Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 265, 1999 г.

**К. И. Пименов**

# ТЕОРЕМА КРУЛЛЯ–ШМИДТА ДЛЯ АРТИНОВЫХ МОДУЛЕЙ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Цель данной статьи – доказать теорему Крулля–Шмидта для артиновых модулей над кольцами, являющимися локальными алгебрами над своим полем вычетов. Теорема Крулля–Шмидта выполнена для модулей конечной длины, то есть артиновых и нётеровых одновременно. Крулль ещё в 1932 году поставил вопрос о справедливости её для артиновых модулей над произвольным кольцом. Уорфилд в работе 1969 года обобщил классическую лемму Фиттинга [2, 6.4.2] на модули, все циклические подмодули которых имеют конечную длину [4]. Из этого обобщения следовала теорема Крулля–Шмидта для артиновых модулей над кольцом, которое является либо нётеровым, либо коммутативным. В общем случае к теореме Крулля–Шмидта для артиновых модулей контрпример был построен в 1994 году [1]. В дипломной работе автора данной статьи было показано, как возникают аномалии прямых разложений артиновых модулей над кольцами достаточно простого вида. Кольца этого сорта должны были иметь хотя бы два максимальных идеала. Таким образом возник вопрос об условиях, при которых справедлива теорема Крулля–Шмидта для артиновых модулей над локальным кольцом. В этом случае циклический артинов модуль уже может оказаться модулем сколь угодно большой длины [3], однако нижеследующий аналог классической леммы Фиттинга всё же будет иметь место.

Эндоморфизм $f$ модуля $M$ будем называть *локально нильпотентным*, если для любого $x \in M$ найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^n(x) = 0$. Ясно, что если эндоморфизм $f$ локально нильпотентен, то $1 - f$ обратим. Будем говорить, что для артинова модуля $M$ и эндоморфизма $f$ выполняется обобщенная лемма Фиттинга (ОЛФ), если имеется разложение в прямую сумму $f$-инвариантных подмодулей (*разложение Фиттинга* для $f$) $M = U_f \oplus N_f$ таких, что ограничение $f$ на $U_f$ – это автоморфизм, а ограничение $f$ на $N_f$ – локально нильпотентный эндоморфизм. Отметим, что разложение в сумму подмодулей со свойствами, описанными выше, автоматически оказывается прямым.

**Лемма 1.** *Инъективный эндоморфизм артинова модуля обратим.*

**Доказательство.** См. [2, 6.4.1].

**Лемма 2.** *Пусть есть артинов модуль $M$, его эндоморфизм $f$ и $f$-инвариантные подмодули $N_1$, $N_2$ и $U_1$, $U_2$ такие, что ограничение $f$ на $N_i$ локально нильпотентно, а ограничение $f$ на $U_i$ обратимо при $i = 1, 2$. Тогда $f|_{N_1+N_2}$ локально нильпотентен, а $f|_{U_1+U_2}$ обратим.*

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно верно для произвольного модуля $M$. Во втором в силу артиновости достаточно доказать инъективность. Пусть $u = f(u_1) = f(u_2)$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Тогда $u \in U_1 \cap U_2$. Так как $f|_{U_1 \cap U_2}$ инъективен, а значит, обратим, то найдется $v \in U_1 \cap U_2$ такой, что $u = f(v)$. По обратимости $f|_{U_1}$ и $f|_{U_2}$ получаем, что $v = u_1$ и $v = u_2$. Таким образом, $u_1 = u_2$, что и требовалось доказать.

Для всякого артинова модуля $M$ определим его цокольный ряд, каждому трансфинитному числу $\tau$ сопоставив подмодуль $M^\tau$. Положим $M^0 = 0, M^1 = \mathrm{Soc}(M)$; для $\tau = \lambda + 1$ выберем $M^\tau$ так, чтобы $M^\tau/M^\lambda = \mathrm{Soc}(M/M^\lambda)$; для предельного трансфинитного числа $\tau$ положим $M^\tau = \bigcup\limits_{\lambda<\tau} M^\lambda$. Таким образом, мы получили цепочку вполне инвариантных подмодулей. При этом, так как $M$ артинов, то $M = M^\sigma$ для некоторого трансфинитного числа $\sigma$. На этом замечании основано доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $k$ – поле, $R$ – локальная $k$-алгебра с максимальным идеалом $J$ такая, что тело вычетов $\overline{R} = R/J$ является конечномерной алгеброй над $k$. Тогда для произвольного артинова $R$-модуля $M$ и его эндоморфизма $f$ имеет место обобщенная лемма Фиттинга.*

**Доказательство.** Доказательство проведем трансфинитной индукцией по $\sigma$. Пусть $M = M^\sigma$ (считаем $\sigma$ наименьшим возможным), и ОЛФ выполнена для всех его собственных подмодулей и их всевозможных эндоморфизмов. Докажем, что она имеет место и для $M$.

**Случай 1.** $\sigma$ – предельное. Тогда для всех $\lambda < \sigma$ имеем разложение $M_\lambda = U_\lambda \oplus N_\lambda$. Заметим, что для всех $\mu < \lambda$ $U_\mu \subset U_\lambda$ и $N_\mu \subset N_\lambda$.

В противном случае мы получили бы, что $(U_\lambda + U_\mu) \cap N_\lambda \neq 0$ или $(N_\lambda + N\mu) \cap U_\lambda \neq 0$, а это противоречит лемме 2. Нетрудно видеть, что пара $N = \bigcup\limits_{\lambda<\tau} N_\lambda$ и $U = \bigcup\limits_{\lambda<\tau} U_\lambda$ доставляет требуемое $f$-инвариантное разложение.

**Случай 2.** $\sigma = \lambda + 1$. Тогда $JM \subset M^\lambda$, поскольку модуль $M/M^\lambda$ полупрост по построению. Пусть $\overline{M} = M/JM$, $\overline{f}$ – эндоморфизм модуля $\overline{M}$, индуцированный $f$. Полупростой артинов модуль $\overline{M}$ является конечномерным векторным пространством над $k$. Выберем $x_1, \ldots x_l \in M$ так, чтобы $\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_l$ образовали базис $\overline{M}$ над $k$. $JM = U_0 \oplus N_0$ – разложение Фиттинга для $JM$ и $f$.

(а) Пусть $\overline{f}$ нильпотентен ($f^n(M) \subset JM$). Пусть $f^n(x_i) = u_i + n_i$, где $u_i \in U_0, n_i \in N_0$. Заменив $x_i$ на $x_i - f^{-n}(u_i)$, можно считать, что $u_i = 0$. Положим $N = N_0 + Rx_1 + \ldots + Rx_l$. Тогда $M = N \oplus U_0$ – требумое разложение для $M$. Действительно, $f|_{Rx_i}$ локально нильпотентен по построению, откуда по лемме 2 $f|_N$ локально нильпотентен. Подмодули $N$ и $U_0$ порождают $M$ в силу того, что $N_0$ и $U_0$ порождают $JM$, а $\overline{x}_i$ образуют базис $\overline{M}$.

(б) Пусть $\overline{f}$ обратим. Тогда по теореме Гамильтона–Кэли найдется полином $p(x) \in k[x]$ с нулевым свободным членом такой, что $p(\overline{f}) = id_{\overline{M}}$. Обозначим $g = p(f)$. Заметим, что эндоморфизмы $f, g, 1-g$ коммутируют. Так как $1-g$ подпадает под условия п. (а), получаем $(1-g)$-инвариантное разложение $M = N_{1-g} \oplus U_{1-g}$. Поскольку $f$ и $1-g$ коммутируют, модуль $N_{1-g} = \{x \in M | \exists k \in \mathbb{N} : (1-g)^k(x) = 0\}$ является также и $f$-инвариантным. Поскольку $g|_{N_{1-g}}$ обратим, то $f|_{N_{1-g}}$ также обратим. Разложение Фиттинга для модуля $M$ дают подмодули $U = U_0 + N_{1-g}$ и $N = N_0$. Действительно: $JM$ содержится в $U+N$ по построению; $U$ порождает $M$ по модулю $JM$, поскольку $N_{1-g}$ порождает $M$ по модулю $JM$. Ограничение $f$ на $N$ локально нильпотентно, а $f|_U$ обратим в силу леммы 2.

(в) Пусть $\overline{f}$ необратим и ненильпотентен. Рассмотрим $g = p(f)$, где $p$ – многочлен с нулевым свободным членом, а $\overline{g}$ – нетривиальный идемпотентный эндоморфизм $\overline{M}$. Модуль $gM$ $f$-инвариантен, пусть $gM = U_f \oplus N_f$ – соответствующее разложение Фиттинга. $(1-g)M = U_g \oplus N_g$ – разложение Фиттинга для $(1-g)M$ и $g$, при этом $N_g + JM = (1-g)M + JM$. Так как $N_g$ $f$-инвариантен, то для него и $f$ тоже есть фиттинговское разложение $N_g = U_1 \oplus N_1$. Нетрудно видеть, что $U = U_f + U_1 + U_0$ и $N = N_f + N_1 + N_0$ дают нам искомое разложение.

**Замечание.** Из доказательства легко видеть, что алгебраичности $\overline{R}$ над $k$ достаточно для справедливости теоремы.

**Следствие.** *Кольцо эндоморфизмов неразложимого артинова модуля $M$ над кольцом $R$, удовлетворяющим условиям теоремы* 1, *локально.*

**Доказательство.** По теореме 1 любой эндоморфизм $f$ неразложимого артинова модуля либо обратим, либо локально нильпотентен. Поэтому, если $f$ необратим, то $1 - f$ обратим, откуда по [2, 7.1.1] $\mathrm{End}_R M$ локально.

Так как локальность кольца эндоморфизмов влечет единственность разложения в прямую сумму, то нами доказана

**Теорема 2.** *Пусть $k$ – поле, $R$ – локальная $k$-алгебра такая, что $R/\mathrm{Rad}(R)$ – алгебраическая алгебра над $k$. Тогда для произвольного артинова $R$-модуля $M$ верна теорема Крулля–Шмидта.*

В заключение мы приведем два примера локальных $k$-алгебр, которые не являются ни нётеровыми, ни коммутативными и для которых рассуждения, приведённые при доказательстве теорем 1 и 2, не имеют места. Основной движущей идеей вышеизложенного доказательства являлся следующий факт: если $\overline{f}$ обратим, то $f|_{JM}$ не может быть локально нильпотентным. В этом разделе мы построим циклический артинов модуль над некоторой $k$-алгеброй с полем вычетов $k(x)$, обладающий таким аномальным эндоморфизмом.

**Пример 1.** Пусть $F = k(x)$, $A$ – локализация $k[x]$ по идеалу, порожденному $x$, $R = F[[t]]$ – кольцо формальных степенных рядов. Рассмотрим $k$-алгебру $\Lambda$, порождённую кольцом $R$ и элементом $a$, в которой выполнены соотношения $aRa = 0, at = 0, ta = ax$. Всякий одночлен из $\Lambda$, содержащий $a$, приводится к виду $rax^n f$, где $r \in R^*$, $f \in A^*$, $n \in \mathbb{Z}$ и $n$ определено однозначно. Обозначим через $I_k$, $k \geqslant 0$ подпространство, натянутое на такие одночлены с $n \geqslant -k$ и $tF[[t]]$. Очевидно, все $I_k$ являются левыми идеалами в кольце $\Lambda$, причем $I_\infty = \bigcup_{k \geqslant 0} I_k$ оказывается единственным максимальным идеалом, поскольку все элементы из $\Lambda \setminus I_\infty$ обратимы как степенные ряды с ненулевым свободным членом. Итак, кольцо $\Lambda$ локально, его тело вычетов $\overline{\Lambda}$ изоморфно полю $k(x)$ как $k$-

алгебра. Кроме того, все фактормодули $I_k/I_{k-1}$ просты, поскольку каждый из них изоморфен $k(x)$.

Циклический модуль $M = \Lambda/I_0$ является цепным артиновым модулем бесконечной длины, в радикале которого $I_\infty/I_0$ все подмодули имеют конечную длину. Рассмотрим эндоморфизм $g$, индуцированный умножением на $x$ справа. Соответствующий эндоморфизм $\overline{g}$ модуля $\overline{M} = M/JM$ обратим, но $g|_{JM}$ локально нильпотентен из-за того, что $I_k x = I_{k-1}$. Для этого эндоморфизма ОЛФ не может выполняться. Тем не менее, кольцо эндоморфизмов построенного циклического модуля локально. Для построения артинова модуля с нелокальным кольцом эндоморфизмов слегка модернизируем этот пример.

**Пример 2.** Пусть $R_1 = F[[t]], R_2 = F[[s]]$, $F = k(x)$, $A$ – локализация $k[x]$ по идеалу, порожденному $x$, а $B$ – локализация $k[x]$ по идеалу, порождённому $1 + x$. Как в предыдущем примере рассмотрим кольцо $\Lambda_1$, порождённое $R_1$ и $a$ с соотношениями $aR_1a = 0, at = 0, ta = ax$, и кольцо $\Lambda_2$, порождённое $R_2$ и $b$ с соотношенииями $bR_2b = 0, bs = 0, sb = b(1 + x)$. Эти кольца локальны, их максимальные идеалы, которые мы обозначаем $J_1$ и $J_2$, были описаны выше. Следуя примеру 1, можно определить левые идеалы $I_{1,k}$ и $I_{2,k}$ при $k \geqslant 0$. Пусть $\Lambda$ – кольцо, порождённое $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ с соотношениями $J_1J_2 = J_2J_1 = 0$. Тогда $J = J_1 + J_2$ – единственный максимальный идеал в $\Lambda$. $I_{1,k}$ и $I_{2,k}$ оказываются левыми идеалами $\Lambda$. Пусть $H_1 = J_2 + I_{1,0}$, $H_2 = J_1 + I_{2,0}$. Тогда $\Lambda/H_i$ и $\Lambda_i/I_{i,0}$ изоморфны как $\Lambda_i$-модули, $i = 1, 2$. Поэтому $\Lambda$-модули $J/H_1$, $H_1/(H_1 \cap H_2) = J/H_2$ артиновы. Следовательно, $M = \Lambda/(H_1 \cap H_2)$ артинов. Он неразложим, поскольку $M/JM$ прост, однако эндоморфизмы, индуцированные умножением справа на $x$ и на $1 + x$, оба необратимы.

Эти два примера заставляют нас выдвинуть гипотезу, что в общем случае для артиновых модулей над локальным кольцом единственность разложения в прямую сумму неразложимых слагаемых может нарушаться.

Автор благодарит Анатолия Владимировича Яковлева за постановку задачи и Александра Ивановича Генералова за прочтение текста и ценные замечания, высказанные по ходу работы над ним.

## Литература


1. A. Facchini, D. Herbera, P. Vamos, and L. S. Levy, *Krull-Schmidt fails for Artinian modules.* — Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), 3587–3592.
2. Ф. Каш, *Модули и кольца.* Мир, М. (1981).
3. P. M. Cohn, *Cyclic artinian modules without a composition series.* — Bull. Lond. Math. Soc. (2) 55 (1997), 231–235.
4. R. B. Warfield, *A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules.* — Proc. Am. Math. Soc. **22** (1969), 460–465.


Pimenov K. I. A Krull–Schmidt Theorem for Artinian modules over local rings.

The article contains a generalization of Fitting's Lemma for Artinian modules of arbitrary length over some non-noetherian local rings. A counter-example to a strong form of Krull-Schmidt Theorem for Artinian modules over a local ring is constructed.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 декабря 1999 г.