Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

А. И. Буфетов

КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ГРУППОВЫХ ДЕЙСТВИЙ

1. Введение

Пусть $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ – вероятностное пространство, и пусть измеримые отображения $T_1, \ldots, T_m : X \to X$ сохраняют меру ν. Иными словами, задано действие свободной полугруппы с m образующими на пространстве $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ сохраняющими меру отображениями. Для таких действий в этой работе получены новые эргодические теоремы.

Если для действия свободной группы усреднять сдвиги функции элементами группы по шарам возрастающего радиуса в группе, то полученная последовательность, вообще говоря, не будет сходиться ни поточечно, ни в среднем (см. [5]). Какутани [3] предложил другой способ усреднения, основанный на эргодической теореме в косых произведениях Питта [4], и на этом пути в 1965 году В. И. Оселедец [2] получил первые эргодические теоремы для действий произвольных счетных групп.

Метод Какутани и Оселедца вкратце таков. На группе вводится вероятностное распределение, затем рассматривается последовательность независимых случайных величин, принимающих значения в группе и имеющих данное распределение. Групповому действию на пространстве Лебега сохраняющими меру преобразованиями сопоставляется косое произведение над пространством траекторий этого случайного процесса с действующим на нем сдвигом по времени. Далее, эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина интегрируется вдоль базы косого произведения – и получается эргодическая теорема для исходного группового действия.

В настоящей работе используется несколько иной подход. В полугруппе или группе выделяется конечная система образую-

Работа была частично поддержана грантом РФФИ 98-01-00455, а также грантом INTAS 93-570-ext.

щих и рассматривается пространство односторонних бесконечных последовательностей из этих образующих с тихоновской топологией. Борелева вероятностная инвариантная относительно сдвига мера μ на этом пространстве выбирается произвольно. Действию полугруппы ставится в соответствие косое произведение над сдвигом на нашем пространстве последовательностей, снабженном мерой μ. Потом опять эргодические теоремы Биркгофа–Хинчина интегрируются вдоль базы косого произведения – и получаются эргодические теоремы для исходного полугруппового или группового действия. Временные средние отображений $T_1, \dots, T_m$, полученные при усреднении с помощью меры μ, обозначаются $C_n^{\mu}(T)$.

Если мера μ произвольна, то автору неизвестны условия того, что предел временных средних инвариантен относительно полугруппового действия.

Однако если мера μ – марковская, то в работе даны достаточные условия, при выполнении которых для произвольной функции φ временные средние $C_n^{\mu}(T)\varphi$ сходятся к инвариантной функции (теорема 3).

Работа построена следующим образом. В §2 описан способ составления временных средних $C_n^{\mu}(T)$ и сформулирована эргодическая теорема 1 для таких средних, в §3 введены косые произведения, соответствующие полугрупповым действиям, и доказана теорема 1. В §4 обсуждаются два способа составления временных средних, и как они сводятся друг к другу "обращением времени". В §5 обсуждается усреднение с помощью марковских мер и формулируется эргодическая теорема 2. В §6 дается критерий эргодичности косых произведений, введенных в §3, с марковской мерой в базе.

В §7 эргодическая теорема 2 применяется для получения эргодических теорем для действий локально свободных полугрупп и групп.

Я глубоко признателен Д. В. Аносову, А. М. Вершику, Р. И. Григорчуку, М. Л. Громову, Б. М. Гуревичу, Ю. С. Ильяшенко, В. И. Оселедцу, Я. Г. Синаю, В. А. Тиморину, Ж.-П. Тувено, Дж. Фельдману и А. Ю. Фишкину за полезные обсуждения.

2. Временные средние для действий свободных полугрупп

Обозначим через Ω_m пространство всех односторонних бесконечных последовательностей из символов $1, \ldots, m$:

$$\Omega_m = \{\omega = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n\ldots | \omega_i = 1, \ldots, m\}.$$

Введем на Ω_m стандартную тихоновскую топологию. В этой топологии наше пространство компактно и метризуемо. Метрика может быть задана, например, формулой $d(\omega, \omega') = 2^{-k}$, где $k = \inf\{n \,|\, \omega_n \neq \omega'_n\}$. Обозначим через σ_m сдвиг на $\Omega_m : (\sigma_m\omega)_i = \omega_{i+1}$.

Нам понадобится также множество W_m всех конечных слов, составленных из символов $1, \ldots, m$:

$$W_m = \{w = w_1 w_2 \ldots w_n \,|\, w_i = 1, \ldots, m\}.$$

Заметим, что относительно операции приписывания слов друг к другу множество W_m образует свободную полугруппу с образующими $1, \ldots, m$. Через $|w|$ будем обозначать длину слова w.

Обозначим через $C(w)$ множество всех последовательностей, начинающихся словом w.

Пусть μ – произвольная борелева вероятностная σ_m-инвариантная мера на Ω_m. Для всякого $w \in W_m$ обозначим $\mu(w) = \mu(C(w))$.

Для всякого $w \in W_m$, $w = w_1 \ldots w_n$, определим отображение $T_w : X \to X$ формулой

$$T_w = T_{w_n} \ldots T_{w_1}.$$

Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ – измеримая функция. Обозначим

$$S_j^\mu(T)\varphi = \sum_{|w|=j} \mu(w)\varphi \circ T_w. \tag{1}$$

Теперь усредним $S_j^\mu(T)$ по $j = 0, \ldots, n-1$:

$$C_n^\mu(T)\varphi = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} S_j^\mu(T)\varphi. \tag{2}$$

Величины $C_n^\mu(T)\varphi$ – аналоги временных средних функции φ в случае нескольких отображений. Для них имеет место аналог эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина, к изложению которого мы и переходим. Напомним, что запись $\varphi \in L\log L(X, \nu)$ означает, что $|\varphi|\log|\varphi| \in L_1(X, \nu)$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L_1(X,\nu)$. Найдется функция $\overline{\varphi} \in L_1(X,\nu)$, такая что $C_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ в $L_1(X,\nu)$, причем $\int_X \varphi = \int_X \overline{\varphi}$. Если $\varphi \in L\log L(X,\nu)$, то $C_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ ν-почти всюду.*

Автору кажется, что условие $\varphi \in L\log L$ избыточно в теореме 1, и что поточечная сходимость временных средних имеет место для любой $\varphi \in L_1(X,\nu)$. Однако приводимое ниже доказательство использует теорему Винера о мажорируемой сходимости временных средних и действует, тем самым, только для $\varphi \in L\log L$.

3. Косые произведения и доказательство теоремы 1

Сопоставим динамической системе $(X,\mathcal{B}_X,\nu,T_1,\dots,T_m)$ отображение $T:\Omega_m\times X\to\Omega_m\times X$, заданное формулой

$$T(\omega,x)=(\sigma_m\omega,T_{\omega_1}x) \tag{3}$$

(здесь $T_{\omega_1}=T_1$, если $\omega_1=1,\dots,T_{\omega_1}=T_m$, если $\omega_1=m$).

Пусть $\mathcal{B}_\Omega$ означает борелевскую σ-алгебру на Ω_m. Легко видеть, что отображение T измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_\Omega\times\mathcal{B}_X$ на пространстве $\Omega_m\times X$. Далее, пусть μ – произвольная борелева вероятностная σ_m-инвариантная мера на Ω_m. Легко видеть, что отображение T сохраняет вероятностную меру $\mu\times\nu$ на пространстве $\Omega_m\times X$.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру на пространстве Ω_m, порожденную множествами $C(w)$, $|w|=n$ (в частности, $\mathcal{F}_0$ – тривиальная σ-алгебра); пусть $\mathcal{A}_n=\mathcal{F}_n\times\mathcal{B}_X$. Легко видеть, что $\cup_{n=1}^\infty\mathcal{A}_n=\mathcal{B}_\Omega\times\mathcal{B}_X$.

Для произвольной $\varphi:X\to\mathbb{R}$ через φ^e будем обозначать функцию на пространстве $(\Omega_m\times X,\mu\times\nu)$, определенную формулой $\varphi^e(\omega,x)=\varphi(x)$. Легко видеть, что если $\varphi\in L_1(X,\nu)$, то $\varphi^e\in L_1(\Omega_m\times X,\mu\times\nu)$.

Предложение 1. *Пусть $w\in W_m$, $|w|=j$, $\omega\in C(w)$, $x\in X$. Тогда*

$$T^j(\omega,x)=(\sigma_m^j\omega,T_wx)$$

и, следовательно, $\varphi^e\circ T^j(\omega,x)=\varphi(T_wx)$.

Следствие 1. *При почти всяком $x\in X$*

$$\int\limits_{\Omega_m}\varphi^e\circ T^j(\omega,x)\,d\mu(\omega)=\sum_{|w|=j}\mu(w)\varphi\circ T_w(x).$$

Пусть $\varphi_n^e = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi^e \circ T^j$ – n-е временное среднее функции φ^e.

Предложение 2. *При почти всяком* $x \in X$

$$\int\limits_{\Omega_m} \varphi_n^e(\omega, x) d\mu(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|w|=j} \mu(w)\varphi \circ T_w(x).$$

Итак,

$$C_n^\mu(T)\varphi(x) = \int\limits_{\Omega_m} \varphi_n^e(\omega, x) d\mu(\omega).$$

Иными словами, $(C_n^\mu(T)\varphi)^e = E(\varphi_n^e|\mathcal{A}_0)$. Согласно эргодической теореме Биркгофа–Хинчина, последовательность функций φ_n^e сходится $\mu \times \nu$-почти всюду и в $L_1(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$ при $n \to \infty$. В силу стандартных свойств условных математических ожиданий (см., например, [16], стр. 232), последовательность функций $C_n^\mu(T)\varphi$ сходится в $L_1(X, \nu)$ при $n \to \infty$ к некоторой предельной функции $\overline{\varphi}$. Из равенства $\int_X C_n^\mu(T)\varphi d\nu = \int_X \varphi d\nu$ теперь следует равенство $\int_X \overline{\varphi} d\nu = \int_X \varphi d\nu$. Далее, если $\sup_n |\varphi_n^e| \in L_1(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$, то, по теореме о мажорируемой сходимости условных математических ожиданий, $C_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ также и ν-почти всюду при $n \to \infty$. По теореме Винера о мажорируемой сходимости временных средних, $\sup_n |\varphi_n^e| \in L_1(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$ если и только если $\varphi^e \in L\log L(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$, а это имеет место в том и только в том случае, когда $\varphi \in L \log L(X, \nu)$. Теорема доказана.

4. Два способа составления временных средних

Каждому отображению T_i поставим в соответствие оператор $U_i : L_1(X, \nu) \to L_1(X, \nu)$, заданный формулой $U_i\varphi = \varphi \circ T_i$.

Пусть $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$. Введем оператор $U_w = U_{w_n} \dots U_{w_1}$. Рассмотрим слово $w^* = w_n \dots w_1$. Легко видеть, что $U^w\varphi = \varphi \circ T_{w^*}$.

Наряду со средними $C_n^\mu(T)$, определенными формулой (2), можно рассмотреть средние

$$c_n^\mu(T) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|w|=j} \mu(w) U_w\varphi.$$

Покажем, как средние $C_n^\mu(T)$ и $c_n^\mu(T)$ сводятся друг к другу.

Предложение 3. *Пусть μ – борелева вероятностная σ_m-инвариантная мера на Ω_m. Существует и единственна борелева σ_m-инвариантная мера μ^* на Ω_m, такая что при всех $w \in W_m$ выполнено $\mu^*(w) = \mu(w^*)$.*

Доказательство. Единственность очевидна, докажем существование. Рассмотрим пространство Ξ_m бесконечных двусторонних последовательностей из символов $\{1, \ldots, m\}$:

$$\Xi_m = \{\xi = \ldots \xi_{-n} \ldots \xi_{-1}\xi_0\xi_1 \ldots \xi_n \ldots, \xi_i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Сдвиг на Ξ_m обозначим через σ. Определим отображения $\pi^+, \pi^- : \Xi_m \to \Omega_m$ формулами

$$\pi^+(\xi) = \xi_0\xi_1 \ldots \xi_n \ldots; \quad \pi^-(\xi) = \xi_0\xi_{-1} \ldots \xi_{-n} \ldots.$$

Легко видеть, что для всякой борелевой вероятностной σ_m-инвариантной меры на Ω_m существует единственная борелева вероятностная σ-инвариантная мера η на Ξ, $\pi^+_*\eta = \mu$. Легко видеть, что мера $\pi^-_*\eta$ и есть искомая μ^*, и предложение доказано.

Из определения меры μ^* легко видеть, что $\mu^{**} = \mu$, а $\mu^*(w^*) = \mu(w)$.

Предложение 4. $C_n^\mu(T) = c_n^{\mu^*}(T)$.

Действительно, в силу формулы $T_w\varphi = \varphi \circ T_{w^*}$,

$$\sum_{|w|=n} \mu(w)T_w\varphi = \sum_{|w|=n} \mu(w)\varphi \circ T_{w^*} =$$
$$= \sum_{|w|=n} \mu^*(w^*)T_{w^*} = \sum_{|w|=n} \mu^*(w)\varphi \circ T_w.$$

5. Усреднение с помощью марковских мер

Пусть μ – σ_m-инвариантная марковская мера на Ω_m с начальным распределением $(p_1, \ldots, p_m)$ и матрицей переходных вероятностей $A = (a_{ij})$, отвечающая которой цепь неприводима, в частности, $p_i > 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$.

Предложение 5. *Мера μ^* – марковская с тем же начальным распределением $(p_1, \ldots, p_m)$ и с матрицей переходных вероятностей $A^* = (a^*_{ij})$, определяемой формулой*

$$a^*_{ij} = \frac{p_j a_{ji}}{p_i}.$$

Доказательство. Действительно, при всяком $w = w_1 \dots w_n$ имеем

$$\mu(w^*) = \mu(w_n \dots w_{n-1}) = p_{w_n} a_{w_n w_{n-1}} \dots a_{w_2 w_1} =$$
$$= p_{w_1}\Big(\frac{p_{w_1} a_{w_1 w_2}}{p_{w_2}}\Big) \dots \Big(\frac{p_{w_{n-1}} a_{w_{n-1} w_n}}{p_{w_n}}\Big) = p_{w_1} a^*_{w_1 w_2} \dots a^*_{w_{n-1} w_n},$$

что и требовалось.

Сопоставим нашей мере μ неориентированный граф Γ_μ ц множеством вершин $\{1, \dots, m\}$, в котором вершины i и j соединены ребром, если найдется такое $k \in \{1, \dots, m\}$, что $a_{ik} > 0$, $a_{jk} > 0$.

Определение. *Марковскую меру μ на Ω_m будем называть сильно связной, если отвечающая ей цепь неприводима, а граф Γ_μ связен. Меру μ будем называть сильно связной*, если мера μ^* сильно связна.*

Напомним, что цепь Маркова с переходной матрицей A называется *эргодичной*, если при некотором n_0 все элементы матрицы A^{n_0} положительны.

Предложение 6. *Цепь Маркова, отвечающая сильно связной марковской мере, эргодична.*

Доказательство. Разобьем множество состояний $\{1, \dots, m\}$ нашей неприводимой марковской цепи на регулярные классы $C_1, \dots, C_l$. Тогда для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ если $i \in C_r$ и $a_{ij} > 0$, то $j \in C_{r+1}$ (здесь $C_{l+1} = C_1$). Из определения графа Γ_μ и классов C_r видно, что если состояния i, j соединены ребром в графе Γ_μ, то они лежат в одном и том же классе. Если граф Γ_μ связен, то $l = 1$, а это и означает, что цепь эргодична.

Предложение 7. *Пусть матрица A такова, что для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ из того, что $a_{ij} > 0$, следует, что $a_{ji} > 0$. Тогда мера μ сильно связна если и только если она эргодична.*

Доказательство. В силу предыдущего предложения, достаточно из эргодичности вывести сильную связность. Итак, пусть n таково, что все элементы матрицы A^n положительны. Тогда то же верно и для матрицы A^{2n}, а это значит, что для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ найдутся такие $i_1, i_2, \dots, i_{2n-1} \in \{1, \dots, m\}$, что $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{2n-1} j} > 0$, то есть все $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_{2n-1} j} > 0$, откуда $a_{i_1 i}, a_{i_2 i_1}, \dots, a_{j i_{2n-1}} > 0$. Отсюда видно, что в графе Γ_μ соединены ребром вершины i и i_2, i_2 и i_4, ..., i_{2n-2} и j, то есть существует путь в этом графе, соединяющий i и j. Итак, граф Γ_μ связен, и предложение доказано.

Пусть, как и раньше, $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ – вероятностное пространство, а измеримые отображения $T_1, \dots, T_m : X \to X$ сохраняют меру ν. Отображениям $T_1, \dots, T_m$ и марковской мере μ на пространстве последовательностей поставим в соответствие оператор $T_\mu : L_1(X,\nu)^m \to L_1(X,\nu)^m$, действующий по формуле $T_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$, где

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i a_{ij}}{p_j} \varphi_i \circ T_j. \tag{4}$$

Рассмотрим, кроме того, оператор $A_\mu : L_1(X,\nu)^m \to L_1(X,\nu)^m$, действующий по формуле $A_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$, где

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varphi_i \circ T_j. \tag{5}$$

В силу предложения 5, получаем очевидное

Предложение 8. $T_\mu = A_{\mu^*}$. $A_\mu = T_{\mu^*}$.

Теорема 2. *Пусть μ – σ_m-инвариантная марковская мера на Ω_m.*
Пусть $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ – вероятностное пространство, $T_1, \dots, T_m : X \to X$ – измеримые отображения, сохраняющие меру μ. Тогда для всякой $\varphi \in L_1(X,\nu)$ найдется функция $\overline{\varphi} \in L_1(X,\nu)$, такая что $c_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ ν-почти всюду и в $L_1(X,\nu)$.
Если мера μ сильно связна, то $\overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ T_i$, $i = 1, \dots, m$.
Если $p > 1$ и $\varphi \in L_p(X,\nu)$, то $c_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ также и в L_p.

Эта теорема обобщает эргодические теоремы Григорчука [8, 9] и Нево–Стайна [10] для действий свободных полугрупп и групп. Теорема 2 была в слегка ином виде анонсирована в работе автора [17]; ее доказательство планируется вскоре опубликовать в Функциональном Анализе и Приложениях. Ключевую роль в доказательстве играет следующая

Лемма 1. *Пусть μ – σ_m-инвариантная марковская мера на Ω_m. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_1(X,\nu)$ таковы, что*

$$T_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

Если мера μ сильно связна, то $\varphi_1 = \dots = \varphi_m = \varphi$ и $\varphi = \varphi \circ T_i$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Заменяя в теореме 2 меру μ на μ^*, получаем аналогичную эргодическую теорему для средних $C_n^\mu(T)$.

Теорема 3. *Пусть μ – σ_m-инвариантная марковская мера на Ω_m.*

Пусть $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ – вероятностное пространство, $T_1, \dots, T_m : X \to X$ – измеримые отображения, сохраняющие меру μ. Тогда для всякой $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\overline{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая что $C_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ ν-почти всюду и в $L_1(X, \nu)$.

Если мера μ сильно связна, то $\overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ T_i$, $i = 1, \dots, m$.*

Если $p > 1$ и $\varphi \in L_p(X, \nu)$, то $C_n^\mu(T)\varphi \to \overline{\varphi}$ также и в L_p.

6. Эргодичность косых произведений

В этом параграфе дан критерий эргодичности косых произведений вида (3) с марковской мерой в базе. Аналогичный результат для мер Бернулли принадлежит Какутани [3] и изложен, например, в [12].

Оператор A_μ, введенный в предыдущем параграфе, будем называть эргодичным, если для всяких $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_1(X, \nu)$ из того, что $A_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, следует, что $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = const$ почти всюду.

Теорема 4. *Отображение (3) с марковской мерой μ в базе эргодично если и только если оператор A_μ эргодичен.*

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in L_1(\Omega_m \times X, \mu \times \nu)$. Положим*

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{p_i} \int\limits_{C(i)} \varphi(\omega, x) d\mu, \quad \psi_i(x) = \frac{1}{p_i} \int\limits_{C(i)} \varphi \circ T(\omega, x) d\mu, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда $(\psi_1, \dots, \psi_m) = A_\mu(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

Доказательство. Для всякого $i = 1, \dots, m$, определим меру μ_i на Ω_m равенством $\mu_i(w) = \mu(iw)$ при всех $w \in W_m$.

Предложение 9. *Для любого $w \in C(j)$ имеем $\mu_i(w) = \frac{p_i a_{ij}}{p_j} \mu(w)$.*

Доказательство. Пусть $w \in C(j)$, $w = j w_2 \dots w_n$. Тогда

$$\mu_i(w) = \mu(i j w_2 \dots w_n) = p_i a_{ij} a_{j w_2} \dots a_{w_{n-1} w_n} = \frac{p_i a_{ij}}{p_j} \mu(w),$$

и предложение доказано.

Вернемся к доказательству леммы 2. Имеем

$$\psi_i(x) = \frac{1}{p_i}\int\limits_{C(i)} \varphi\circ T(\omega,x)d\mu =$$
$$= \frac{1}{p_i}\int\limits_{C(i)} \varphi(\sigma_m\omega, T_ix)d\mu =$$
$$= \frac{1}{p_i}\int\limits_{\Omega_m} \varphi(\omega, T_ix)d\mu_i = \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{C(j)} \varphi(\omega, T_ix)d\mu_i =$$
$$= \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{C(j)} \frac{p_ia_{ij}}{p_j}\varphi(\omega, T_ix)d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\varphi_j\circ T_i.$$

Итак, $(\psi_1,\ldots,\psi_m) = A_\mu(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$, и лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 4. Докажем сперва, что если отображение T, определенное формулой (3), эргодично, то и оператор A_μ эргодичен. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in L_1(X,\nu)$ таковы, что $A_\mu(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$. Определим функцию $\varphi\in L_1(\Omega_m\times X,\mu\times\nu)$ формулой $\varphi(\omega,x)=\varphi_{\omega_1}(x)$. Из леммы 2 легко следует, что $\varphi\circ T=\varphi$, а значит, φ постоянно почти всюду, откуда $\varphi_1 = \varphi_2=\cdots=\varphi_m = const$, то есть оператор A_μ эргодичен.

Теперь, обратно, предположим, что оператор A_μ эргодичен, и покажем, что отображение T эргодично. Пусть функция $\varphi\in L_1(\Omega_m\times X,\mu\times\nu)$ такова, что $\varphi\circ T=\varphi$. Положим $\varphi_i = \frac{1}{p_i}\int_{C(i)}\varphi d\mu$.

Предложение 10. *$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_m=\int_{\Omega_m\times X}\varphi d\mu d\nu$.*

Действительно, согласно лемме 2, имеем $A_\mu(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$, откуда, в силу эргодичности оператора A_μ, следует предложение.

Теперь пусть $i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,m\}$. Положим

$$\varphi_{i_1\ldots i_k} = \frac{1}{\mu(i_1\ldots i_k)}\int\limits_{C(i_1\ldots i_k)}\varphi d\mu.$$

Лемма 3. *Пусть $k \geq 2$. Тогда $\varphi_{i_1 \dots i_k} = T_{i_1} \varphi_{i_2 \dots i_k}$.*

Доказательство. В силу равенства $\varphi = \varphi \circ T$, имеем

$$\varphi_{i_1 \dots i_k}(x) = \frac{1}{\mu(i_1 \dots i_k)} \int\limits_{C(i_1 \dots i_k)} \varphi(\sigma_m \omega, T_{i_1} x) d\mu =$$

$$= \frac{1}{\mu(i_1 \dots i_k)} \int\limits_{C(i_2 \dots i_k)} \varphi(\omega, T_{i_1} x) d\mu_{i_1} =$$

$$= \frac{1}{\mu(i_1 \dots i_k)} \int\limits_{C(i_2 \dots i_k)} \varphi(\omega, T_{i_1} x) d\mu_{i_1} =$$

$$= \frac{1}{\mu(i_1 \dots i_k)} \int\limits_{C(i_2 \dots i_k)} \frac{p_{i_1} a_{i_1 i_2}}{p_{i_2}} \varphi(\omega, T_{i_1} x) d\mu =$$

$$= \frac{1}{\mu(i_2 \dots i_k)} \int\limits_{C(i_2 \dots i_k)} \varphi(\omega, T_{i_1} x) d\mu = T_{i_1} \varphi_{i_2 \dots i_k}.$$

Лемма доказана.

Из предложения 10 и леммы 3 видно, что если $\mathcal{A}_n$ – σ-алгебры, введенные в §3, то $E(\varphi|\mathcal{A}_n) = \int_{\Omega_m \times X} \varphi d\mu d\nu$, и, так как $E(\varphi|\mathcal{A}_n) \to \varphi$ при $n \to \infty$, получаем, что $\varphi = \int_{\Omega_m \times X} \varphi d\mu d\nu$, что и требовалось доказать.

Действие полугруппы, порожденной отображениями $T_1, \dots, T_m$, будем называть эргодичным по отношению к мере ν, если всякая $\varphi \in L_1(X, \nu)$, удовлетворяющая условию $\varphi = \varphi \circ T_i$ при всех $i = 1, \dots, m$, постоянна ν-почти всюду.

Из теоремы 4 и леммы 1 следует

Теорема 5. *Пусть μ – сильно связная* марковская мера.*

Пусть $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ – вероятностное пространство, $T_1, \dots, T_m : X \to X$ – измеримые отображения, сохраняющие меру μ.

Тогда мера $\mu \times \nu$ эргодична для отображения косого произведения T, определенного формулой (3), если и только если полугрупповое действие $(T_1, \dots, T_m)$ эргодично по отношению к мере ν.

7. Эргодические теоремы для действий локально свободных полугрупп и групп

Теорема 2 может быть применена к действиям некоторых полугрупп с соотношениями. В этом параграфе это проиллюстрировано на примере локально свободных полугрупп и групп. Локально свободные полугруппы и группы (а также более общие локальные группы) введены Вершиком в [7] и изучены в работах [7, 6].

Напомним (цм. [6, 7]), что *локально свободной группой* $\mathcal{LF}_{m+1}$ с m образующими $\{g_1, \ldots, g_m\}$ называется группа, определенная соотношениями $g_i g_j = g_j g_i$ при всех $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, таких что $|i-j| > 1$. Аналогичным образом определяется и *локально свободная полугруппа* $\mathcal{LFS}_{m+1}$ с m образующими. Немного необычное обозначение – группа с m образующими занумерована индексом $m+1$ – диктуется аналогией с группами кос, для которых приняты такие же обозначения; локально свободные группы, как показали А. М. Вершик, С. Нечаев и Р. Бикбов [6], тесно связаны с группами кос: с одной стороны, группы кос, очевидно, факторы соответствующих локально свободных, а с другой стороны, всякая локально свободная группа есть подгруппа группы кос с тем же числом образующих.

Рассмотрим также *циклически локально свободную группу* $\mathcal{CLF}_{m+1}$ с m образующими $\{g_1, \ldots, g_m\}$, определенную соотношениями $g_i g_j = g_j g_i$ при всех $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, таких что $|i-j| \neq 1 \pmod m$. Аналогично определяется и *циклически локально свободная полугруппа* $\mathcal{CLFS}_{m+1}$ с m образующими.

Различие между группами $\mathcal{LF}_{m+1}$ и $\mathcal{CLF}_{m+1}$ состоит в том, что в группе $\mathcal{LF}_{m+1}$ образующие g_1 и g_m образуют свободную группу, а в группе $\mathcal{CLF}_{m+1}$ эти образующие коммутируют. Тем самым, группа $\mathcal{CLF}_{m+1}$ есть фактор $\mathcal{LF}_{m+1}$. Группа $\mathcal{CLF}_{m+1}$ удобнее своей бо́льшей симметрией: всякая циклическая перестановка ее образующих продолжается до автоморфизма группы.

Поставим полугруппе $\mathcal{LFS}_{m+1}$ в соответствие топологическую цепь Маркова с множеством состояний $\{1, \ldots, m\}$ и матрицей переходов $M = (m_{ij})$, где $m_{ij} = 1$, если $|i-j| \leq 1$ или если $i \leq j$, и $m_{ij} = 0$ в противном случае. Множество допустимых слов нашей цепи обозначим W_M; множество допустимых односторонних бесконечных последовательностей – Ω_M; сдвиг на Ω_M обозначим σ_M. Для всякого допустимого слова $w = w_1 \ldots w_n$ обозначим $g_w = g_{w_1} \ldots g_{w_n}$. Легко видеть, что соответствие $w \to g_w$ определяет биекцию между W_M и полугруппой $\mathcal{LFS}_{m+1}$. Далее, легко видеть, что у матрицы M^m все элементы положительны, а значит, динамическая система (Ω_M, σ_M) обладает топологическим перемешиванием. Отсюда следует существование борелевой вероятностной σ_M-инвариантной марковской меры μ, такой что $\mu(w) > 0$ для всех $w \in W_M$ и только для них (например, такова мера Парри). Каскад $(\Omega_M, \sigma_M, \mu)$ тогда обладает метрическим перемешиванием, более того, легко видеть, что мера μ сильно связна (для доказательства достаточно заметить, что граф Γ_μ полностью определяется матрицей M). Теперь предположим, что полугруппа $\mathcal{LFS}_{m+1}$ действует на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{B}_X, \nu)$ сохраняющими меру отображениями. Пусть образующему g_i соответствует отображение T_i. Применяя теорему 2 к отображениям $T_1, \dots, T_m$ и мере μ, получаем эргодическую теорему для действия полугруппы $\mathcal{LFS}_{m+1}$.

Аналогичная конструкция позволяет получить эргодические теоремы для действий группы $\mathcal{LF}_{m+1}$, а именно, множество состояний топологической цепи Маркова, ей соответствующей, есть $\{1, \dots, 2m\}$, где состояния $1, \dots, m$ соответствуют образующим $g_1, \dots, g_m$, а состояния $m+1, \dots, 2m$ – их обратным $g_1^{-1}, \dots, g_m^{-1}$. Матрица перехода $N = (n_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, 2m\}$, определяется так: $n_{ij} = 1$, если $|i-j| = 1$ или $m+1$, а также если $i < j$, но $|i-j| \neq m$; $n_{ij} = 0$ в противном случае. Опять соответствие $w \to g_w$ задает биекцию между множеством допустимых слов в нашей цепи и группой $\mathcal{LF}_{m+1}$. Топологическая цепь Маркова с матрицей N обладает топологическим перемешиванием, поэтому на множестве допустимых последовательностей можно определить стационарную марковскую меру, по отношению к которой все допустимые слова имеют положительную вероятность, и которая поэтому будет сильно связной. Образуя временные средние с помощью этой меры, получаем эргодические теоремы для действий локально свободных групп.

Случай циклически локально свободных полугрупп и групп мало чем отличается.

Для полугруппы $\mathcal{CLFS}_{m+1}$ множество состояний соответствующей цепи Маркова есть $\{1, \dots, m\}$, а матрица переходов $Q = (q_{ij})$ определяется так: $q_{ij} = 1$, если $|i-j| = 1 \pmod m$ или если $i \leq j$, и $q_{ij} = 0$ в противном случае. Для группы $\mathcal{CLF}_{m+1}$ множество состояний цепи есть $\{1, \dots, 2m\}$, а матрица $R = (r_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, 2m\}$, определяется так: $r_{ij} = 1$, если $|i-j| = 1 \pmod m$, а также если $i < j$, но $|i-j| \neq m$; $n_{ij} = 0$ в противном случае. В обоих случаях соответствие $w \to g_w$ определяет биекцию между множеством допустимых слов марковской цепи и (полу)группой; в обоих случаях на допустимых последовательностях цепи может быть введена стационарная сильно связная мера, образуя временные средние с помощью которой, получаем эргодические теоремы для действий циклически локально свободных полугрупп и групп.

Для циклически локально свободных полугрупп и групп с нечетным числом образующих можно получить наиболее симметричные теоремы.

Рассмотрим сперва случай полугруппы $\mathcal{CLFS}_{2m+2}$ с образующими $\{g_1, \ldots, g_{2m+1}\}$. Для всякого $g \in \mathcal{CLFS}_{2m+2}$ обозначим через $|g|$ длину его кратчайшей записи как слова в алфавите $\{g_1, \ldots, g_{2m+1}\}$. Пусть N_j – число элементов длины j в $\mathcal{CLFS}_{2m+2}$.

Теорема 6. *Пусть полугруппа $\mathcal{CLFS}_{2m+2}$ действует на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{B}_X, \nu\}$ отображениями, сохраняющими меру ν. Пусть T_g – отображение, соответствующее элементу $g \in \mathcal{CLFS}_{2m+2}$. Тогда для всякой $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\overline{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая что*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j}\sum_{|g|=j}\varphi \circ T_g \to \overline{\varphi}$$

ν-почти всюду и в $L_1(X, \nu)$.

Если $p > 1$ и $\varphi \in L_p(X, \nu)$, то сходимость имеет место также и в L_p.

Если мера μ сильно связна, то $\overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ T_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Действительно, рассмотрим топологическую цепь Маркова с состояниями $\{1, \ldots, 2m+1\}$ и матрицей переходов $S = (s_{ij})$, где $s_{ij} = 1$, если $|i-j| = 0, 1, \ldots, m \pmod{2m+1}$, и $s_{ij} = 0$ в противном случае. Обозначим, как и раньше, множество допустимых слов нашей цепи через W_S, пространство допустимых последовательностей через Ω_S. Легко видеть, что опять соответствие $w \to g_w$ определяет биекцию между множеством допустимых слов цепи с матрицей S и полугруппой $\mathcal{CLFS}_{2m+2}$, причем слово длины n переходит в элемент той же длины. Легко видеть, что количество состояний, достижимых за один шаг из некоторого состояния i, не зависит от i. Поэтому можно так ввести стационарную марковскую меру μ на пространстве Ω_S, что все допустимые слова данной длины равновероятны, то есть, если $w \in W_S$ и $|w| = n$, то $\mu(w) = \frac{1}{N_j}$. При этом мера μ сильно связна и сильно связна* (более того, $\mu^* = \mu$).

Обозначим через T_i отображение пространства X в себя, соответствующее образующему g_i, и применим эргодическую теорему 2 к отображениям $T_1, \ldots, T_m$ и мере μ. Легко видеть, что $C_n^\mu(T)\varphi = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{N_j} \sum\limits_{|g|=j} \varphi \circ T_g$ для всякой $\varphi \in L_1(X, \nu)$, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом можно получить такой же результат для циклически локально свободных групп с нечетным числом образующих.

А именно, рассмотрим группу $\mathcal{CLF}_{2m+2}$ с образующими $\{g_1, \ldots, g_{2m+1}\}$. Для всякого $g \in \mathcal{CLF}_{2m+2}$ обозначим через $|g|$ длину его кратчайшей записи как слова в алфавите $\{g_1, \ldots, g_{2m+1}, g_1^{-1} \ldots, g_{2m+1}^{-1}\}$. Пусть N_j – число элементов длины j в $\mathcal{CLF}_{2m+2}$.

Теорема 7. *Пусть группа $\mathcal{CLF}_{2m+2}$ действует на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{B}_X, \nu\}$ отображениями, сохраняющими меру ν. Пусть T_g – отображение, соответствующее элементу $g \in \mathcal{CLFS}_{2m+2}$. Тогда для всякой $\varphi \in L_1(X, \nu)$ найдется функция $\overline{\varphi} \in L_1(X, \nu)$, такая что*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N_j} \sum_{|g|=j} \varphi \circ T_g \to \overline{\varphi}$$

ν-почти всюду и в $L_1(X, \nu)$.

Если $p > 1$ и $\varphi \in L_p(X, \nu)$, то сходимость имеет место также и в L_p.

Если мера μ сильно связна, то $\overline{\varphi} \circ T_i = \overline{\varphi}$, $i = 1, \ldots, m$.

Литература

1. M. Gromov, *Hyperbolic groups.* in: S. M. Gersten, Essays in Group Theory. Springer-Verlag, 1987.
2. В. И. Оселедец, *Марковские цепи косые произведения и эргодические теоремы для "общих" динамических систем.* — Теор. вер. и ее прим. **10**, № 3 (1965), 551–557.
3. S. Kakutani, *Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution.* — Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. (1951), 247–261.
4. H. R. Pitt, *Some generalizations of the ergodic theorem.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **38** no. 4 (1942), 325–334.

5. T. Bewley, *Sur l'application des théorèmes ergodiques aux groupes libres: un contre example.* — C. R. Acad. Sci. **270** no. 23 (1970), A1533–1534.
6. A. M. Vershik, S. Nechaev, R. Bikbov, *Statistical properties of braid groups in locally free approxination.* Preprint IHES/M/99/45 June 1999.
7. А. М. Вершик, *Численные характеристики групп и соотношения между ними.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **256** (1999).
8. Р. И. Григорчук, *Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп.* — Тезисы Тамбовской школы по теории функций (1986).
9. Р. И. Григорчук, *Эргодические теоремы для действий свободных групп и полугрупп.* — Мат. заметки **5** (1999), 779–783.
10. A. Nevo, E. M. Stein, *A generalization of Birkhoff's pointwise ergodic theorem.* — Acta Math. **173** (1994), 135–154.
11. U. Krengel, *Ergodic Theorems.* Walter de Gruyter, 1985.
12. Yu. Kifer, *Ergodic theory of random transformations.* Birkhauser, 1986.
13. E. Hopf, *The general temporally discrete Markov process.* — J. Rat. Mech. Anal. **3** (1954), 13–45.
14. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Convergence almost everywhere of operator averages.* — J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956), 129–178.
15. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators I, II.* Interscience Publ., 1958/1963.
16. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* Наука, М., 1980.
17. А. И. Буфетов, *Эргодические теоремы для действий нескольких отображений.* — Успехи мат. наук **54**, № 4 (1999).

Bufetov A. I. Skew products and ergodic theorems for group actions.

We obtain new ergodic theorems for an action of the free semi-group on a probability space by measure-preserving maps. Our method consists in associating with the original semi-group action a skew product over the shift on the space of infinite one-sided sequences of generators of the semi-group, and then integrating Birkhoff–Khinchin ergodic theorems along the base of the skew product.

Независимый
Московский университет

Поступило 10 октября 1999 г.