Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

В. И. Мысовских

СУБНОРМАЛИЗАТОРЫ И СВОЙСТВА ВЛОЖЕНИЯ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

1. Введение и основные результаты

В работе решены три известных проблемы из теории расположения промежуточных подгрупп [1–3] и свойств вложения подгрупп типа пронормальности [16, 18–20, 24], обобщающих ключевые в теории групп понятия нормальных и силовских подгрупп. Рассматриваются конечные группы.

Во-первых, мы значительно усиливаем результаты статьи [9] об условиях слабой нормальности и полинормальности подгруппы конечной сверхразрешимой группы. Оказалось, что для выполнения первого свойства достаточно потребовать от рассматриваемой подгруппы "полинормальность на первом шаге" (субнормализаторное условие). Более точно, последнее требование означает, что для данной подгруппы существует субнормализатор, причем он совпадает с ее нормализатором. Субнормализатор понимается как наибольшая подгруппа основной группы, в которой рассматриваемая подгруппа субнормальна [27, 29]. Известно, что он не всегда существует даже в конечных разрешимых группах, один из первых примеров такого рода для системного нормализатора построен Р. Картером в [18]. Отметим, что в ряде работ субнормализатору приписывается иной смысл (см., например, [21]). Полученные здесь результаты проливают свет на связь между этими двумя подходами в случае слабо нормальной подгруппы. Приведем формулировку этого утверждения.

Теорема 1. *Пусть G – конечная сверхразрешимая группа и $D \leqslant G$. Предположим, что подгруппа D удовлетворяет субнормализаторному условию в G, т.е. для всякой подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant N_G(D)$ имеет место включение $N_G(H) \leqslant N_G(D)$. Тогда подгруппа D слабо нормальна в G в смысле работы* [24].

Обратное утверждение достаточно просто доказывается для любой группы G. Поэтому теорема 1 дает необходимое и достаточное условие слабой нормальности в сверхразрешимой группе. Из нее извлекается легко проверяемое необходимое и достаточное условие полинормальности для подгруппы конечной сверхразрешимой группы. Именно, справедлива

Теорема 2. *Подгруппа D полинормальна в конечной сверхразрешимой группе G тогда и только тогда, когда всякая D-полная подгруппа F слабо нормальна в G.*

Следует отметить, что условие конечности группы G в условии теорем существенно. В качестве контрпримера В. В. Блудов предложил метабелеву группу, представляющую собой стандартное сплетение бесконечной циклической группы со свободной абелевой группой ранга 2 (частное сообщение). В произвольных конечных разрешимых группах субнормализаторное условие не равносильно слабой нормальности. Здесь мы укажем на пример группы 324-го порядка, в которой имеется ненильпотентная подгруппа (изоморфная S_3), удовлетворяющая субнормализаторному условию, но не слабо нормальная. Вычисления в системе компьютерной алгебры GAP [30] с использованием библиотеки `SmallGroups` показали, что это контрпример минимального порядка.

Во-вторых, в настоящей работе построен контрпример к долго стоявшей открытой гипотезе З. И. Боревича об эквивалентности полинормальности и паранормальности в разрешимой группе [1]. Этот же пример утвердительно отвечает на вопрос из [2], являясь первым известным прецедентом расхождения этих свойств в конечной группе. Он показывает также трудности, стоящие на пути решения проблемы о связи полинормальности и слабой нормальности в конечной разрешимой группе. Построению контрпримера предшествовала длительная работа автора и других исследователей по его поиску в отдельных классах групп [6, 8, 14]. Нынешнее продвижение в исследовании связано с применением в теории расположения промежуточных подгрупп нового метода, основанного на использовании меток Бернсайда [17] и двух близких к ним комбинаторных функций на решетке подгрупп [23, 28]. Суть метода – в рассмотрении некоторых характеристик подстановочных представлений основной группы. Другие приложения близких идей можно найти в [22].

В данной работе удалось найти необходимое и достаточное условие для совпадения свойств полинормальности и паранормальности, записываемое в терминах меток Бернсайда и имеющее простой комбинаторный смысл. Подобным образом мы исследовали связь абнормальности [20] и пронормальности [19] с их слабыми аналогами [1, 27]. Найдены необходимые и достаточные условия их совпадения в терминах меток Бернсайда и приводится отрицательный ответ на вопрос из [20, S. 733]. Приведем формулировку этих результатов.

Теорема 3. *Полинормальная подгруппа $D \leqslant G$ паранормальна в G тогда и только тогда, когда для всякой D-полной промежуточной подгруппы K и ее нормализатора $L = N_G(K)$ имеем равенство $\nu_G(K, D) = \nu_G(L, D)$.*

Теорема 4. *Слабо пронормальная подгруппа $D \leqslant G$ пронормальна в G, если и только если для любой D-полной $H \in L(D, G)$ имеем равенство $\nu_G(H, D) = |H : N_H(D)|$.*

Теорема 5. *Слабо абнормальная подгруппа D в G абнормальна в G тогда и только тогда, когда для всякой промежуточной подгруппы H выполнено $\rho_G(H, D) = 1$ (или, эквивалентно, $\nu_G(H, D) = |H : D|$).*

Краткое изложение указанных выше результатов анонсировано автором в [13]. Следующий из основных результатов этой работы касается проблемы о связи свойств полинормальности и пронормальности для нильпотентных подгрупп конечных групп. Известно [5, 27], что для p-подгруппы конечной группы эти свойства эквивалентны. Используя картеровские подгруппы, удалось доказать, что аналогичный факт имеет место для нильпотентных подгрупп конечных разрешимых групп.

Теорема 6. *Пусть G – конечная разрешимая группа. Нильпотентная подгруппа D пронормальна в G тогда и только тогда, когда она полинормальна в G.*

Оказалось, что условие разрешимости основной группы в этой теореме существенно. Именно, удалось найти нильпотентную полинормальную, но не пронормальную подгруппу в простой конечной группе $PSp(4, 4)$. Для построения этого контрпримера снова была использована техника подстановочных представлений и меток Бернсайда, а также основанные на применении теорем 4 и 5 вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Отметим, что общие вопросы о расположении промежуточных подгрупп в абстрактных бесконечных группах исключительно редко допускают сколь-либо содержательные ответы. Как правило, возникают те или иные аномальные явления (см., например, [4]). С другой стороны, для некоторых конкретных подгрупп (например, торов) линейных групп и групп Шевалле удается получить достаточно хорошее описание [2]. Результаты такого же типа получены автором для симметрических и знакопеременных групп некоторых конечных и бесконечных сплетений [8, 11]. Упомянем также приложения вопросов о расположении промежуточных подгрупп для описания симметрических функций k-значной логики и кодов над конечным алфавитом [10].

2. Свойства вложения и вспомогательные факты

Основную группу обозначаем обычно буквой G, сопряжение ее элементами записываем в экспоненциальной форме. В частности, для подгруппы $D \leqslant G$ и $x \in G$ определена сопряженная подгруппа $D^x = x^{-1}Dx$. Угловые скобки обозначают подгруппу, порожденную данным множеством. Для подмножества $S \subset G$ определяем $D^S = \langle D^s : s \in S\rangle$. Легко показать, что для промежуточной подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant G$ подгруппа D^H является нормальным замыканием D в H, т.е. наименьшей нормальной подгруппой в H, содержащей D. На протяжении всей работы нормализатор подгруппы D в G обозначен $N = N_G(D)$. Наряду с решеткой $L(G)$ всех подгрупп группы G рассматривается решетка промежуточных подгрупп $L(D, G) = \{H : D \leqslant H \leqslant G\}$. Напомним определения свойств вложения подгрупп и их слабых аналогов.

Определение 1 ([3]). *Промежуточную подгруппу $F \in L(D, G)$ называем D-полной, если $D^F = F$, т.е. если в F нет собственных нормальных делителей, содержащих D.*

Определение 2 ([3]). *Говорим, что подгруппа D паранормальна в G, если для всякого $x \in G$ подгруппа $\langle D, D^x\rangle$ является D-полной.*

Определение 3 ([19]). *Подгруппа D называется пронормальной в G, если для любого $x \in G$ подгруппы D и D^x сопряжены ужé в $\langle D, D^x\rangle$.*

Определение 4 ([20]). *Подгруппа D называется абнормальной в G, если для всякого $x \in G$ имеем включение $x \in \langle D, D^x\rangle$.*

Определение 5 ([1]). *Подгруппа D называется полинормальной в G, если для всякой промежуточной подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant G$ подгруппа D^H является D-полной подгруппой.*

Определение 6 ([1]). *Подгруппа D называется слабо пронормальной в G, если для любых промежуточных подгрупп K и L, таких что $D \leqslant K \lhd L \leqslant G$, справедливо равенство $L = (L \cap N_G(D))K$.*

Определение 7 ([1]). *Подгруппа D называется слабо абнормальной в G, если всякая промежуточная подгруппа $H : D \leqslant H \leqslant G$ самонормализуема в G.*

Определение 8 ([24]). *Подгруппа D называется слабо нормальной в G, если для всякого $x \in G$ из включения $D^x \leqslant N_G(D)$ вытекает равенство $D^x = D$.*

Определение 9 ([20, S. 727]). *Пусть $B \lhd A \leqslant G$ и $U \leqslant G$. Говорим, что подгруппа U покрывает фактор A/B, если $B(A \cap U) = A$.*

Определение 10 ([27]). *Подгруппа S называется субнормализатором подгруппы D в G, если $D \lhd\lhd S$ и S содержит всякую промежуточную подгруппу, в которой D субнормальна.*

Определение 11. *Говорим, что подгруппа D удовлетворяет субнормализаторному условию в G, если для всякой подгруппы H : $D \leqslant H \leqslant N_G(D)$ имеет место включение $N_G(H) \leqslant N_G(D)$.*

В работе [1] показано, что заменяя в определениях 2–4 подгруппу $\langle D, D^x \rangle$ на бóльшую $D^{\langle x \rangle}$, получим определения, эквивалентные 5–7. Поясним значение понятия полинормальной подгруппы. Если D полинормальна в G, то решетка $L(D,G)$ допускает ясное описание: она является дизъюнктным объединением интервалов от D-полной подгруппы до ее нормализатора. Слабая пронормальность подгруппы D в G означает, что ее нормализатор N покрывает всякий фактор L/K, где $D \leqslant K \lhd L \leqslant G$. Отметим, что достаточно потребовать этого лишь для каждой D-полной подгруппы K и ее нормализатора $L = N_G(K)$. Слабая абнормальность эквивалентна D-полноте всех промежуточных подгрупп $H : D \leqslant H \leqslant G$. Понятно также, что из свойств вложения в определениях 2–4 вытекают их соответствующие слабые аналоги 5–7. Кроме того, абнормальность влечет пронормальность, из пронормальности следует паранормальность, а из последнего свойства вытекает слабая нормальность по Мюллеру. Из полинормальности подгруппы D в G немедленно вытекает субнормализаторное условие для D в G. Наконец отметим, что все упомянутые свойства вложения подгрупп (кроме слабой нормальности и субнормализаторного условия) являются специальными случаями полинормальности.

3. Субнормализаторы и слабая нормальность в сверхразрешимых группах

Напомним, что группа G называется сверхразрешимой, если у нее существует нормальный ряд, все факторы которого цикличны [32]. В частности, в конечной сверхразрешимой группе существует минимальный нормальный делитель, являющийся циклической группой простого порядка. Напомним также, что ядром $\mathrm{Core}_G(D)$ подгруппы D в G называется наибольший нормальный делитель в G, который содержится в D (см. [31]). Это понятие в определенном смысле двойственно нормальному замыканию. Начнем со вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть G – группа, H – нормальный делитель в G и $H \leqslant D \leqslant G$. Подгруппа D слабо нормальна (удовлетворяет субнормализаторному условию) в G тогда и только тогда, когда факторгруппа D/H слабо нормальна (удовлетворяет субнормализаторному условию) в G/H.*

Доказательство леммы легко получается из теоремы о гомоморфизме: решетки $L(H,G)$ и $L(G/H)$ естественно изоморфны (см. [31], p. 40).

Лемма 2. *Пусть D – подгруппа в G и G_1 – промежуточная подгруппа: $D \leqslant G_1 \leqslant G$. Если D слабо нормальна (удовлетворяет субнормализаторному условию) в G, то D будет слабо нормальной (удовлетворять субнормализаторному условию) и в группе G_1.*

Справедливость леммы вытекает из очевидной формулы $N_{G_1}(H) = N_G(H) \cap G_1$.

Лемма 3. *Пусть M – минимальный абелев нормальный делитель в группе G. Если D – собственная подгруппа в G и $G = DM$, то подгруппа D максимальна в G.*

Доказательство леммы 3. Предположим, что найдется подгруппа $H : D \leqslant H < G$. Положим $M_1 = H \cap M$. Возьмем произвольный элемент $x \in G$, тогда $x = uv$, где $u \in D$, $v \in M$. Имеем:

$$M_1^u = H^u \cap M^u = H \cap M = M_1.$$

Из абелевости M заключаем $M_1^v = M_1$. Следовательно, $M_1^x = M_1^{uv} = M_1$. По произвольности выбора $x \in G$ заключаем, что $M_1 \lhd G$. С другой стороны, $1 \leqslant M_1 \leqslant M$, а M есть минимальный нормальный делитель в G. Значит, либо $M_1 = M$, либо $M_1 = 1$. В первом случае имели бы

$$G = DM = DM_1 \leqslant DH = H < G,$$

что противоречиво.
Следовательно, $M_1 = 1$. Возьмем элемент $h \in H < G$, тогда $h = dm$ для $d \in D$, $m \in M$. Теперь $m = d^{-1}h \in H$ и $m \in M$, откуда $m \in H \cap M = M_1 = 1$. Таким образом, $m = 1$ и $h = d \in D$. Мы показали, что $H \leqslant D$. По выбору H имеем и обратное включение, т.е. $H = D$. Это означает, что D является максимальной подгруппой в G. Лемма доказана.

Лемма 4 ([1], c.23). *Пусть $D \leqslant G$. Если подгруппа D полинормальна в G, то всякая D-полная промежуточная подгруппа F также полинормальна в G.*

Основная цель этого раздела – доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть G – конечная сверхразрешимая группа и $D \leqslant G$. Предположим, что подгруппа D удовлетворяет субнормализаторному условию в G, т.е. для всякой подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant N_G(D)$ имеет место включение $N_G(H) \leqslant N_G(D)$. Тогда подгруппа D слабо нормальна в G в смысле работы* [24].

Теорема 2. *Подгруппа D полинормальна в конечной сверхразрешимой группе G тогда и только тогда, когда всякая D-полная подгруппа F слабо нормальна в G.*

Доказательство теоремы 1. Предположим, что теорема неверна. Рассмотрим минимальный контрпример: G – группа наименьшего порядка, в которой имеются не слабо нормальные подгруппы, удовлетворяющие субнормализаторному условию. Пусть D –

подгруппа с такими свойствами, т.е. D удовлетворяет субнормализаторному условию в G, но существует элемент $x \in G : D^x \leqslant N$ и $D^x \neq D$. Во-первых, не умаляя общности считаем, что $G = \langle D, x \rangle$. В противном случае можно было бы уменьшить основную группу ввиду леммы 2.

Во-вторых, можно считать, что $\mathrm{Core}_G(N) = 1$. Действительно, допустим, что в N имеется неединичный нормальный делитель L группы G и рассмотрим подгруппу $H = DL$. Поскольку $D \leqslant H \leqslant N$, то из субнормализаторного условия для D в G следует $N_G(H) \leqslant N$. С другой стороны, из $L \lhd G$ и $L \leqslant N$ вытекает $L \lhd N$. Учитывая нормальность D в N, получаем $H \lhd N$. Следовательно, $N_G(H) = N$. Значит, для H также выполнено субнормализаторное условие в G. Теперь $(DL)^x = D^x L \leqslant N$ ввиду включений $D^x \leqslant N$ и $L \leqslant N$. Если бы $(DL)^x \neq DL$, то $H = DL$ – не слабо нормальна в G, но обладает субнормализаторным условием. В силу леммы 1 это дало бы контрпример H/L в G/L меньшего порядка, что противоречит нашему построению. Следовательно, $H^x = H$, откуда $x \in N_G(H) = N$. Тогда подгруппа D была бы слабо нормальной в G – противоречие. Итак, мы показали, что в минимальном контрпримере $\mathrm{Core}_G(N) = 1$.

Выберем минимальный нормальный делитель M в G. По сверхразрешимости группы G, M является циклической группой простого порядка, $|M| = p$. Поскольку $\mathrm{Core}_G(D) \leqslant \mathrm{Core}_G(N) = 1$, то $D \cap M = 1$. Рассмотрим подгруппу DM, которая оказывается полупрямым произведением D и M. Ввиду того, что в подгруппе M нет нетривиальных подгрупп, M есть минимальный нормальный делитель не только в G, но и в DM. Теперь по лемме 3 заключаем, что D максимальна в DM. Рассмотрим цепочку подгрупп:

$$D < DM \leqslant N_G(DM) \leqslant G.$$

Разберем отдельно три различных случая.

(1) $DM = G$. Тогда подгруппа D максимальна в группе G по лемме 3. Либо она нормальна в G, либо абнормальна в ней. В любом случае имели бы слабую нормальность D в G, что противоречиво.

(2) $DM < G$. $N_G(DM) = G$, т.е. DM есть собственный нормальный делитель в G. Возвращаясь к началу доказательства теоремы, берем $x \in G : D^x \leqslant N$, но $D^x \neq D$. Поскольку $DM \lhd G$, то для этого x имеем: $(DM)^x = D^x M = DM$. Отсюда вытекает

включение $D^x \leqslant DM$. По лемме 3 подгруппа D^x также максимальна в DM, но при этом $D^x \neq D$. Значит, $\langle D, D^x\rangle = DM$. С другой стороны, $D \leqslant N$ и $D^x \leqslant N$, а потому и $\langle D, D^x\rangle \leqslant N$. Таким образом, $D < DM \leqslant N$. Воспользуемся субнормализаторным условием для подгруппы D при $H = DM$. Оно показывает, что $G = N_G(DM) \leqslant N$. Следовательно, $N = G$, т.е. подгруппа D нормальна в G. Стало быть, D – слабо нормальна в G. Противоречие показывает, что и этот случай невозможен.
(3) Основной случай: нормализатор подгруппы DM есть собственная подгруппа в G, т.е. $N_G(DM) < G$. По выбору подгруппы D в G найдется $x \in G$, что $D^x \leqslant N_G(D)$, но $D^x \neq D$. Рассмотрим коммутант $K = G'$ группы G. Согласно теореме 9.1 из [20, S. 716], группа K нильпотентна. Рассмотрим ее нижний центральный ряд:

$$1 = K_n < K_{n-1} < \ldots < K_2 < K_1 = K = G'.$$

Заметим, что из характеристичности K_i в G' вытекает нормальность подгрупп K_i в G. Введем подгруппы $L_i = K_i \cap N$ и выберем натуральное m так, чтобы $L_m \neq 1$, а $L_{m+1} = 1$. Если бы такого числа m не нашлось, то уже подгруппа $L_1 = G' \cap N$ была бы единичной, откуда следовала бы абелевость N. Тогда и сопряженная с ней подгруппа $N^{x^{-1}}$ была бы абелевой, причем из условия $D^x \leqslant N$ следовало бы $D \lhd N^{x^{-1}}$. Вспоминая, что $N = N_G(D)$, имели бы включение $N^{x^{-1}} \leqslant N$. В силу конечности подгруппы N, отсюда вытекало бы $N = N^{x^{-1}}$, т.е. $x \in N$ и $D^x = D$ – противоречие с нашим построением.

Отметим, что $L_m \lhd N$ по 2-й теореме об изоморфизме [31, p.42]. Будем коммутировать L_m с D, т.е. введем подгруппы

$$L_{m,1} = [L_m, D], \ldots, L_{m,s} = [L_{m,s-1}, D]\,.$$

По свойствам взаимного коммутанта все эти подгруппы являются нормальными делителями в D. По конечности основной группы G, цепочка подгрупп

$$L_m = L_{m,0} \geqslant L_{m,1} \geqslant \ldots \geqslant L_{m,s} \geqslant \ldots$$

должна стабилизироваться на каком-то конечном шаге r, причем возможны два случая:
а) $L_{m,r} = 1$;

б) $L_{m,r}$ отлична от единичной подгруппы.

В случае а) положим $U = L_{m,r-1}$, а в ситуации б) введем $U = L_{m,r}$, так что подгруппа U всегда отлична от единичной. Разберем эти случаи отдельно.

1^0. $[U, D] = 1$, причем $1 \neq U \leqslant L_m$.

Имеем включение:

$$[U, [D, x]] \leqslant K_{m+1} \cap N = L_{m+1} = 1.$$

Следовательно,

$$[U, D^x] \leqslant [U, D[D, x]] \leqslant [U, [D, x]] \cdot [U, D]^{[D,x]} = 1.$$

Таким образом, справедливо равенство:

$$[U^{x^{-1}}, D] = [U, D^x]^{x^{-1}} = 1.$$

Отсюда немедленно следует включение $U^{x^{-1}} \leqslant N$. С другой стороны, $U^{x^{-1}} \leqslant K_m$ вследствие нормальности K_m в G. Стало быть, имеем включение $U^{x^{-1}} \leqslant L_m$. Это означает, что для подгруппы $U^{x^{-1}}$ выполнены оба условия п. 1^0. Аналогичным рассуждением последовательно покажем, что для подгрупп

$$V = U^{x^{-2}}, U^{x^{-3}} \dots, U, U^{x^{-1}}$$

также выполнены эти условия. Следовательно, и порожденная ими подгруппа $W = U^{\langle x \rangle}$ удовлетворяет условиям: $[W, D] = 1$, $1 \neq W \leqslant L_m$. В частности, $W \leqslant N$. Отметим также, что из $G = \langle D, x \rangle$ следует нормальность W в G. Пришли к противоречию с равенством $\mathrm{Core}_G(N) = 1$.

2^0. $[U, D] = U$, причем $1 \neq U \leqslant L_m$.

Вспоминая, что $U \leqslant D$ по построению, получим включение $U^x \leqslant D^x \leqslant N$. Из $K_m \lhd G$ получаем также включение $U^x \leqslant K_m$. Следовательно, $U^x \leqslant L_m$. Из условий на U следует также $[U^x, D^x] = U^x$. С другой стороны,

$$[u^x, d^x] = [u^x, d[d, x]] = [u^x, [d, x]] \cdot [u^x, d]^{[d,x]} =$$
$$= [u^x, [d, x]] \cdot [u^x, d] \cdot [[u^x, d], [d, x]] = [u^x, d],$$

поскольку первый и третий сомножители в предпоследнем выражении лежат в $L_{m+1} = 1$. Отсюда вытекает, что U^x также удовлетворяет обоим условиям п. 2^0. Аналогичным рассуждением последовательно покажем, что подгруппы

$$V = U^{x^2}, U^{x^3}, \dots, U, U^x$$

также удовлетворяют этим условиям. Следовательно, порожденная ими подгруппа $W = U^{\langle x \rangle}$ обладает свойствами: $[W, D] = W$, $1 \neq W \leqslant L_m \leqslant N$. Условие $G = \langle D, x \rangle$ опять гарантирует $W \lhd G$. Опять получаем противоречие с равенством $\mathrm{Core}_G(N) = 1$. Таким образом, все возможные случаи приведены к противоречию и теорема 1 полностью доказана.

Как уже упоминалось во введении, обратное к этой теореме утверждение справедливо в произвольной (не обязательно конечной) группе G. Приведем доказательство этого факта.

Предложение 1. *Если подгруппа D слабо нормальна в группе G, то она удовлетворяет нормализаторному условию в G.*

Доказательство. От противного. Предположим, что нашлась подгруппа $H : D \leqslant H \leqslant N$ такая, что $N_G(H) \nleqslant N$. Возьмем элемент $z \in N_G(H) \setminus N$. Имеем равенство $H^z = H$, но $z \notin N$. Следовательно, $D \leqslant H^z \leqslant N$, откуда $D^{z^{-1}} \leqslant H$. Но также $H \leqslant N$, поэтому $D^{z^{-1}} \leqslant N$. Из условия слабой нормальности для D в G отсюда вытекает равенство $D^{z^{-1}} = D$, т.е. $z^{-1} \in N$ и $z \in N$ – противоречие с выбором z. Следовательно, предположение неверно, и D удовлетворяет субнормализаторному условию в G. Предложение доказано.

Таким образом, субнормализаторное условие в конечной сверхразрешимой группе эквивалентно слабой нормальности. Однако эти два свойства не равносильны уже́ в классе конечных разрешимых групп, как показывает следующий пример в группе порядка $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Рассмотрим группу G, которая задается следующими образующими и соотношениями:

$$\begin{aligned} G = \langle\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f :\quad & a^3 = b^2 = c^2 = d^3 = e^3 = f^3 = 1, \\ & [b, a] = c,\ [c, a] = bc, \\ & [d, a] = d^2 e,\ [e, a] = e^2 f, \\ & [f, a] = df^2,\ cb = bc,\ db = bd, \\ & [e, b] = e,\ [f, b] = f, \\ & [d, c] = d,\ [e, c] = e, \\ & fc = cf,\ ed = de,\ fd = df,\ fe = ef\ \rangle. \end{aligned}$$

Легко показать, что эта группа является полупрямым произведением своего коммутанта $G' = \langle b, c, d, e, f \rangle$ порядка 108 на циклическую группу 3-го порядка $\langle a\rangle$. Действие последней на коммутанте определено вытекающими из предыдущих соотношений формулами:

$$\begin{aligned} &b^a = bc, \qquad c^a = b, \qquad d^a = e,\\ &e^a = f, \qquad f^a = d\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Кроме того, определяющие соотношения показывают, что второй коммутант $G'' = \langle d, e, f\rangle$ является элементарной абелевой группой порядка 27. Отсюда вытекает тривиальность третьего коммутанта: $G''' = 1$. Отметим, что представление основной группы хорошо согласовано с ее композиционным рядом: он получается последовательным присоединением к 1 образующих от f по a и имеет длину 7.

Рассмотрим подгруппу $D = \langle b, f\rangle$. Ясно, что это неабелева группа 6-го порядка. Ее нормализатор $N = N_G(D) = \langle b, c, d, f\rangle$ имеет порядок 36 и самонормализуем в G, причем интервал $L(D, N)$ исчерпывается D, N, тремя самонормализуемыми подгруппами 12-го порядка:

$$A = \langle b, c, f\rangle,\ \ B = \langle b, cd^2, f\rangle,\ \ C = \langle b, cd, f\rangle,$$

а также нормальной в N подгруппой $H = \langle b, d, f\rangle$ порядка 18. Следовательно, D удовлетворяет субнормализаторному условию в G. С другой стороны, D не слабо нормальна в G, поскольку, ввиду формул $(*)$, для элемента $a \in G$ имеет место включение $D^a \leqslant N$, но $D^a = \langle bc, d\rangle \neq D$.

Вычисления в системе компьютерной алгебры GAP с использованием библиотеки `SmallGroups`, а также алгоритмов и программ автора [26] показали минимальность этого контрпримера относительно порядка основной группы.

Теорема 2 получается из теоремы 1 применением леммы 4, простых свойств слабо нормальных подгрупп и того факта, что субнормализаторное условие вытекает из свойства полинормальности.

4. Метки Бернсайда и функции ρ, ν

Пусть группа G действует на конечном множестве M. Меткой Бернсайда подгруппы $U \leqslant G$ на M называем число ее неподвижных точек при действии G на множестве M:

$$\beta_M(U) = |Fix_M(U)| = |\{m \in M : \forall u \in U : mu = m\}|.$$

Возьмем теперь подгруппу $V \leqslant G$ и рассмотрим транзитивное действие G на фактормножестве G/V по правилу $(V_i, g) \mapsto V_i g$ для $g \in G$ и правого смежного класса $V_i \in G/V$. Это определяет метки $\beta_{G/V}(U)$ для любых $U, V \leqslant G$. Обозначим через $\rho_G(V,U) = |\{V^g : g \in G, U \leqslant V^g\}|$ число подгрупп, сопряженных с V в G, которые содержат U. Введем также двойственную величину

$$\nu_G(V,U) = |\{U^g : g \in G, U^g \leqslant V\}|.$$

Предложение 2 ([28]). *Для любых подгрупп U, $V \leqslant G$ имеем равенство*

$$\beta_{G/V}(U) = \rho_G(V,U) \cdot |N_G(V) : V|.$$

Предложение 3 ([28]). *Для произвольных U, $V \leqslant G$ справедлива формула*

$$\nu_G(V,U) = \frac{|V|}{|N_G(U)|} \cdot \beta_{G/V}(U).$$

Отметим также очевидные формулы $\beta_{G/V}(V) = |N_G(V) : V|$ и $\beta_{G/V}(1) = |G : V|$. Таким образом, величины ρ и ν легко вычисляются через метки Бернсайда.

Теорема 3. *Полинормальная подгруппа $D \leqslant G$ паранормальна в G тогда и только тогда, когда для всякой D-полной промежуточной подгруппы K и ее нормализатора $L = N_G(K)$ имеем равенство $\nu_G(K,D) = \nu_G(L,D)$.*

Доказательство теоремы 3. 1^0. Необходимость последнего условия. Пусть подгруппа D паранормальна в G и K есть D-полная промежуточная подгруппа, а $L = N_G(K)$. Рассмотрим элемент $x \in G$ со свойством $D^x \leqslant L$. Поскольку $D \leqslant K \lhd L \leqslant G$, то $H = \langle D, D^x \rangle$ является подгруппой в L. С другой стороны, по паранормальности D в G подгруппа H является D-полной, откуда

$$H = D^H \leqslant D^L = D^K = K.$$

В частности, $D^x \leqslant K$. Таким образом, всякая сопряженная с D при помощи элемента из G подгруппа, лежащая в L, попадает в K. Обратное вытекает из включения $K \leqslant L$. Следовательно,

$$\{D^x : x \in G, D^x \leqslant L\} = \{D^y : y \in G, D^y \leqslant K\}. \tag{1}$$

Переходя к мощностям последних множеств, получаем требуемое равенство $\nu_G(K,D) = \nu_G(L,D)$.

2^0. Достаточность. Ясно, что условие $\nu_G(K,D)=\nu_G(L,D)$ влечет равенство (1). Нам нужно показать паранормальность D в G. Возьмем произвольный элемент $x\in G$ и рассмотрим промежуточную подгруппу $H=\langle D,D^x\rangle$. По полинормальности D в G найдется D-полная промежуточная подгруппа K, что $K\leqslant H\leqslant L=N_G(K)$. В частности, $D^x\leqslant H\leqslant L$. Из равенства (1) теперь следует включение $D^x\leqslant K$. Но $H=\langle D,D^x\rangle$, поэтому $H\leqslant K$. Наличие обратного включения показывает, что $H=K$ есть D-полная промежуточная подгруппа. Ввиду произвольности выбора $x\in G$ делаем вывод о паранормальности подгруппы D в G. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Слабо пронормальная подгруппа $D\leqslant G$ пронормальна в G, если и только если для любой D-полной $H\in L(D,G)$ имеем равенство $\nu_G(H,D)=|H:N_H(D)|$.*

Доказательство теоремы 4. Первоначально автор доказал утверждение путем разложения основной группы на двойные смежные классы. Здесь мы приведем другое, более короткое и наглядное доказательство, основанное на рассмотрении некоторого отображения и условия его биективности. С промежуточной подгруппой $H:D\leqslant H\leqslant G$ свяжем множество

$$T_H=\{H^x : x\in G, D\leqslant H^x\}.$$

Обозначим $L=N_G(H)$. Идея доказательства состоит в построении отображения θ из множества T_H в фактормножество $N/N\cap L$, где $N=N_G(D)$. Заметим, что ввиду предложений 2 и 3 справедлива формула

$$\nu_G(H,D)=\frac{|N_G(H)|}{|N_G(D)|}\,\rho_G(H,D). \tag{2}$$

Кроме того, по слабой пронормальности D в G имеем равенство:

$$|L:H|=|L\cap N:H\cap N|. \tag{3}$$

Таким образом, условие $\nu_G(H,D)=|H:N_H(D)|$ в формулировке теоремы 4 эквивалентно равенству

$$\rho_G(H,D)=|N:L\cap N|, \tag{4}$$

с которым и будем работать.

1^0. Необходимость условия (4). Пусть подгруппа D пронормальна в G. Это означает, что для всякого $g \in G$ найдется $u \in \langle D, D^g \rangle$ такой, что $D^u = D^g$. Пусть $D \leqslant H \leqslant G$ и $D \leqslant H^x \leqslant G$. Тогда $D^{x^{-1}} \leqslant H$, поэтому найдется элемент $y \in \langle D, D^{x^{-1}} \rangle \leqslant H$ такой, что $D^y = D^{x^{-1}}$. Следовательно, $u = yx \in N = N_G(D)$, причем $y = ux^{-1} \in H$. Таким образом, $H^{ux^{-1}} = H$, откуда $H^u = H^x$ для $u \in N$. Сопоставим промежуточной подгруппе $H^x \in T_H$ множество вида $N \cap Lu$, где Lu – правый смежный класс по L. Поскольку $u \in N$, то, по закону Дедекинда (см. [31, p. 26]), $N \cap Lu = (N \cap L)u$ является смежным классом N по подгруппе $N \cap L$. Отображение $\theta : T_H \to N/N \cap L$ определено корректно, так как для всякого $u_1 \in N : H^{u_1} = H^u$ имеем $u_1 u^{-1} \in L = N_G(H)$ и $u_1 \in N \cap Lu$.

Покажем, что отображение θ взаимно-однозначно. Пусть $D \leqslant H^x \leqslant G$ и $D \leqslant H^y \leqslant G$, причем $H^x \neq H^y$, т.е. $x \notin Ly$. Требуется проверить, что классы $(N \cap L)u$ и $(N \cap L)v$ не совпадают, где $u = l_1 x$, $v = l_2 y$ для $l_1, l_2 \in L$, $u, v \in N$.

Равенство $(N \cap L)u = (N \cap L)v$ равносильно включению $uv^{-1} \in N \cap L$. С другой стороны, $uv^{-1} = l_1 x y^{-1} l_2^{-1} \in N \cap L$. Следовательно, имели бы включение $xy^{-1} \in L$, или $x \in Ly$. Полученное противоречие с предположением $H^x \neq H^y$ показывает инъективность θ.

Не менее просто проверяется сюръективность отображения θ. А именно, для $u \in N$ смежный класс $(N \cap L)u$ является образом подгруппы $H^u \in T_H$. Действительно, $u \in N$ влечет $D^{u^{-1}} = D \leqslant H$, откуда $D \leqslant H^u$.

Теперь вспомним, что $|T_H| = \rho_G(H, D)$. Биективность отображения θ доказывает, что $\rho_G(H, D) = |N : L \cap N|$. Отметим, что в доказательстве нигде не использовалась D-полнота подгруппы H, поэтому равенство (4) справедливо для всякой промежуточной подгруппы H и $L = N_G(H)$.

2^0. Достаточность. Мы имеем равенство (4) и слабую пронормальность D в G (в частности, равенство (3)). Сначала докажем, что

$$\forall x \in G : D \leqslant H \leqslant G, D \leqslant H^x \leqslant G \;\; \exists u \in N : u \in Lx. \tag{5}$$

Не умаляя общности можно считать, что H есть D-полная подгруппа. В противном случае, ввиду полинормальности D в G (вытекающей из слабой пронормальности) можно было бы рассмотреть D-полную подгруппу F со свойством

$$D \leqslant F \leqslant H \leqslant N_G(H) \leqslant N_G(F) \leqslant G.$$

Предположим, что условие (5) нарушено, т.е.

$$\exists y \in G : D \leqslant H \leqslant G,\ D \leqslant H^y \leqslant G,\ \forall u \in N : u \notin Ly. \tag{6}$$

С другой стороны, для всякого $u \in N$ множество $N \cap Lu = (N \cap L)u$ есть правый смежный класс. Разным классам соответствуют разные H^u с условием $D \leqslant H^u$. Таких классов имеется $|N : L \cap N|$ штук. При наличии (6) имели бы неравенство

$$\rho_G(H, D) = |T_H| > |N : L \cap N|.$$

Это противоречило бы условию (4), которое равносильно условию теоремы 4.

Таким образом, мы показали, что условие (5) выполнено. Теперь возьмем произвольный $x \in G$ и рассмотрим промежуточную подгруппу $H = \langle D, D^{x^{-1}} \rangle$. Поскольку $H^x = \langle D, D^x \rangle$, то эта подгруппа также промежуточная. Из условия (5) находим элемент $u \in N : H^u = H^x$. Обозначим $z = ux^{-1} \in N_G(H)$. Тогда $D^z = D^{ux^{-1}} = D^{x^{-1}}$. Рассмотрим промежуточную подгруппу $L = \langle H, z \rangle$. Из включения $ux^{-1} \in N_G(H)$ получаем $D \leqslant H \lhd L \leqslant G$. По слабой пронормальности D в G имеем равенство:

$$L = N_L(D)\, H = (L \cap N)\, H. \tag{7}$$

В частности, $z = ux^{-1} \in L$, поэтому $z = rh$ для $r \in L \cap N$ и $h \in H$. При этом $r \in N$, откуда $D^r = D$. Вычисляем: $D^z = D^{rh} = D^h$ для $h \in H$. С учетом $D^z = D^{x^{-1}}$ имеем равенство $D^{x^{-1}} = D^h$, где $h \in H$. Окончательно, для всякого элемента $g = x^{-1} \in G$ нашелся элемент $h \in H = \langle D, D^g \rangle$ такой, что $D^h = D^g$. Это означает пронормальность подгруппы D в G. Теорема 4 доказана.

Для установления связи абнормальности и слабой абнормальности нам потребуется следующий результат из работы [1, с. 34] (теоремы 6, 7 и следствия к ним).

Предложение 4. *Пронормальная (слабо пронормальная) подгруппа $D \leqslant G$ абнормальна (соответственно, слабо абнормальна) в G тогда и только тогда, когда она самонормализуема там, т.е. $N_G(D) = D$.*

Теорема 5. *Слабо абнормальная подгруппа D в G абнормальна в G тогда и только тогда, когда для всякой промежуточной подгруппы H выполнено $\rho_G(H,D)=1$ (или, эквивалентно, $\nu_G(H,D)=|H:D|$).*

Для доказательства теоремы 5 достаточно воспользоваться теоремой 4 и применить предложение 4. Отметим, что этот результат эквивалентен теореме Ф. Холла, приведенной в [19]. Известно [1], что в любой (даже бесконечной) разрешимой группе пронормальность и абнормальность эквивалентны своим слабым ана́логам, т.е. соответствующие условия теорем 4 и 5 выполнены автоматически. Долгое время считалось, что подобный факт верен и для паранормальности. Сейчас покажем, что условие теоремы 3 существенно даже для конечной разрешимой группы.

Рассмотрим группу G, заданную образующими и соотношениями:

$$
\begin{aligned}
G=\langle\, a,\ b,\ x,\ y,\ z:\quad & a^4=1,\ b^2=1,\ ab=ba,\\
& x^3=y^3=z^3=1,\ xy=yx,\ x^a=xy,\\
& x^b=x,\ y^a=xy^2,\ y^b=y,\ z^a=xyz,\\
& z^b=y^2z^2[y,z],\ [x,z,x]=1\,\rangle.
\end{aligned}
$$

Ясно, что G является полупрямым произведением своих силовских подгрупп порядков 8 и 243 соответственно, последняя из которых – коммутант $G'=\langle\, x,y,z\,\rangle$ – имеет экспоненту 3. Несложно проверить, что $G''=\langle\,[x,z],[y,z]\,\rangle$ – элементарная абелева группа 9-го порядка, откуда $G'''=1$. Рассмотрим подгруппу $D=\langle d_1,d_2,d_3\rangle$, где $d_1=byx^2a^2y^2$, $d_2=z[x,z]^2$, $d_3=[y,z][x,z]$. Эта ненильпотентная подгруппа порядка 18 имеет нормализатор $N=\langle D,z\rangle$ порядка 54. Перечисление всех 11 промежуточных подгрупп и нахождение их нормализаторов показывает полинормальность подгруппы D в G. С другой стороны, для D-полной подгруппы $F=\langle D,xy\rangle$, $|F|=54$, и ее нормализатора $B=\langle F,z\rangle$, $|B|=162$, величины $\nu_G(F,D)=3$ и $\nu_G(B,D)=6$ не равны. Следовательно, D не паранормальна в G по теореме 3.

Отметим, что группа G имеет очень простое нормальное строение, в частности, является трансметабелевой группой 2-го типа в смысле А. И. Скопина [15] (класс нильпотентности коммутанта равен 2). В то же время, решетка ее подгрупп устроена сложно, имеется 239 классов сопряженности подгрупп. Степень минимального подстановочного представления G равна 18.

Укажем на пример слабо абнормальной, но не абнормальной подгруппы в неразрешимой группе. Его доставляет один из 4 классов сопряженности подгрупп, изоморфных A_5 в группе Матье M_{12}. Рассмотрим подстановки

$$a = (2,3,5,7,11,9,8,12,10,6,4);$$
$$b = (3,6)(5,8)(9,11)(10,12);$$
$$c = (1,2)(3,4)(5,9)(6,8)(7,12)(10,11)$$

на 12 точках. Известно, что $M_{12} = \langle a,b,c\rangle$. Рассмотрим подгруппу $D = \langle d_1, d_2\rangle$, где $d_1 = bcb, d_2 = ac$. Она изоморфна знакопеременной группе A_5 и при помощи программ, описанных в [26], легко устанавливается, что все ее надгруппы в M_{12} самонормализуемы, т.е. D – слабо абнормальна в M_{12}. С другой стороны, имеется промежуточная подгруппа H 660-го порядка, такая что $\rho_G(H,D) = 2$. Применение теоремы 5 показывает отсутствие свойства абнормальности для D в M_{12}. По теореме 4 эта же подгруппа является примером слабо пронормальной, но не пронормальной подгруппы. Это отвечает на вопрос из [19, p. 250]. Пример в бесконечной группе построен в [7].

5. Нильпотентные подгруппы

В этом разделе рассматриваем нильпотентные подгруппы конечных групп. Оказалось, что в случае разрешимых групп нильпотентные подгруппы обладают свойствами, аналогичными свойствам p-подгрупп. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть G – конечная разрешимая группа. Нильпотентная подгруппа D пронормальна в G тогда и только тогда, когда она полинормальна в G.*

Начнем изложение с доказательства следующего простого результата о связи паранормальности и слабой нормальности.

Предложение 5. *Если конечная подгруппа D паранормальна в группе G, то она и слабо нормальна в G.*

Доказательство предложения 5. Пусть $x \in G$ и имеет место включение $D^x \leqslant N_G(D)$. Поскольку $D \leqslant N_G(D)$ всегда, то

$F = \langle D, D^x \rangle$ является подгруппой в нормализаторе $N = N_G(D)$. Следовательно, $D^F \leqslant D^N = D$. С другой стороны, по паранормальности D в G имеем D-полноту подгруппы F, т.е. равенство $D^F = F$. Таким образом, $F = \langle D, D^x \rangle = D$. Ввиду конечности D из включения $D^x \leqslant D$ следует равенство $D^x = D$. Последнее и означает слабую нормальность подгруппы D в G, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6. Необходимость очевидна: из пронормальности сразу следует паранормальность, которая, в свою очередь, влечет полинормальность. Здесь вовсе не используются остальные условия теоремы.

Для доказательства достаточности предположим, что утверждение не справедливо и рассмотрим минимальный контрпример – группу G наименьшего порядка, в которой найдется полинормальная нильпотентная подгруппа D, которая не пронормальна в G. Выберем минимальный нормальный делитель M в G. Из разрешимости конечной группы G делаем вывод, что M есть элементарная абелева группа (см. [20], S. 52).

Рассмотрим факторгруппу G/M. Ее порядок строго меньше, чем $|G|$. При этом группа G/M также разрешима. Подгруппа DM/M в G/M нильпотентна как гомоморфный образ нильпотентной подгруппы D. Применение теоремы 4 из [1, с. 26] доказывает полинормальность подгруппы DM/M в G/M. По минимальности нашего контрпримера отсюда заключаем, что DM/M пронормальна в G/M. Использование теоремы 9 из [1, с. 34] показывает, что подгруппа DM пронормальна в G.

Рассмотрим цепочку промежуточных подгрупп:

$$D \leqslant DM \leqslant N_G(DM) \leqslant G. \tag{8}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, возможны три различных случая.

(1) $DM = G$. Согласно лемме 3 подгруппа D максимальна в G, а потому и пронормальна в ней. Противоречие с выбором D.

(2) $N_G(DM) < G$. Из полинормальности подгруппы D в G вытекает ее полинормальность в $T = N_G(DM)$ (лемма 2), при этом $|T| < |G|$. Ввиду минимальности нашего контрпримера, имеем пронормальность D в T. Сейчас покажем, что в этой ситуации D будет пронормальна в G. По доказанному выше, подгруппа DM пронормальна в G. Возьмем произвольный элемент

$x \in G$, тогда по определению пронормальности найдется элемент $y \in \langle DM, (DM)^x \rangle = \langle D, D^x \rangle M$, такой что $(DM)^x = (DM)^y$. Не умаляя общности можно считать, что $y \in \langle D, D^x \rangle$, поскольку $M \leqslant DM$ и для всякого $m \in M$ имеем равенство $(DM)^m = DM$.

Используем пронормальность D в $T = N_G(DM)$. Для элемента $z = xy^{-1} \in N_G(DM)$ найдется такой

$$w \in \langle D, D^z \rangle = \langle D, D^{xy^{-1}} \rangle \leqslant \langle D, D^x, y \rangle = \langle D, D^x \rangle,$$

что $D^w = D^z$ или, равносильно, $D^x = D^{wy}$. При этом оба элемента $w, y \in \langle D, D^x \rangle$, поэтому $wy \in \langle D, D^x \rangle$. Это означает пронормальность D в G ввиду произвольности выбора элемента $x \in G$. Противоречие с выбором пары (D, G) как контрпримера.

(3) DM является собственным нормальным делителем в G. Рассмотрим промежуточную подгруппу

$$C = N_{DM}(D) = N_G(D) \cap DM = D(N \cap M). \tag{9}$$

Оба множителя в правой части последнего равенства нильпотентны. Кроме того, $D \leqslant C \leqslant N$, откуда $D \lhd C$. Также из условий $M \lhd G$ и $N \leqslant G$ по второй теореме об изоморфизме (см. [31], p. 42) следует $N \cap M \lhd N$ и, в частности, $N \cap M \lhd C$. Итак, оба множителя в правой части равенства (9) являются нильпотентными нормальными подгруппами в C. Согласно теореме 2.14 из [32], p. 28, подгруппа C также является нильпотентной.

По построению D полинормальна в G, а в силу леммы 2 она полинормальна также и в подгруппе DM. В частности, подгруппа $C = N_{DM}(D)$ самонормализуема в DM. Это означает, что C есть картеровская подгруппа конечной разрешимой группы DM. Далее, вытекающее из полинормальности D в G субнормализаторное условие и включение $D \leqslant C \leqslant N$ показывают, что $N_G(C) \leqslant N$. С другой стороны, $DM \lhd G$ и N – подгруппа в G, поэтому по второй теореме об изоморфизме имеем $C = DM \cap N \lhd N$, или $N \leqslant N_G(C)$. Из двух включений вытекает равенство $N_G(C) = N$.

Возьмем произвольный элемент $x \in G$. В рассматриваемом случае $DM \lhd G$, поэтому $C^x \leqslant (DM)^x = DM$. Таким образом, C^x также является картеровской подгруппой в DM. Следовательно, C и C^x сопряжены в DM (см. [32], p.35), т.е. найдется элемент $w \in DM$ такой, что $C^x = C^w$. Но это означает, что $xw^{-1} \in N_G(C) = N$. Таким образом, $D^x = D^w$. Вспомним, что DM – собственный нормальный делитель в G, в частности, $|DM| < |G|$. По минимальности нашего контрпримера, подгруппа D пронормальна в DM. Поэтому для элемента $w \in DM$ найдется элемент $u \in \langle D, D^w \rangle$, такой что $D^w = D^u$. Но $D^w = D^x$, откуда $D^x = D^u$ для $u \in \langle D, D^x \rangle$. Это показывает пронормальность подгруппы D в G. И в этом случае приходим к противоречию с выбором пары (D, G).

Все возможные ситуации разобраны, что завершает доказательство теоремы 6.

При помощи вычислений на основе алгоритмов и программ автора [26] в системе компьютерной алгебры GAP удалось найти пример, показывающий, что условие разрешимости основной группы в формулировке теоремы 6 существенно. А именно, любой из двух классов сопряженных подгрупп 15-го порядка (циклических, а потому и нильпотентных) в симплектической группе $\mathrm{Sp}(4,4)$ доставляет соответствующий контрпример. Первоначально вычисления выполнялись без обращения к элементам группы, использовалась лишь информация о классах сопряженных подгрупп из библиотеки таблиц меток Бернсайда `TOM`. Затем была проведена проверка контрпримера в подстановочном представлении с использованием прямых алгоритмов автора [12]. Указанные подгруппы оказались полинормальными, но даже не слабо пронормальными. Для построения подгруппы 15-го порядка в естественном матричном представлении данной симплектической группы достаточно взять цикл Зингера в $\mathrm{SL}(2,4)$ и затем вложить последнюю группу в $\mathrm{Sp}(4,4)$ хорошо известным способом из [20].

В заключение автор выражает признательность проф. А. В. Яковлеву за замеченный пробел в первоначальной версии доказательства теоремы 1, а также благодарит своего научного консультанта в докторантуре проф. А. И. Скопина за внимание к работе.

Литература

1. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* В сборнике: Кольца и линейные группы. Краснодар 1988, с. 14–41.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Труды МИАН **165** (1984), 24–42.

3. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
4. З. И. Боревич, В. И. Мысовских, *Бесконечные цепи последовательных нормализаторов в полной линейной группе над полем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 44–48.
5. П. В. Гаврон, Л. Ю. Колотилина, *О подгруппах в T-группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 62–65.
6. П. В. Гаврон, В. И. Мысовских, *Расположение подгрупп симметрических групп степени, не превосходящей семи.* В сборнике: Кольца и матричные группы. Орджоникидзе (1984), 35–42.
7. С. В. Иванов, *Группы с полинормальной и слабо абнормальной подгруппами.* В сборнике: Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик (1985), с. 50–60.
8. В. И. Мысовских, *Паранормальность симметрической группы в сплетениях.* — Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1, вып. 4, No. 22 (1989), 25–28.
9. В. И. Мысовских, *О полинормальных подгруппах конечных сверхразрешимых групп.* — Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1, вып. 4, No. 22 (1990), с. 83–85.
10. В. И. Мысовских, *О теоретико-групповом методе исследования функций k-значной логики.* — Вестн. С.- Петербург. ун-та. Сер. 1, вып. 1, No. 1 (1996), 50–53.
11. В. И. Мысовских, *О решетке подгрупп, нормализуемых симметрической группой в полной мономиальной группе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 111–118.
12. В. И. Мысовских, *Тестирование подгрупп конечной группы на свойства вложения типа пронормальности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 119–123.
13. В. И. Мысовских, *Метки Бернсайда и решение двух проблем З. И. Боревича о полинормальных подгруппах.* — Докл. РАН **367**, No. 4 (1999), 445–446.
14. В. И. Мысовских, А. И. Скопин, *Свойства вложения непримарных подгрупп симметрической группы степени восемь.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 124–128.
15. А. И. Скопин, *Тождество Якоби и собирательная формула Ф. Холла в трансметабелевых группах двух типов.* — Зап. науч. семинаров ЛОМИ **175** (1989), 106–112.
16. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп.* Наука, М. (1978).
17. W. S. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order, 2-nd ed.*. Cambridge Univ. Press (1911).
18. R. W. Carter, *Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers.* — Proc. London Math. Soc. **12** (1962), 535–563.
19. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups.* Berlin-New York (1992).
20. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag (1967).
21. R. Maier, S. Sidki, *A note on subnormality in factorizable finite groups.* — Arch. Math. **42** (1984), 97–101.
22. K. Lux, H. Pahlings, *Computational aspects of representation theory of finite groups II.* in: *Algorithmic Algebra and Number Theory.* eds. B. H. Matzat,

G.-M. Greuel, G. Hiss, Springer (1999), 381–397.
23. Th. W. Merkwitz, *Markentafeln endlicher Gruppen.* Diplomarbeit, RWTH Aachen, März 1998.
24. K. H. Müller, *Schwachnormale Untergruppen: eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen..* — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **36** (1966), 129–157.
25. V. I. Mysovskikh, *A counterexample to the long-standing conjecture of Z. I. Borevich by GAP.* in: Extended Abstract of the Workshop CASC'98. St. Petersburg, April 1998, pp. 101–102.
26. V. I. Mysovskikh, *Investigation of subgroup embeddings by the computer algebra package GAP.* in: Computer Algebra in Scientific Computing. Proc. of the Second Workshop CASC'99, eds. V. G. Ganzha, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov, Springer 1999, pp. 309–315.
27. T. A. Peng, *Pronormality in finite groups.* – J. London Math. Soc. **3**, No. 2 (1971), 301–306.
28. G. Pfeiffer, *The subgroups of M_{24} or how to compute the table of marks of a finite group.* 1995, preprint.
29. J. S. Rose, *Finite soluble groups with pronormal system normalizers.* — Proc. London Math. Soc. **17**, No. 3 (1967), 447–469.
30. M.Schönert et al., *GAP – Groups, Algorithms and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik.* RWTH, Aachen, Germany, fifth edition (1995).
31. M. Suzuki, *Group Theory I.* Springer-Verlag (1982).
32. M. Suzuki, *Group Theory II.* Springer-Verlag (1986).

Mysovskikh V. I. Subnormalizers and embedding properties of subgroups of finite groups.

Three important problems concerned with the arrangement of intermediate subgroups are solved. All of them are related to subgroup embedding properties like pronormality. Firstly, it is shown that the subnormalizer condition is equivalent to weak normality for subgroups of a finite supersolvable group. A counterexample to the similar statement in a finite solvable group is constructed. Secondly, we find necessary and sufficient conditions for coincidence of paranormality, pronormality and abnormality with their weak analogs. The important tool for solving such problems is elaborated, it is based on Burnside tables of marks. We found out a counterexample to the long-standing conjecture of Z. I. Borevich on equivalence of polynormality and paranormality in solvable groups. The third part of the paper deals with nilpotent polynormal subgroups of a finite group. A necessary and sufficient condition of polynormality for the solvable case is given. It is shown that the solvability assumption cannot be omitted.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 декабря 1999 г.