{-\alpha_1}) \notin L_1 + U^+$, то есть $v_{-\alpha_1} = 0$. Таким образом, $v = h + v_{\alpha_1}$. Далее, пусть

$$V' = U_{2\alpha_1+\alpha_2} + U_{\alpha_1+\alpha_2} + U_{3\alpha_1+2\alpha_2},$$

отсюда

$$g(h) \equiv h (\operatorname{mod} V'), \quad g(v_{\alpha_1}) \equiv v_{\alpha_1} (\operatorname{mod} V').$$

Если $g(v) \in L_1$, то $g(v) \in L_1 + V'$, то есть $g(v_{\alpha_1}) \in L_1 + V'$. Тогда $v_{\alpha_1} = 0$, следовательно, $v = h$. Но

$$g(h) = h + a_1\, u_{\alpha+\alpha_2} + a_2\, u_{2\alpha_1+\alpha_2} + b\, u_{3\alpha_1+2\alpha_2} \quad \text{для} \quad a_1,\ a_2,\ b \in K.$$

Так как $g(h)$ – присоединенное действие,

$$a_1\, u_{\alpha_1+\alpha_2} = c_1 \big[h, u_{\alpha_1+\alpha_2}\big], \quad a_2\, u_{2\alpha_1+\alpha_2} = c_2 \big[h, u_{2\alpha_1+\alpha_2}\big],$$

где $[\,,]$ – скобка Ли и $c_1,\ c_2 \neq 0$, то $a_1 = a_2 = 0$ возможно только лишь в случае $h = 0$. Поэтому условие $g(v) = g(h) \in L_1$ влечет $h = 0$. ■

Лемма 10. *Пусть* $g = x_{-2\alpha_1-\alpha_2}(1)\, x_{-\alpha_1-\alpha_2}(1)$. *Тогда* $L_1 \cap g(V_s) = 0$.

Доказательство. Пусть

$$v = v_{\alpha_1+\alpha_2} + v_{2\alpha_1+\alpha_2} + v_{\alpha_2} + v_{3\alpha_1+\alpha_2} \in V_s$$

(где $v_\gamma \in U_\gamma$ и $g(v) \in L_1$). Положим

$$\widetilde{V}_1 = L_1 + \sum_{\alpha < 0} U_\alpha + U_{\alpha_1}.$$

Если $g(v) \in L_1$, то $g(v) \in \widetilde{V}$, но

$$g\left(v_{\alpha_1+\alpha_2}\right) \equiv v_{\alpha_1+\alpha_2} \left(\operatorname{mod} \widetilde{V}_1\right),$$

$$g\left(v_{2\alpha_1+\alpha_2}\right) \equiv v_{2\alpha_1+\alpha_2} \left(\operatorname{mod} \widetilde{V}_1\right),$$

$$g\left(v_{\alpha_2}\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \widetilde{V}\right),$$

$$g\left(v_{3\alpha_1+\alpha_2}\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \widetilde{V}\right).$$

Тогда $v_{\alpha_1+\alpha_2} = v_{2\alpha_1+\alpha_2} = 0$, то есть $v = v_{\alpha_2} + v_{3\alpha_1+\alpha_2}$. Положим

$$\widetilde{V} = L_1 + \sum_{\alpha<0} U_\alpha.$$

Имеем

$$g\,(v_{\alpha_2}) \equiv 0 \,\left(\operatorname{mod} \widetilde{V}\right), \quad g\,(v_{3\alpha_1+\alpha_2}) \equiv v_{\alpha_1} \,\left(\operatorname{mod} \widetilde{V}\right),$$

причем $v_{\alpha_1} \neq 0$, если $v_{3\alpha_1+\alpha_2} \neq 0$, так как

$$v_{\alpha_1} = c\big[v_{3\alpha_1+\alpha_2}, u_{-2\alpha_1-\alpha_2}\big], \quad c \neq 0.$$

Тогда $v_{\alpha_1} = 0$, то есть $v = v_{\alpha_2}$. Но

$$g(v_{\alpha_2}) = v_{\alpha_2} + v_{-\alpha_1} + \dots, \quad \text{где} \quad v_{-\alpha_1} = c\big[v_{\alpha_2}, u_{-\alpha_1-\alpha_2}\big], \quad c \neq 0.$$

Поэтому $v_{-\alpha_1} = 0$, отсюда $v_{\alpha_2} = 0$. Таким образом, $v = 0$. ■

Лемма 11. *Пусть $g = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(1)\, x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$. Тогда $L_1 \cap g(V_{s^{-1}}) = 0$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 10. ■

Лемма 12. *Пусть $g = x_{-2\alpha_1-\alpha_2}(1)$. Тогда $L_1 \cap g(V_{s^2}) = 0$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 10. ■

Лемма 13. *Пусть $g = x_{2\alpha_1+\alpha_2}(1)$. Тогда $L_1 \cap g(V_{s^{-2}}) = 0$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 10. ■

Лемма 14. *Существует $g \in G$ такой, что*

$$L_1 \cap g\,(V_0) = 0, \quad L_1 \cap g\,(V_s) = 0,$$

$$L_1 \cap g\,(V_{s^{-1}}) = 0, \quad L_1 \cap g\,(V_{s^2}) = 0, \quad L_1 \cap g\,(V_{s^{-2}}) = 0,$$

Доказательство. Следует из лемм 8–12. ■

Лемма 15. *Не существует ненулевого вектора $v \in L$ такого, что $\sigma(v) = v$, $g\,\tau\,g^{-1}(v) = m\,v$, где $m \in K^*$, а g из леммы 14.*

Доказательство. Условие $\sigma(v) = v$ равносильно $v \in L_1$. С другой стороны, собственные векторы оператора $g\,\tau\,g^{-1}$ лежат в подпространствах $g(V_0)$, $g(V_{s^{\pm 1}})$, $g(V_{s^{\pm 2}})$, которые, в силу леммы 14, имеют нулевые пересечения с L_1. ■

Лемма 16. *Пара $(\sigma, g\tau g^{-1})$, где $g \in G$ такой, что*

$$L_1 \cap g(V_0) = 0, \quad L_1 \cap g(V_s) = 0,$$

$$L_1 \cap g(V_{s^{-1}}) = 0, \quad L_1 \cap g(V_{s^2}) = 0, \quad L_1 \cap g(V_{s^{-2}}) = 0,$$

не содержится ни в какой собственной параболической подгруппе группы G.

Доказательство. Предположим, что σ, $g\,\tau\,g^{-1} \in P$, где P – собственная параболическая подгруппа группы G, тогда $xPx^{-1} = P_{\mathrm{st}}$, где P_{st} – стандартная параболическая подгруппа, то есть $x\sigma x^{-1}$, $x\,g\,\tau\,g^{-1}\,x^{-1} \in P_{\mathrm{st}}$. Далее, существует $y \in P_{\mathrm{st}}$ такой, что $y\,x\,\sigma\,x^{-1}\,y^{-1} \in T$. Положим $\gamma = yx$. Следовательно, $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1}$, $\gamma\,g\,\tau\,g^{-1}\,\gamma^{-1} \in P_{\mathrm{st}}$. Тогда $u_{3\alpha_1+2\alpha_2}$ – вектор, соответствующий максимальному корню, – является собственным вектором операторов $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1}$, $\gamma\,g\,\tau\,g^{-1}\,\gamma^{-1}$ в присоединенном представлении. Далее, $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1} \in T$, то есть $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1} = \sigma$ или $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1} = w_0(\sigma) = \sigma^{-1}$, где $w_0 = -1 \in W$ (действительно, $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1}$ и σ – сопряженные элементы одного и того же тора, то есть сопряжены элементом группы Вейля W, а так как только два элемента из класса сопряжены σ в T, а именно, σ и σ^{-1}, то $w = \pm 1$). Следовательно, $\gamma \in C_G(\sigma)$ или $\gamma \in w_0\,C_G(\sigma)$, где $C_G(\sigma)$ – централизатор σ в G, но $C_G(\sigma) = A_2(K)$. Следовательно, $\gamma^{-1}(u_{3\alpha_1+2\alpha_2}) \in L_1$, то есть $\gamma^{-1}(u_{3\alpha_1+2\alpha_2}) \in L_1$ – собственный вектор с собственными значениями 1 для σ. Но $\gamma^{-1}(u_{3\alpha_1+2\alpha_2}) \in L_1$ – также собственный вектор и для $g\,\tau\,g^{-1}$. Получаим противоречие с выбором g. ∎

Лемма 17. *Пусть $g \in G$ такой, что*

$$L_1 \cap g(V_0) = 0, \quad L_1 \cap g(V_s) = 0,$$

$$L_1 \cap g(V_{s^{-1}}) = 0, \quad L_1 \cap g(V_{s^2}) = 0, \quad L_1 \cap g(V_{s^{-2}}) = 0.$$

Тогда замыкание (в топологии Зарисского) группы $\langle \sigma,\, g\,\tau\,g^{-1}\rangle$ является редуктивной подгруппой в G.

Доказательство. Если $F = \overline{\langle \sigma,\, g\,\tau\,g^{-1}\rangle}$ не редуктивна, то $F \subset P$ для некоторой параболической подгруппы группы G [6, §30]. Получаем противоречие с леммой 16. ∎

Лемма 18. *Пусть группа $F = \overline{\langle \sigma, g\,\tau\,g^{-1}\rangle}$ такая, как в лемме 17. Тогда $Z(F) = Z(G) = 1$.*

Доказательство. Пусть $Z = Z(F)$ – центр группы F. Предположим, что $Z \neq 1$, и пусть $z \in Z$, $z \neq 1$. Существует $x \in G$ такой, что

$x\,z\,x^{-1} \in T$. Обозначим $z_x = x\,z\,x^{-1}$. Тогда $x\,F\,x^{-1} \in C_G(z_x)$. Следовательно, $C_G(z_x)$ – связная редуктивная группа [5, II, §3], тогда $C_G(z_x)$ порождается T и корневыми подгруппами X_α для тех α, для которых $\alpha(z_x) = 1$ [5, II, §4]. С точностью до сопряжения элементом из группы Вейля можно рассматривать следующие возможности для группы $C_G(z_x)$: T, $T \cdot G_\alpha$, $G_\alpha \cdot G_\beta$, $A_2(K) \cong \mathrm{SL}_3(K)$, где $G_\alpha = \langle X_{\pm\alpha} \rangle$ – подгруппа, порожденная корневыми подгруппами (можно считать, при подходящем сопряжении элементом группы Вейля $\alpha = \alpha_1$ или $\alpha = \alpha_2$), G_α, G_β – коммутирующие группы, порожденные $\langle X_{\pm\alpha} \rangle$, $\langle X_{\pm\beta} \rangle$ (можно считать α – короткий, β длинный). Однако, в случае $C_G(z_x) = T$ или $C_G(z_x) = T \cdot C_\alpha$ имеет место $x\,F\,x^{-1} \subset T$ или $x\,F\,x^{-1} \subset T$ или $x\,F\,x^{-1} \subset T \cdot C_\alpha$. С другой стороны, T и $T \cdot C_\alpha$ содержатся в параболической подгруппе, поэтому получаем противоречие с леммой 16. Пусть $C_G(z_x) = G_\alpha \cdot G_\beta$, тогда $x\,F\,x^{-1} \subset G_\alpha \cdot G_\beta$, то есть существует $y \in G_\alpha \cdot G_\beta$ такой, что $y\,x\,\sigma\,x^{-1}\,y^{-1} \in T$, тогда $y\,x\,\sigma\,x^{-1}\,y^{-1} = \sigma^{\pm 1}$. Положим $\gamma = yx$. Тогда $\gamma\,F\,\gamma^{-1} = \overline{\langle \gamma\sigma\gamma^{-1}, \gamma g \tau g^{-1} \gamma^{-1} \rangle} \subset G_\alpha \cdot G_\beta$. Так как $\gamma\sigma\gamma^{-1} = \sigma^{\pm 1}$ коммутирует с любым элементом из группы C_β (напомним, $\sigma = h_{\alpha_1}(\varepsilon)$ коммутирует с любым элементом из группы $A_2(K)$), то существует элемент $\delta \in C_\beta$ такой, что $\gamma\sigma\gamma^{-1}$, $\gamma g \tau g^{-1} \gamma^{-1} \in G_\alpha \delta T \delta^{-1}$, но последняя группа содержится в параболической, что противоречит лемме 16. Если $C_G(z_x) = A_2(K)$, то существует $y \in A_2(K)$ такой, что $yx\sigma x^{-1} y^{-1} \in T$, то есть $yx\sigma x^{-1} y^{-1} = \sigma^{\pm 1} \in Z(A_2(K))$. Тогда $yxFx^{-1}y^{-1}$ – коммутативная группа, следовательно, она содержится в некотором торе, то есть содержится в параболической группе, что противоречит лемме 16. Таким образом, $z_x = 1$. ■

В [14, теорема 3] показано, что для классов сопряженных элементов C_1, C_2 простой алгебраической группы G выполнено равенство $\overline{C_1 C_2} \cdot = G$, если существуют такие представители $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$, что $F = \overline{\langle c_1, c_2 \rangle}$ – редуктивная группа, у которой $Z(F) = Z(G)$. Таким образом, мы получаем равенство $\overline{C_\alpha C_\varepsilon} = G$ из лемм 17, 18.

Лемма 19. *Пусть $m_1 = M_{yy}$ или M_{-yy}, $m_2 \neq 1$. Тогда $m_1 \cdot m_2 = 0$.*

Доказательство Так как множество M_{-yy} содержит регулярный полупростой элемент, то расенство $m_1 \cdot m_2 = 0$ в случае $m_1 = M_{-yy}$ следует из леммы 2. Пусть $m_1 = M_{yy}$. Тогда $C_{\beta\beta} \subset M_{yy}$ для $\beta \in K^*$, $\beta \neq \pm 1$, $\sqrt[3]{1}$. Требуемое равенство следует теперь из лемм 3, 4, 5. ■

Литература

1. А. Борель, *Линейные алгебраические группы.* Мир, М. (1972).
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, Мир, М. (1972).
3. Х. Крафт, *Геометрические методы теории инвариантов.* Мир, М. (1987).
4. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
5. Т. А. Спрингер, Р. Штейнберг, *Классы сопряженных элементов.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам. Мир, М. (1973).
6. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, М. (1980).
7. Z. Arad, E. Fisman, M. Muzychuk, *Order evaluation of products of subsets in finite groups and its applications. I.* — Algebra **182**, No. 3 (1996), 577–603.
8. Z. Arad, M. Herzog Eds., *Products of Conjugacy Classes in Groups.* Lectute Notes Math., **1112**, Springer-Verlag, New York (1985).
9. Z. Arad, M. Herzog, J. Stavi, *Powers and products of conjugacy classes,*. [in: 8, Chapter 1].
10. E. W. Ellers, N. L. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in classical Chevalley groups.* — Comm. Algebra **22**, No. 14 (1994), 5935–5950.
11. E. W. Ellers, N. L. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in classical Chevalley groups II: exceptional classes.* — Comm. Algebra **23**, No. 8 (1995), 3085–3098.
12. E. W. Ellers, N. L. Gordeev, *Gauss decomposition with prescribed semisimple part in classical Chevalley groups III: twisted groups.* — Comm. Algebra **24**, No. 14 (1996), 4447–4475.
13. N. L. Gordeev, *Products of conjugacy classes in algebraic groups I.* — J. Algebra **173** (1995), 715–744.
14. N. L. Gordeev, *Products of conjugacy classes in algebraic groups II.* — J. Algebra **173** (1995), 745–779.
15. A. Lev, *The covering number of the group $PSL_n(F)$.* — J. Algebra **182, No. 1** (1996), 60–84.

Kornienko M. N. The monoid of semisimple multiclasses of the group $G = G_2(K)$.

Let G be a group, and let $C_L, \dots, C_K$ be a sequence of conjugacy classes of G. The product $C_1C_2 \dots C_K = \{c_1c_2 \dots c_k \mid c_i \in C_i\}$ is called a multiclass of G. Further, let G be a simple algebraic group, and let $M_{cs}(G)$ be the set of closures (with respect to Zariski topology) of all multiclasses of G which are generated by semisimple conjugacy classes of G. Then $M_{cs}(G)$ is a monoid with respect to the operation: $m_1 \cdot m_2 = \overline{m_1 m_2}$, where $\overline{m}$ is the closure of m. In this paper we give a description of $M_{cs}(G)$ in the case $G = G_2(K)$, where K is an algebraically closed field of the characteristic zero.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена

Поступило 28 декабря 1999 г.