Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

В. И.Мысовских , А. И. Скопин

ВЛОЖЕНИЯ ПОДГРУПП В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ СТЕПЕНИ ДЕВЯТЬ

Симметрическая группа S_n была исторически первым содержательным объектом теории групп, а ее подгруппы всегда привлекали пристальное внимание исследователей. Еще в конце 19-го века были построены все подгруппы симметрических групп не выше восьмой степени [12]. Использование современных комбинаторных методов, инструментария вычислительной теории групп [18] и компьютеров позволило получить аналогичные результаты для симметрических групп до 13-ой степени [17]. Достигнут значительный прогресс в построении транзитивных групп подстановок (до 23-й степени) [7] и примитивных групп (до степени 256) [17].

Важнейшим инструментом описания всех подгрупп конечной группы является метод таблиц меток Бернсайда [10]. Называемая иначе "таблицей суперхарактеров", она хранит информацию об отношении включения между классами сопряженных подгрупп рассматриваемой группы, порядках их представителей, индексах и порядках нормализаторов. В системе компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming) [17] недавно была создана библиотека 'TOM', содержащая таблицы меток для некоторых линейных, симметрических и спорадических групп, их подгрупп, а также разработаны новые вычислительные подходы к построению Бернсайдовских матриц [11, 15]. В этой связи становится актуальной задача об использовании информации из таблиц меток Бернсайда для решения конкретных теоретико-групповых задач (см., например, [5]).

Настоящая статья продолжает работы авторов [3, 6] по исследованию типов всех подгрупп симметрических групп небольшой степени. Под типом погруппы понимается наиболее сильное из следующих свойств, которым обладает рассматриваемая подгруппа в S_n: максимальность, абнормальность [9], пронормальность [8], паранормальность [1], их слабые аналоги (вполне самонормализуемость, обобщенное свойство Фраттини, полинормальность [1]), слабая нормальность по К. Г. Мюллеру [13] и субнормализаторное условие. Эти свойства вложения подгрупп в той или иной степени обобщают важнейшее для теории групп понятие нормального делителя и отражают особенности строения решетки подгрупп [16] рассматриваемой группы. Сделанные ссылки показывают их значимость в теоретико-групповой литературе.

Основным инструментом данной работы явились алгоритмы и программы, разработанные одним из авторов и частично описанные в [14]. Ввиду того, что для p-подгрупп многие из упомянутых свойств вложения эквивалентны [2], мы исследовали лишь непримарные подгруппы. Результаты вычислений оформлены в виде таблицы, содержащей информацию о порядке подгруппы, порядке и классе ее нормализатора в S_9 и типе подгруппы. Отметим, что понятие типа подгруппы не зависит от выбора представителя из класса сопряженных подгрупп. В S_9 имеется 554 таких класса, причем 432 из них соответствуют непримарным подгруппам.

Ввиду того, что описание выходных данных и самих подгрупп занимает значительный объем, мы приведем здесь лишь краткую сводку результатов. Заинтересованные в дополнительной информации могут получить данные непосредственно от авторов. Вычисления показали, что из 432 классов сопряженности непримарных подгрупп (включая единичную) в S_9 104 класса соответствуют подгруппам, которые даже не слабо нормальны. С точностью до сопряженности 33 подгруппы слабо нормальны, но не паранормальны. Среди оставшихся имеется 50 классов паранормальных, но не пронормальных подгрупп. Больше всего оказалось "чисто" пронормальных подгрупп (т.е. таких, которые не абнормальны и не нормальны) – 215 классов. Следующее семейство включает 21 класс собственных абнормальных, но не максимальных в S_9 подгрупп. Список завершают 6 классов максимальных подгрупп, не являющихся нормальными, а также 3 нормальных подгруппы.

Поскольку соответствующие программы оперируют не с групповыми элементами, а с целыми числами из таблицы меток, вычисления проходят в реальном времени. В зависимости от порядка подгруппы это занимает от нескольких миллисекунд до 5-10 минут работы процессора.

Для проверки полученных результатов были использованы значительно более медленные, но не зависящие от таблиц меток Бернсайда, алгоритмы и программы, описанные В. И. Мысовских в [4]. Типы некоторых важных подгрупп были дополнительно исследованы вручную, из теоретических соображений.

Литература

1. З. И. Боревич, О. Н. Македонская, *О решетке подгрупп.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **103** (1980), 13–19.
2. П. В. Гаврон, Л. Ю. Колотилина, *О подгруппах в T-группах.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **103** (1980), 62–65.
3. П. В. Гаврон, В. И. Мысовских, *О подгруппах симметрических групп степени не превосходящей семи. Кольца и матричные группы.* Сб. научн. трудов. Орджоникидзе (1984), 35–42.
4. В. И. Мысовских, *Тестирование подгрупп конечной группы на свойства вложения типа пронормальности.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **236** (1997), 119–123.
5. В. И. Мысовских, *Метки Бернсайда и решение двух проблем З. И. Боревича о полинормальных подгруппах.* Доклады Академии наук, **367**, No. 4 (1999), 445–446.
6. В. И. Мысовских, А. И. Скопин, *Свойства вложения непримарных подгрупп симметрической группы степени восемь.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **236** (1997), 124–128.
7. J. H. Conway, A. Hulpke, and J. McKay, *On transitive permutation groups.* LMS J. Comput. Math., **1** (1998), 1–8.
8. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups.* Berlin–New York, 1992.
9. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, 1967.
10. A. Kerber, *Algebraic combinatorics via finite group actions.* Mannheim–Wien–Zürich, 1991.
11. Th. W. Merkwitz, *Merkentafeln endlicher Gruppen.* Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1998.
12. G. A. Miller, *Memoir on the substitution-groups whose degree does not exceed eight.* Amer. J. Math., **21** (1989), 287–338.
13. K. H. Müller, *Schwachnormale Untergruppen: eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen.* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **36** (1966), 129–157.
14. V. I. Mysovskikh, *Investigation of Subgroup Embeddings by the Computer Algebra Package GAP. Computer Algebra in Scientific Computing.* Proc. of the 2-nd Workshop CASC'99, Springer, 1999, 309–315.
15. G. Pfeiffer, *The subgroups of M_{24} or how to compute the table of marks of a finite group.* Preprint, RWTH Aachen, 1995.
16. R. Schmidt, *Subgroup lattices of groups.* De Gruyter, 1994.
17. M. Schönert et al., *GAP – Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, fifth edition, 1995.
18. A. Seress, *An introduction to computational group theory.* Notices AMS, **44**, No. 6 (1997), 671–679.

Mysovskikh V. I., Skopin A. I. Subgroup embeddings in the symmetric group of degree nine.

This research is devoted to the determination of embedding properties of all nonprimary subgroups of the symmetric group on nine letters and continues previous investigations of the authors. We have tested the above-mentioned subgroups for the following properties: abnormality, pronormality, paranormality, their weak analogies, weak normality and the subnormalizer condition. The technique of Burnside marks as well as the respective information on the table of mark of S_9 from the computer algebra package GAP (Groups, Algorithms and Programming) library 'TOM' were used. Subgroups of prime-power orders have not been considered because many of the above-mentioned concepts coincide for such subgroups. The total number of subgroups in question turned out to be 432.

С.-Петербургский
государственный университет

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 декабря 1999 г.