Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

Н. В. Косматов

ОЦЕНКИ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ РАССЛОЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОЛЕЦ

Под кольцом мы будем понимать ассоциативное кольцо с единицей, сохраняемой при кольцевых гомоморфизмах. Модули над кольцами, если не оговорено противное, будут считаться левыми. Для кольца Λ мы будем обозначать его левую глобальную и левую слабую размерности через $\operatorname{lgld}\Lambda$ и $\operatorname{lwd}\Lambda$ соответственно. Для Λ-модуля X и правого Λ-модуля Y через $\mathrm{id}_\Lambda X$, $\mathrm{pd}_\Lambda X$, $\mathrm{fd}_\Lambda X$ и $\mathrm{rfd}_\Lambda Y$ будут обозначаться соответственно инъективная, проективная, плоская размерности X и плоская размерность Y.

Пусть дан коммутативный квадрат колец и гомоморфизмов колец

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & R_1 \arrow[d, "j_1"] \\ R_2 \arrow[r, "j_2"] & R', \end{tikzcd}$$

и пусть R – расслоенное произведение колец R_1 и R_2 над R', т.е. для любых элементов $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, удовлетворяющих условию $j_1(r_1) = j_2(r_2)$, существует единственный элемент $r \in R$, для которого $i_1(r) = r_1$ и $i_2(r) = r_2$. Предположим дополнительно, что отображение i_1 сюръективно, и зафиксируем эти обозначения.

В основе доказательства всех обсуждаемых ниже оценок гомологических размерностей кольца R лежит следующая важная теорема.

Теорема 1. (i) *R-модуль M инъективен, если и только если R_1-модуль $\operatorname{Hom}_R(R_1, M)$ и R_2-модуль $\operatorname{Hom}_R(R_2, M)$ инъективны.*

(ii) *R-модуль M проективен, если и только если R_1-модуль $R_1 \otimes_R M$ и R_2-модуль $R_2 \otimes_R M$ проективны.*

(iii) *R-модуль M плоский, если и только если R_1-модуль $R_1 \otimes_R M$ и R_2-модуль $R_2 \otimes_R M$ плоские.*

Доказательство утверждений именно этой теоремы всякий раз давало толчок к изучению свойств категории R-модулей, вызывающей интерес алгебраистов начиная с 70-х годов. В 1971 г. в [2, теоремы 2.1, 2.2, 2.3] Дж. Милнор впервые доказал утверждение теоремы 1 для проективных модулей при условии сюръективности отображения j_2. В 1985 г. в статье [3] было показано, что это условие может быть отброшено, а также появилась следующая оценка левой глобальной размерности кольца R:

$$\operatorname{lgld} R \leqslant \max_{k=1,2} \{\operatorname{lgld} R_k\} + \max_{k=1,2} \{\operatorname{rfd}_R R_k\}.$$

В этой же работе [3] объяснялась невозможность оценить $\operatorname{lgld} R$, зная лишь $\operatorname{lgld} R_k$, так как существует пример колец конечной глобальной размерности, расслоенное произведение которых имеет бесконечную глобальную размерность. Все три утверждения теоремы 1 были получены в [4, теорема 2] в 1985 г. в предположении сюръективности отображения j_2. Как мы увидим далее, без этого предположения можно обойтись.

В 1988 г. в [5, теорема 2] была найдена следующая оценка левой глобальной размерности кольца R: если j_2 – сюръекция, то

$$\operatorname{lgld} R \leqslant \max_{k=1,2} \{\operatorname{lgld} R_k + \operatorname{rfd}_R R_k\}. \tag{1}$$

В 1992 г. в [6, теоремы 1, 2] для случая коммутативных колец были получены оценки $\operatorname{lwd} R$ и более точные оценки $\operatorname{lgld} R$, а также показано, что в определенном смысле они являются самыми точными.

В 1997 г. в [7, теорема 3.1] было доказано, что если j_2 – сюръекция, то

$$\operatorname{lgld} R \leqslant \max_{k=1,2} \{\operatorname{lgld} R_k + \operatorname{pd}_R R_k\}. \tag{2}$$

Эта оценка является “односторонней” (при ее вычислении все модули над всеми кольцами рассматриваются с одной стороны, слева), в то время, как все предыдущие оценки являлись “двусторонними”. Сравнение оценок (1) и (2) в [7, пример 3.4] демонстрирует, что “односторонние” оценки $\operatorname{lgld} R$ могут оказаться точнее “двусторонних”.

В этой статье мы доказываем новую “одностороннюю” оценку $\operatorname{lgld} R$ (теорема 5), а также обобщаем оценку $\operatorname{lwd} R$ из [6, теорема 2] на некоммутативный случай (теорема 9). Для этого мы оцениваем инъективную и плоскую размерности R-модуля (предложения 4, 8). Из этих результатов немедленно выводятся неравенство (2) и аналогичная оценка $\mathrm{lwd}\, R$ (следствия 6, 10). При этом нигде не предполагается сюръективность отображения j_2.

Мы начинаем с того, что избавляемся от условия сюръективности j_2 в [4, теорема 2].

Доказательство теоремы 1. Положим $R'' = j_2(R_2)$. Так как отображение i_1 сюръективно, $j_1(R_1) \subset j_2(R_2) = R''$. Следовательно, мы имеем еще один коммутативный квадрат колец и гомоморфизмов колец

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & R_1 \arrow[d, "j_1"] \\ R_2 \arrow[r, "j_2"] & R'' \end{tikzcd}$$

с сюръективным отображением $j_2 : R_2 \to R''$. Поскольку кольцо R является также расслоенным произведением колец R_1 и R_2 над R'', наше утверждение следует из [4, теорема 2].

Сформулируем используемое ниже следствие из [1, предл. VI. 2.1a].

Лемма 2. *Пусть Λ – кольцо, $n \geqslant 1$, $0 \to M \to I \to K \to 0$ – короткая точная последовательность Λ-модулей с инъективным модулем I, и пусть $\mathrm{id}_\Lambda M \leqslant n$. Тогда $\mathrm{id}_\Lambda K \leqslant n-1$.*

Предложение 3. *Пусть $n \geqslant 1$, $k \in \{1,2\}$,*

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \dots$$

– инъективная резольвента R-модуля M с t-ой сизигией $K_t = \mathrm{im}\,(f_{t+1})$. Предположим, что при всех $l = 0, 1, \dots, n$

$$\mathrm{id}_{R_k} \ (\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant n - l.$$

Тогда для любого $t = 0, 1, \dots, n-1$ $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Hom}\,_R(R_k, K_t)) \leqslant n - t - 1$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по t.

База индукции: $t = 0$. Так как $0 \to M \to I_0 \xrightarrow{f_1} K_0 \to 0$ – короткая точная последовательность в категории левых R-модулей $R-\mathrm{Mod}$ и I_0 инъективен, из длинной точной гомологической Ext-последовательности точна в $R_k - \mathrm{Mod}$ последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}\,_R(R_k, M) & \to & \mathrm{Hom}\,_R(R_k, I_0) & \xrightarrow{f_{1*}} & \\ & \xrightarrow{f_{1*}} & \mathrm{Hom}\,_R(R_k, K_0) & \to & \mathrm{Ext}^1_R(R_k, M) & \to & 0 \end{array}$$

и существуют изоморфизмы R_k-модулей

$$\mathrm{Ext}^l_R(R_k, K_0) \simeq \mathrm{Ext}^{l+1}_R(R_k, M), \quad l \geqslant 1. \tag{3}$$

Обозначим $A_{k,0} = \mathrm{im}\, f_{1*}$. Тогда короткими точными в $R_k - \mathrm{Mod}$ являются последовательности:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R_k, M) \to \mathrm{Hom}_R(R_k, I_0) \xrightarrow{f_{1*}} A_{k,0} \to 0, \tag{4}$$

$$0 \to A_{k,0} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(R_k, K_0) \to \mathrm{Ext}^1_R(R_k, M) \to 0. \tag{5}$$

По теореме 1 R_k-модуль $\mathrm{Hom}_R(R_k, I_0)$ инъективен. Следовательно, так как по условию $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Hom}_R(R_k, M)) \leqslant n$, из (4) и леммы 2 имеем $\mathrm{id}_{R_k}(A_{k,0}) \leqslant n-1$. Поскольку по условию $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^1_R(R_k, M)) \leqslant n-1$, из (5) получаем $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Hom}_R(R_k, K_0)) \leqslant n-1$.

Индукционный переход. Пусть $1 \leqslant t \leqslant n-1$ и для всех индексов $t' = 0, 1, \ldots, t-1$ требуемое утверждение доказано.

Так как

$$0 \to K_{t-1} \hookrightarrow I_t \xrightarrow{f_{t+1}} K_t \to 0$$

– короткая точная последовательность в $R - \mathrm{Mod}$, а I_t – инъективный R-модуль, из длинной точной гомологической Ext-последовательности получаем, что точна в $R_k - \mathrm{Mod}$ последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathrm{Hom}_R(R_k, K_{t-1}) & \to & \mathrm{Hom}_R(R_k, I_t) & \xrightarrow{(f_{t+1})_*} & \\ & \xrightarrow{(f_{t+1})_*} & \mathrm{Hom}_R(R_k, K_t) & \to & \mathrm{Ext}^1_R(R_k, K_{t-1}) & \to & 0 \end{array}$$

и существуют изоморфизмы R_k-модулей

$$\mathrm{Ext}^l_R(R_k, K_t) \simeq \mathrm{Ext}^{l+1}_R(R_k, K_{t-1}), \quad l \geqslant 1. \tag{6}$$

Обозначим $A_{k,t} = \mathrm{im}\,(f_{t+1})_*$. Тогда короткими точными в $R_k - \mathrm{Mod}$ являются последовательности:

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R_k, K_{t-1}) \to \mathrm{Hom}_R(R_k, I_t) \xrightarrow{(f_{t+1})_*} A_{k,t} \to 0, \tag{7}$$

$$0 \to A_{k,t} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(R_k, K_t) \to \mathrm{Ext}^1_R(R_k, K_{t-1}) \to 0. \tag{8}$$

По индукционному предположению

$$\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Hom}_R(R_k, K_{t-1})) \leqslant n-t,$$

а по теореме 1 R_k-модуль $\mathrm{Hom}_R(R_k, I_t)$ инъективен. Следовательно, из (7) и леммы 2 получаем $\mathrm{id}_{R_k}(A_{k,t}) \leqslant n-t-1$. Объединяя (3) и (6), имеем

$$\mathrm{Ext}^1_R(R_k, K_{t-1}) \simeq \ldots \simeq \mathrm{Ext}^t_R(R_k, K_0) \simeq \mathrm{Ext}^{t+1}_R(R_k, M).$$

Поэтому

$$\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^1_R(R_k, K_{t-1})) = \mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^{t+1}_R(R_k, M)) \leqslant n - t - 1.$$

Теперь из (8) легко следует $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Hom}_R(R_k, K_t)) \leqslant n - t - 1$, что завершает доказательство индукционного перехода.

Предложение 4. *Пусть $n \geqslant 0$, M – R-модуль, и пусть при всех $k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$ $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant n - l$. Тогда $\mathrm{id}_R M \leqslant n$.*

Доказательство. При $n = 0$ утверждение следует из теоремы 1. В случае $n \geqslant 1$ рассмотрим инъективную резольвенту R-модуля M:

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} I_2 \to \ldots,$$

и обозначим $K_t = \mathrm{im}(f_{t+1})$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда по предложению 3 R_k-модуль $\mathrm{Hom}_R(R_k, K_{n-1})$ инъективен ($k = 1, 2$), следовательно, из теоремы 1, K_{n-1} – инъективный R-модуль. Поэтому по [1, предл. VI. 2.1a] $\mathrm{id}_R M \leqslant n$.

Из предложения 4 вытекает следующая оценка глобальной размерности расслоенного произведения колец.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 0$ и для любого R-модуля M выполнено $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant n - l$ при всех $k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $\mathrm{lgld}\, R \leqslant n$.*

Следствие 6.

$$\mathrm{lgld}\, R \leqslant \max_{k=1,2} \bigl\{\mathrm{lgld}\, R_k + \mathrm{pd}_R R_k\bigr\}.$$

Доказательство. Для $k = 1, 2$ обозначим

$$n_k = \mathrm{lgld}\, R_k, \quad m_k = \mathrm{pd}_R R_k, \quad N_k = n_k + m_k, \quad N = \max\{N_1, N_2\}.$$

Можно считать, что $m_k, n_k < \infty$. Пусть M – R-модуль и $k \in \{1, 2\}$. Так как $\mathrm{pd}_R R_k = m_k$, то для любого $l \geqslant m_k + 1$ имеем равенство $\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M) = 0$. Поскольку $\mathrm{lgld}\, R_k = n_k$, при любом $l = 0, 1, \ldots, m_k$ справедлива цепочка неравенств

$$\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant n_k = N_k - m_k \leqslant N_k - l \leqslant N - l.$$

Таким образом, неравенство $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant N - l$ выполняется при всех $l = 0, 1, \ldots, N$. Следовательно, по предложению 4 $\mathrm{lgld}\, R \leqslant N$.

Сформулируем аналогичные результаты для плоской размерности и вытекающие из них оценки слабой размерности кольца R.

Предложение 7. *Пусть $n \geqslant 1$,*

$$k \in \{1, 2\}, \ldots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

– плоская резольвента R-модуля M с t-ой сизигией $K_t = \ker f_t$. Предположим, что при всех $l = 0, 1, \ldots, n$ $\mathrm{fd}_{R_k}(\mathrm{Tor}^R_l(R_k, M)) \leqslant n - l$. Тогда для любого $t = 0, 1, \ldots, n-1$ $\mathrm{fd}_{R_k}(R_k \otimes_R K_t) \leqslant n - t - 1$.

Предложение 8. *Пусть $n \geqslant 0$, M – R-модуль, и пусть при всех $k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$ $\mathrm{fd}_{R_k}(\mathrm{Tor}^R_l(R_k, M)) \leqslant n - l$. Тогда $\mathrm{fd}_R M \leqslant n$.*

Теорема 9. *Пусть $n \geqslant 0$ и для любого конечно порожденного левого идеала J кольца R выполнено $\mathrm{fd}_{R_k}(\mathrm{Tor}^R_l(R_k, R/J)) \leqslant n - l$ при всех $k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $\mathrm{lwd}\, R \leqslant n$.*

Следствие 10.

$$\mathrm{lwd}\, R \leqslant \max_{k=1,2} \{\mathrm{lwd}\, R_k + \mathrm{rfd}_R R_k\}.$$

Следуя логике доказательства предложения 4, читатель без труда докажет предложение 7, а с его помощью и предложение 8, если рассмотрит плоскую резольвенту R-модуля M и применит к ней функтор Tor вместо функтора Ext. Теорема 9 выводится из предложения 8 с использованием теоремы Ауслендера:

$$\mathrm{lwd}\, R = \sup\big\{\mathrm{fd}_R(R/J) \mid J \text{ – конечно порожденный левый идеал } R\big\}.$$

Более подробное изложение можно найти в [8], где доказываются подобные утверждения для проективной размерности R-модуля и глобальной размерности кольца R.

В заключение автор благодарит профессора А. И. Генералова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра.* ИЛ, М. (1960).
2. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* Мир, М (1974).
3. A. N. Wiseman, *Projective modules over pullback rings.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **97** (1985), 399–406.
4. A. Facchini, P. Vámos, *Injective modules over pullbacks.* — J. London Math. Soc. **31** (1985), 425–438.
5. E. Kirkman, J. Kuzmanovich, *On the global dimension of fibre products.* — Pacific J. Math. **134** (1988), 121–132.
6. S. Scrivanti, *Homological dimension of pullbacks.* — Math. Scand. **71** (1992), 5–15.
7. K. M. Cowley, *One-sided bounds and the vanishing of* Ext. — J. Algebra **190** (1997), 361–371.
8. Н. В. Косматов, *Оценка глобальной размерности расслоенного произведения колец.* Фунд. и прикл. мат-ка, 1999 (в печати).

Kosmatov N. V. Upper bounds on homological dimensions of pullback rings.

New upper bound on the global dimension of a pullback ring is given and Scrivanti's upper bound on the weak dimension of a pullback ring is generalized to noncommutative case.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: koko@nk1442.spb.edu

Поступило 1 ноября 1999 г.