Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

М. И. Кюршина, А. В. Яковлев

T-ФОРМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Настоящая работа примыкает к [2] и является ее продолжением. Напомним некоторые обозначения и факты из [2]. Все встречающиеся с этой работе категории аддитивны. Это значит, что для любых объектов A, B множество $\mathrm{Hom}(A,B)$ морфизмов из объекта A в объект B – аддитивно записанная абелева группа, причем это сложение связано с композицией морфизмов левым и правым соотношениями дистрибутивности, и что существуют конечные прямые суммы объектов.

Билинейной формой на объекте A аддитивной категории с инволюцией $\mathfrak{M}$ мы называем любой морфизм $\Phi : A \to A^*$. Дуальный к нему морфизм Φ^* тоже является морфизмом из A в A^*, т.е. билинейной формой на A.

Мы называем форму Φ квазисимметричной, если существуют такие эндоморфизмы ε, δ объекта A, перестановочные со всеми идемпотентными эндоморфизмами A, что $\Phi^* = \Phi\varepsilon$, $\Phi = \Phi^*\delta$.

Напомним один из основных результатов работы [2].

Структурная теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – аддитивная категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов любого неразложимого объекта локально. Далее, пусть Φ – квазисимметричная билинейная форма на объекте A категории $\mathfrak{M}$. Тогда A раскладывается в прямую сумму попарно ортогональных относительно Φ изотропного подобъекта D и нескольких полных подобъектов, каждый из которых либо неразложим, либо раскладывается в прямую сумму двух дуальных друг другу неразложимых изотропных объектов. Если форма Φ невырождена, то изотропное слагаемое D отсутствует.*

В столь общей ситуации слагаемые, которые раскладываются в прямую сумму двух дуальных друг другу неразложимых

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 98-01-00825 и грант 96-15-96200.

изотропных объектов, не обязательно раскладываются в прямую сумму вполне изотропных объектов. Цель данной работы – указать достаточное условие для того, чтобы это было возможно. В простейшем случае эрмитовых форм над телами такое условие рассматривалось в [1]; введенное нами условие является его обобщением. В частности, наше условие автоматически выполняется, если в кольце эндоморфизмов любого объекта категории возможно и однозначно деление на 2.

Определение 1. *Пусть Φ – квазисимметричная форма на объекте A категории $\mathfrak{M}$, и пусть ε, δ – такие эндоморфизмы объекта A, перестановочные со всеми идемпотентными эндоморфизмами, что $\Phi^{*} = \Phi\varepsilon$, $\Phi = \Phi^{*}\delta$. Форма Φ называется T-формой, если существует такой морфизм $\Psi : A \to A^{*}$, что $\Phi = \Psi + \Psi^{*}\delta$.*

Предложение. *Если в категории $\mathfrak{M}$ любой морфизм однозначно делим на 2 (т.е. если для любого морфизма $\alpha : A \to B$ существует единственный морфизм $\beta : A \to B$, такой что $\beta + \beta = \alpha$), то любая квазисимметричная форма на любом объекте категории $\mathfrak{M}$ является T-формой.*

Доказательство Пусть $\Phi : A \to A^{*}$ – квазисимметричная форма на объекте A категории $\mathfrak{M}$, и пусть δ – такой эндоморфизм объекта A, что $\Phi = \Phi^{*}\delta$. Существует единственный морфизм $\Psi : A \to A^{*}$, такой что $\Psi + \Psi = \Phi$; ясно, что $\Psi = \Psi^{*}\delta$, и форма $\Phi = \Psi + \Psi = \Psi + \Psi^{*}\delta$ является T-формой.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – аддитивная категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов любого неразложимого объекта локально. Пусть, далее, Φ – невырожденная квазисимметричная билинейная T-форма на объекте A категории $\mathfrak{M}$, а B – вполне изотропное относительно Φ прямое слагаемое объекта A. Тогда существуют вполне изотропное относительно Φ прямое слагаемое C объекта A и полное относительно Φ прямое слагаемое D объекта A, такие что $A = D \perp (B \oplus C)$.*

Доказательство Пусть $\Psi : A \to A^{*}$, $\varepsilon, \delta : A \to A$ – такие морфизмы, что $\Phi = \Psi + \Psi^{*}\delta$, $\Phi^{*} = \Phi\varepsilon$, $\Phi = \Phi^{*}\delta$, причем ε, δ перестановочны со всеми идемпотентными эндоморфизмами объекта A. Поскольку форма Φ невырождена, т.е. морфизмы Φ, Φ^{*} обратимы, морфизмы ε, δ являются взаимно обратными изоморфизмами.

Докажем сначала утверждение теоремы для случая, когда вполне изотропный подобъект B неразложим. Пусть $i : B \to A$ – каноническое вложение подобъекта B в A, так что $B = (B, i)$. Из доказательства структурной теоремы (см. [2]) следует, что существуют такой полный подобъект D объекта A, ортогональное дополнение которого раскладывается в прямую сумму подобъекта B и еще одного неразложимого подобъекта $C_1 = (B^*, j_1)$. Обозначим через $q_1 : A \to B^*$ каноническую проекцию на последнее слагаемое $C_1 = (B^*, j_1)$ прямого разложения $A = D\perp(B \oplus C_1)$. Заметим, что $B \oplus C_1$ – полный подобъект A, и что $i^*\Phi i = 0$, поскольку (B, i) – вполне изотропное прямое слагаемое A. Прямая сумма $B \oplus C_1$ – полный относительно формы подобъект A; поэтому ограничение формы Φ на эту прямую сумму, представляющее собой морфизм из $B \oplus C_1$ в $B^* \oplus C_1^*$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} i^*\Phi i & i^*\Phi j_1 \\ j_1^*\Phi i & j_1^*\Phi j_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i^*\Phi j_1 \\ j_1^*\Phi i & j_1^*\Phi j_1 \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом. Следовательно, изоморфизмами являются оба недиагональных морфизма $\alpha = i^*\Phi j_1$, $\beta = j_1^*\Phi i$.

Морфизмы ε, δ перестановочны со всеми идемпотентными эндоморфизмами объекта A, в частности, с $j_1 q_1$. Отметим также еще одно соотношение:

$$\beta^* = i^*\Phi^* j_1 = i^*\Phi\varepsilon j_1 q_1 j_1 = i^*\Phi j_1 q_1 \varepsilon j_1 = \alpha q_1 \varepsilon j_1.$$

Эндоморфизм $q_1\varepsilon j_1$ обратим (обратный к нему равен $q_1\delta j_1$), и потому $(\beta^*)^{-1} = q_1\delta j_1\alpha^{-1}$.

Положим $\xi = -\beta^{-1}j_1^*\Psi j_1 : B^* \to B$ и определим новое вложение $j : B^* \to A$ по формуле $j = j_1 + i\xi$. Стандартные рассуждения показывают, что $(B, i)\oplus(B^*, j_1) = (B, i)\oplus(B^*, j)$, так что для доказательства теоремы в этом случае остается лишь проверить, что (B^*, j) – вполне изотропное прямое слагаемое A, т.е. что $j^*\Phi j = 0$. Но это действительно так:

$$\begin{gathered} j^*\Phi j = (j_1 + i\xi)^*\Phi(j_1 + i\xi) = j_1^*\Phi j_1 + j_1^*\Phi i\xi + \xi^* i^*\Phi j_1 + \xi^* i^*\Phi i\xi = \\ j_1^*\Phi j_1 - j_1^*\Phi i\beta^{-1} j_1^*\Psi j_1 - j_1^*\Psi^* j_1(\beta^*)^{-1} i^*\Phi j_1 = \\ j_1^*\Phi j_1 - j_1^*\Psi j_1 - j_1^*\Psi^* j_1 q_1\delta j_1\alpha^{-1} i^*\Phi j_1 = \\ j_1^*\Phi j_1 - j_1^*\Psi j_1 - j_1^*\Psi^*\delta j_1 q_1 j_1 = j_1^*\Phi j_1 - j_1^*(\Psi + \Psi^*\delta) j_1 = 0. \end{gathered}$$

Итак, в случае, когда объект B неразложим, утверждение теоремы доказано. Общий случай получается тривиальной индукцией по числу слагаемых в разложении объекта B в прямую сумму неразложимых объектов.

Следующее утверждение выполняется не только для T-форм, но для любых квазисимметричных форм.

Теорема 2. *Пусть Φ – квазисимметричная форма на объекте A категории $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1. Пусть, далее, $B_1 = (B_1, i_1)$, $B_2 = (B_2, i_2)$, $C_1 = (C_1, j_1)$, $C_2 = (C_2, j_2)$ – вполне изотропные прямые слагаемые A, причем прямые суммы $B_1 \oplus C_1$, $B_2 \oplus C_2$ – полные относительно Φ прямые слагаемые A. Если B_1 и B_2 – изоморфные объекты категории $\mathfrak{M}$, то существует метрический изоморфизм гиперболических объектов $\gamma : (B_1 \oplus C_1) \to (B_2 \oplus C_2)$ с формами, индуцированными на них формой Φ.*

Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Пусть B и C – изоморфные прямые слагаемые объекта A категории $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1. Тогда существует такой подобъект D объекта A, что $A = B \oplus D = C \oplus D$.*

Доказательство Пусть объект A является прямой суммой n неразложимых слагаемых, а объекты B и C – прямыми суммами $m \leqslant n$ слагаемых. Индукцией по s докажем, что для каждого $s \leqslant k = n - m$ существуют подобъект X^s и неразложимые подобъекты $Y_1, \dots, Y_{k-s}$, $Z_1, \dots, Z_{k-s}$ объекта A, такие что

$$A = X^s \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_{k-s} \oplus B = X^s \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_{k-s} \oplus C.$$

Утверждение тривиально при $s = 0$, а при $s = k = n - m$ мы получаем подобъект $D = X^{n-m}$, удовлетворяющий требованиям леммы.

Пусть $s < n - m$ и уже построены нужные подобъекты X^s, $Y_1, \dots, Y_{k-s}$, $Z_1, \dots, Z_{k-s}$. Разложим объекты B и C в прямые суммы неразложимых объектов:

$$B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m, \quad C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_m.$$

Мы имеем следующие прямые разложения:

$$A = X^s \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_{k-s} \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_m,$$
$$A = X^s \oplus Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_{k-s} \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_m.$$

Обозначим через i, $i_1, \dots, i_{k-s}$, $j_1, \dots, j_m$ вложения прямых слагаемых, отвечающие первому разложению, а через q_1 проекцию на прямое слагаемое Z_1, отвечающую второму разложению. По теореме Крулля–Шмидта, которая выполняется в нашей категории, среди неразложимых слагаемых $Y_1, \ldots, Y_{k-s}$ найдется слагаемое, изоморфное Z_1; меняя, если надо, нумерацию, будем считать, что объект Y_1 изоморфен объекту Z_1. Определим теперь новое вложение $i_1' : Y_1 \to A$. Среди морфизмов $q_1 i_1, \ldots, q_1 i_{k-s}$, $q_1 j_1, \ldots, q_1 j_m$ хотя бы один является изоморфизмом. Если $q_1 i_1$ – изоморфизм, то положим $i_1' = i_1$; если же $q_1 i_1$ – не изоморфизм, но $q_1 i_u$ – изоморфизм для некоторого $u > 1$, то объект Y_u изоморфен Y_1 и Z_1, и мы положим $i_1' = i_1 + i_u \beta$, где β – любой изоморфизм Y_1 на Y_u. Аналогично, если все $q_1 i_u$ $(1 \leqslant u \leqslant k)$ – не изоморфизмы, но $q_1 j_v$ – изоморфизм для некоторого v, то объект B_v изоморфен Y_1 и Z_1, и мы положим $i_1' = i_1 + j_v \gamma$, где γ – любой изоморфизм Y_1 на B_v. Во всех случаях прямое слагаемое $Y_1 = (Y_1, i_1)$ в первом разложении можно заменить на слагаемое $Y_1' = (Y_1, i_1')$, и при этом окажется, что $q_1 i_1'$ – изоморфизм. Как видно из доказательства теоремы Крулля–Шмидта в форме теоремы о замене, мы можем во втором разложении заменить прямое слагаемое Z_1 на Y_1'. Таким образом, мы имеем следующие прямые разложения:

$$
\begin{aligned}
A &= (X^s \oplus Y_1') \oplus Y_2 \cdots \oplus Y_{k-s} \oplus B_1 \oplus \cdots \oplus B_m = \\
&= X^{s+1} \oplus Y_2 \cdots \oplus Y_{k-s} \oplus B, \\
A &= (X^s \oplus Y_1') \oplus Z_2 \cdots \oplus Z_{k-s} \oplus C_1 \oplus \cdots \oplus C_m = \\
&= X^{s+1} \oplus Z_2 \cdots \oplus Z_{k-s} \oplus C,
\end{aligned}
$$

где через X^{s+1} обозначен объект $X^s \oplus Y_1'$. Лемма доказана.

Перед тем, как формулировать следующую лемму, дадим еще одно определение.

Определение 2. *Пусть $B = (B, i)$ и $C = (C, j)$ – два подобъекта объекта A. Мы говорим, что автоморфизм α объекта A переводит подобъект B в подобъект C, если существует такой изоморфизм $\beta : B \to C$, что $\alpha i = j\beta$.*

Лемма 2. *Пусть $B = (B, i)$ и $C = (C, j)$ – изоморфные прямые слагаемые объекта A категории $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1. Тогда существует автоморфизм α объекта A, переводящий подобъект B в подобъект C и представимый в виде суммы идемпотентных эндоморфизмов объекта A.*

Доказательство Согласно лемме 1, существует подобъект D

объекта A и прямые разложения $A = (B, i) \oplus D = (C, j) \oplus D$. Пусть $p : A \to B$ – каноническая проекция на первое слагаемое первого разложения, а β' – произвольный изоморфизм B на C. Тогда pj – изоморфизм C на B, а $\xi = pj\beta'$ – автоморфизм B.

Положим $\beta = \beta'\xi^{-1}$, $\alpha = j\beta p + (\mathbf{1}_A - ip)$. Отметим, что $pj\beta = pj\beta'\xi^{-1} = \mathbf{1}_B$. Оба слагаемых эндоморфизма α объекта A идемпотентны; для второго слагаемого $\mathbf{1}_A - ip$ это очевидно, а для первого легко проверяется:

$$(j\beta p)(j\beta p) = j\beta(pj\beta)p = j\beta p.$$

Покажем, что α – автоморфизм объекта A. Действительно, легко проверяется, что морфизм $\mathbf{1}_A - j\beta p + 2ip$ является обратным к α:

$$(\mathbf{1}_A - j\beta p + 2ip)(j\beta p + (\mathbf{1}_A - ip)) = j\beta p + (\mathbf{1}_A - ip) - j\beta p -$$
$$j\beta p(\mathbf{1}_A - ip) + 2ip(j\beta p) - ip = \mathbf{1}_A.$$

Наконец, $\alpha i = (j\beta p + (\mathbf{1}_A - ip))i = j\beta$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 Поскольку форма Φ квазисимметричная, существует такой эндоморфизм δ объекта A, перестановочный со всеми идемпотентными эндоморфизммми, что $\Phi = \Phi^*\delta$. Согласно лемме 2, существуют изоморфизмы $\beta : B_1 \to B_2$, $\alpha : A \to A$, такие что $\alpha i_1 = i_2\beta$, причем автоморфизм α является суммой идемпотентных эндоморфизмов объекта A. Из последнего свойства следует, что эндоморфизм δ перестановочен с α.

Форма Φ индуцирует на подобъектах $B_1 \oplus C_1$, $B_2 \oplus C_2$ формы с матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & i_1^*\Phi j_1 \\ j_1^*\Phi i_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & i_2^*\Phi j_2 \\ j_2^*\Phi i_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим изоморфизм $\gamma : C_1 \to S_2$, положив

$$\gamma = (\beta^* i_1^*\Phi j_1)^{-1} i_2^*\Phi j_2,$$

и покажем, что $\beta \oplus \gamma : (B_1 \oplus C_1) \to (B_2 \oplus C_2)$ – метрический изоморфизм, т.е. что

$$\begin{pmatrix} \beta^* & 0 \\ 0 & \gamma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i_1^*\Phi j_1 \\ j_1^*\Phi i_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i_2^*\Phi j_2 \\ j_2^*\Phi i_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное равенство равносильно двум равенствам

$$\beta^* i_1^*\Phi j_1\gamma = i_2^*\Phi j_2, \quad \gamma^* j_1^*\Phi i_1\beta = j_2^*\Phi i_2, \tag{$*$}$$

из которых первое непосредственно следует из определения морфизма γ. Беря сопряженное к нему, получаем:

$$j_2^*\Phi^* i_2 = \gamma^* j_1^* \Phi^* i_1 \beta.$$

Обозначим через p_2 каноническую проекцию A на прямое слагаемое $B_2 = (B_2, i_2)$. Пользуясь предыдущим соотношением, равенством $i_1\beta = \alpha i_2$ и тем, что морфизм δ перестановочен с идемпотентным эндоморфизмом $i_2 p_2$ и морфизмом α, доказываем второе из равенств $(*)$:

$$j_2^*\Phi i_2 = j_2^*\Phi^*\delta i_2 p_2 i_2 = j_2^*\Phi^* i_2 p_2 \delta i_2 = \gamma^* j_1^*\Phi^* i_1 \beta p_2 \delta i_2 =$$
$$= \gamma^* j_1^*\Phi^*\alpha i_2 p_2 \delta i_2 = \gamma^* j_1^*\Phi^*\delta\alpha i_2 p_2 i_2 = \gamma^* j_1^*\Phi\alpha i_2 = \gamma^* j_1^*\Phi i_1\beta.$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 пусть (B_1, i_1) и (B_2, i_2) – вполне изотропные относительно T-формы Φ прямые слагаемые объекта A. Если объекты B_1, B_2 категории $\mathfrak{M}$ изоморфны, то существует метрический автоморфизм α объекта A, переводящий подобъект (B_1, i_1) в подобъект (B_2, i_2).*

Доказательство Согласно теореме 1, существуют вполне изотропные подобъекты C_1, C_2 и полные подобъекты D_1, D_2 объекта A, такие что $A = D_1 \perp (B_1 \oplus C_1) = D_2 \perp (B_2 \oplus C_2)$. По теореме 2, существует метрический изоморфизм α гиперболического прямого слагаемого $B_1 \oplus C_1$ на гиперболическое прямое слагаемое $B_2 \oplus C_2$, переводящий подобъект (B_1, i_1) в подобъект (B_2, i_2). По теореме сокращения из [2], ортогональные дополнения D_1, D_2 метрически изоморфных гиперболических прямых слагаемых $B_1 \oplus C_1$ и $B_2 \oplus C_2$ тоже метрически изоморфны; пусть β – какой-то метрический изоморфизм D_1 на D_2. Тогда $\alpha \perp \beta : A = (B_1 \oplus C_1) \perp D_1 \to (B_2 \oplus C_2) \perp D_2 = A$ – метрический автоморфизм объекта A, переводящий подобъект (B_1, i_1) в подобъект (B_2, i_2).

Литература

1. Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп.* М., Мир, 1974.
2. А. В. Яковлев, *Билинейные формы на категориях.* Зап. науч. семин. ПОМИ, **236** (1997), 197–214.

Kyurshina M. I., Yakovlev A. V. T-forms and their properties.

This paper continues the paper "Bilinear forms on categories" by the second of the authors. A class of nondegenerate forms is introduced; in particular, any isomorphism of a totally isotropic direct summand onto another totally isotropic direct summand of an object with a form this class can be extended till a metric automorphism of the object (even if the division by 2 of morpisms is impossible).

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 26 декабря 1999 г.