Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

К. Брото, В. В. Вершинин

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ГОМОЛОГИЯХ АРТИНОВЫХ ГРУПП

Целью настоящей заметки является суммирование информации об обобщенных гомологиях групп, рассматриваемых как обобщения классических групп кос. Под такими обобщениями мы понимаем так называемые Артиновы группы и группы кос в телах с ручками.

Когомологии классических групп кос впервые появились в работах В. И. Арнольда [1, 2] и с тех пор изучались интенсивно (см. [5], например).

Г. Сегал установил следующую интересную связь между группой кос из бесконечного числа нитей и итерированными пространствами петель [11]. Пусть $\Omega^2_0 S^2$ есть связная компонента тривиальной петли в двукратном пространстве петель $\Omega^2 S^2$ и пусть $K(\mathrm{Br}_m, 1)$ обозначает классифицирующее пространство группы кос Br_m.

Теорема A. *Существует отображение $K(\mathrm{Br}_\infty, 1) \to \Omega^2_0 S^2$, которое индуцирует изоморфизм в гомологиях для любой группы коэффициентов G (с тривиальным действием Br_∞ на G):*

$$H_*(\mathrm{Br}_\infty, G) \cong H_*(\Omega^2_0 S^2, G).$$

В терминах аппроксимации Мэя $C_2 S^0$ [8] это может быть выражено в следующем виде.

Теорема A$'$. (i) $C_2 S^0 = \coprod_{i \geq 0} K(\mathrm{Br}_i, 1)$.

(ii) *Естественное отображение $C_2 S^0 \to \Omega^2 S^2$ является групповым пополнением.*

Когомологии групп кос $\mathrm{Br}(C_m)$ и $\mathrm{Br}(D_m)$ типов C и D были вычислены В. В. Горюновым [6, 7]. Д. Б. Фукс нашел в [9] аналоги теоремы Г. Сегала для групп кос типов C и D: плюс-конструкция Квиллена пространства $K(\mathrm{Br}(C_\infty), 1)$ эквивалентна

Работа частично поддержана INTAS. Второй автор поддержан также РФФИ (грант № 99-01-00574).

$\Omega^2 S^3 \times \Omega S^2$, а плюс-конструкция пространства $K(\mathrm{Br}(D_\infty), 1)$ эквивалентна $\Omega^2 S^3 \times S^3\{2\}$, где $S^3\{2\}$ есть гомотопический слой отображения степени 2 из S^3 в S^3.

Группа кос типа C может рассматриваться как группа кос в полнотории. Более общие объекты: группы кос в телах с ручками – изучались А. Б. Сосинским [12] и В. В. Вершининым [3–5], который доказал, в частности, аналог теоремы Г. Сегала для таких групп. А именно, плюс-конструкция Квиллена классифицирующего пространства группы кос из бесконечного числа нитей в теле с ручками рода g эквивалентна следующему произведению пространств петель над сферами

$$\mathrm{BBr}_\infty^g{}^+ \simeq \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2,$$

где число множителей в произведении равно роду g. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BBr}_\infty{}^+ & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BBr}_\infty^g{}^+ & \xrightarrow{\sim} & \Omega^2 S^3 \times \Omega S^2 \times \cdots \times \Omega S^2, \end{array}$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением классической группы кос в группу кос в теле с ручками, а правая стрелка является вложением множителя, коммутативна.

Пусть $K(n)_*(\,)$, $n = 1, 2, \ldots$, суть периодические K-теории Моравы. А. Ямагучи [13] изучал эти теории для пространств $\Omega^2 S^{2r+1}$ при $p \neq 2$ (если $p = 2$, то K-теории Моравы не коммутативны). Пусть $E(a, b, \ldots)$ обозначает внешнюю алгебру над $\mathbb{F}_p$ от образующих a, b, … и пусть $T_m(x, y, \ldots)$ обозначает срезанную алгебру многочленов высоты p^m над $\mathbb{F}_p$ от образующих x, y, … . Тогда результаты А. Ямагучи для $K(n)_*(\,)$ пространств $\Omega^2 S^3$ и $C_2 S^0$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема B. *Для простых* $p > 2$

$$\begin{aligned} &K(n)_*(\Omega^2 S^3) \cong K(n)_* \otimes E(x_0, \ldots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \ldots), \\ &K(n)_*(C_2 S^0) \cong K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[u] \otimes E(x_0, \ldots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \ldots) \end{aligned} \tag{1}$$

как $K(n)_*$*-алгебры, где* $\deg x_i = 2p^i - 1$, $\deg y_i = 2p^i - 2$, $\deg u = 0$.

Д. Равенел [10] описал аналогичным образом (с некоторой небольшой неопределенностью) гомологии Брауна–Петерсона пространств $\Omega^2 S^{2r+1}$. В случае пространства $\Omega^2 S^3$ это описание имеет вид:

Теорема C. *Для всех простых p*

$$\mathrm{BP}_*(\Omega^2 S^3) \cong \mathrm{BP}_* \otimes E(x_{(0)}) \otimes \mathbb{F}_p[y_{(1)}, y_{(2)}, \dots]/(\varrho_1, \varrho_2, \dots)$$

как BP_*-алгебра, где $\deg x_{(0)} = 1$, $\deg y_{(i)} = 2p^i - 2$ и

$$\varrho_i \equiv \sum_{0 \le j \le i} v_j y_{(i-j)}^{p^j} \mod I^2,$$

где v_j суть стандартные образующие кольца BP_*, $v_0 \text{г} p$ и $I = (p, v_1, v_2, \dots)$.

Нашей целью является доказательство аналогичных фактов для обобщений групп кос.

Теорема 1. *K-теория Моравы обобщенной группы кос $\mathrm{Br}(D_\infty)$ изоморфна K-теории Моравы классической группы кос из бесконечного числа нитей, и, таким образом, задается формулой (1). K-теория Моравы группы кос из бесконечного числа нитей в полнотории рода g задается формулой*

$$K(n)_*(\mathrm{Br}_\infty^g) \cong K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_g] \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots)$$

как $K(n)_*$-алгебра, где $\deg x_i = 2p^i - 1$, $\deg y_i = 2p^i - 2$, $\deg z_i = 1$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(n)_*(\mathrm{Br}_\infty) & \xrightarrow{\sim} & K(n)_* \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(n)_*(\mathrm{Br}_\infty^g) & \xrightarrow{\sim} & K(n)_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_g] \otimes E(x_0, \dots, x_n) \otimes T_n(y_1, y_2, \dots), \end{array} \qquad (2)$$

в которой левая стрелка индуцирована каноническим вложением классической группы кос в группу кос в теле с ручками, а правая стрелка является очевидным алгебраическим вложением, коммутативна.

Доказательство. Утверждение легко следует из формулы Кюннета для K-теории Моравы и того факта, что $\widetilde{K(n)}_*(S^3\{2\}) = 0$ при $p > 2$. $\square$

Перейдем теперь к гомологиям Брауна–Петерсона.

Теорема 2. *Теория гомологий Брауна–Петерсона обобщенной группы кос* $\mathrm{Br}(D_\infty)$ *при* $p > 2$ *изоморфна теории гомологий Брауна–Петерсона классической группы кос из бесконечного числа нитей, и, таким образом, задается формулой из теоремы C. Теория гомологий Брауна–Петерсона группы кос из бесконечного числа нитей в полнотории рода* g *задается следующим изоморфизмом*

$$\mathrm{BP}*(\mathrm{Br}_\infty^g) \cong \mathrm{BP}_* \otimes \mathbb{F}_p[z_1, \ldots, z_g] \otimes E(x_{(0)}) \otimes \mathbb{F}_p[y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots]/(\varrho_1, \varrho_2, \ldots)$$

BP_**-алгебр, где* $\deg x_{(0)} = 1$, $\deg y_{(i)} = 2p^i - 2$, *а* ϱ_i *такие же, как в теореме C. Справедлив также аналог диаграммы* (2).

Доказательство. Мы следуем идеям доказательства Д. Равенела [10]. Рассмотрим классическую спектральную последовательность Адамса, сходящуюся к

$$\pi_*(\mathrm{BP} \wedge ((\Omega S^2)^{\times g} \times \Omega^2 S^3)).$$

Ее член E_2 изоморфен

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}(H^*(\mathrm{BP} \wedge ((\Omega S^2)^{\times g} \times \Omega^2 S^3)), \mathbb{F}_p),$$

где $\mathcal{A}$ есть алгебра Стинрода $\mathrm{mod}\, p$, а гомологии рассматриваются с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$. Рассмотрим гомотопическое разложение в прямое произведение

$$\Omega S^2 \simeq S^1 \times \Omega S^3,$$

а также стабильное расщепление

$$\Omega S^3 \simeq \bigvee_{j=1}^{\infty} S^{2j}.$$

Эти расщепления ведут к утверждению, что рассматриваемая спектральная последовательность Адамса, начиная с члена E_2, расщепляется в букет спектральных последовательностей Адамса, сходящихся к

$$\pi_*(\mathrm{BP} \wedge (\Omega^2 S^3)).$$

Эта спектральная последовательность была исследована Д. Равенелом [10], который доказал, используя расщепление Снэйта пространства $\Omega^2 S^3$, что ее дифференциалы тривиальны, и получил структуру BP_*-модуля $\mathrm{BP}_*(\Omega^2 S^3)$, описанную в теореме C. Наш результат теперь следует из этих рассмотрений. □

Определим весовую функцию w на модуле $K(n)_*(C_2S^0)$, описанном в теореме B. Сопоставим следующие веса мономам от u, x_i и y_j по формулам $w(u) = 1$, $w(x_i) = 2p^i$, $w(y_j) = 2p^j$ и $w(v_n^k ab) = w(a) + w(b)$.

Теорема 3. *Приведенная K-теория Моравы $\widetilde{K(n)}_*(\mathrm{Br}(C_m))$ обобщенной группы кос типа C_m изоморфна $K(n)_*$-подмодулю модуля $K(n)_*(C_2S^0)$, порожденному мономами от u, x_i и y_j веса меньшего или равного m.*

Доказательство. Результат немедленно следует из аналогичного факта для классических кос [13] и конструкции классифицирующего пространства для группы кос типа C, данной в [6, 7]. $\square$

Литература

1. В. И. Арнольдь, *О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций.* — Тр. Моск. Мат. Общ. **21** (1970), 27–46.
2. В. И. Арнольдь, *Топологические инварианты алгебраических функций II.* — Функц. анал. и его прил. **4**, № 2 (1970), 1–9.
3. В. В. Вершинин, *Обобщения кос с гомологической точки зрения.* — В кн.: Алгебра, Геометрия, Анализ и Матем. Физика. 10-я Сибирская школа. Новосибирск: ИМ. с. 40–62.
4. В. В. Вершинин, *О группах кос в телах с ручками.* — Сиб. мат. журн. **39**, № 4 (1998), 755–764.
5. В. В. Вершинин, *Группы кос и пространства петель.* — Успехи мат. наук **54**, № 2 (1998), 3–84.
6. В. В. Горюнов, *Когомологии групп кос серий C и D и некоторые стратификации.* — Функц. анал. и его прил. **12**, № 2 (1978), 76–77.
7. В. В. Горюнов, *Когомологии групп кос серий C и D.* — Тр. Моск. Мат. Общ. **42** (1981), 234–242.
8. Дж. П. Мэй, *Геометрия итерированных пространств петель.* — В кн.: Дополнение к книге: Дж. Бордман, Р. Фогт Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. Мир, М. (1977).
9. Д. Б. Фукс, *Квилленизация и бордизмы.* — Функц. анал. и его прил. **8**, № 1 (1974), 36–42.
10. D. Ravenel, *The homology and Morava K-theory of $\Omega^2 SU(n)$.* — Forum Math. **5** no. 1 (1993), 1–21.
11. G. B. Segal, *Configuration spaces and iterated loop spaces.* — Invent. Math. **21** (1973), 213–221.
12. A. B. Sossinsky, *Preparation theorems for isotopy invariants of links in 3-manifolds.* — Quantum Groups, Proceedings, Lect. Notes in Math. **1510** (1992), 354–362, Berlin, Springer-Verlag.

13. A. Yamaguchi, *Morava K-theory of double loop spaces of spheres.* — Math. Z. **199** no. 4 (1988), 511–523.

Broto K., Vershinin V. V. On Generalized homology of Artin groups.

The Morava K-theory and the Brown–Peterson homology of groups related to classical braid groups are calculated. Such groups are the Artin groups and braid groups in handlebodies.

Departament de Matematiques,
Universitat Autonoma de Barcelona,
Campus UAB, Edifici Cc,
Bellaterra, 08193, Spain
Email broto@mat.uab.es

Поступило 10 октября 1999 г.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, 630090, Россия
Email versh@math.nsk.su