Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

А. М. Вершик

ЧИСЛЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ГРУПП И ЛОКАЛЬНО СВОБОДНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГРУППЫ КОС

1. Фундаментальное неравенство

Пусть G – счетная конечно-порожденная группа, $S = (g_1, \dots g_k, g_1^{-1}, \dots g_k^{-1})$ – симметричная система образующих группы G, а μ – симметричная мера с носителем S (т. е. $\mu[g_i] = \mu[(g_i)^{-1}]) > 0$). Определим три константы, связанные с тройкой (G, S, μ):

1. Логарифмический объем. Пусть W_n – множество слов в группе G длины n в образующих S (сфера радиуса n), а $|\cdot|$ – число элементов в множестве.

Определение 1. *Логарифмическим объемом группы Γ в заданной системе образующих S назовем число*

$$v_S = \lim_{n\to\infty} \log \frac{|W_n|}{n}.$$

Эта константа измеряет экспоненциальный рост числа слов. Она хорошо известна и изучалась во многих работах.

Пусть μ симметричная мера на группе Γ ц конечным носителем и пусть μ^n – ее n-я свертка.

2. Снос. Рассмотрим $L(g)$ – длину элемента (= минимальное число символов в образующих S в записи данного элемента группы g).

Определение 2. *Сносом для данной меры μ на группе называется число*

$$l_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{E_{\mu^n} L(g)}{n},$$

где E_ν – знак математического ожидания относительно меры ν.

Существование сноса следует из субаддитивной эргодической теоремы (см. [2]), более того, он существует для почти всех

При частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00098.

случайных последовательностей соответствующего марковского процесса блуждания с управляющей мерой μ:

$$(e, \bar{g}_{i_1}, \bar{g}_{i_1} \cdot \bar{g}_{i_2}, \ldots \bar{g}_{i_1} \cdot \bar{g}_{i_2} \ldots \bar{g}_{i_n}, \ldots).$$

Здесь $\bar{g}_i$ есть либо g_i, либо g_i^{-1} и все элементы g_i выбираются независимо в соответствии с мерой μ.

3. Энтропия (см. [1, 4])**.** Определим энтропию пары (G, μ).

Определение 3. *Энтропией меры μ на группе G называется число*

$$h_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu^n)}{n},$$

где $H(\cdot)$ – обычная энтропия атомической меры.

И вновь предел существует из соображений выпуклости.

Теорема 1 (Фундаментальное неравенство)**.** *В указанных обозначениях имеет место неравенство*

$$h_\mu \le l_\mu \cdot v_{_S}.$$

Это неравенство было доказано в той же работе [2]. Там же имеются ссылки на его частные случаи, рассмотренные ранее по другим поводам (см. также [8]). В этой работе мы усилим его и дадим иную интерпретацию.

Мы будем рассматривать *сильно экспоненциальные группы*, т. е. такие, для которых существует система образующих S и симметричная мера μ на ней с положительной энтропией $h_\mu > 0$; из фундаментального неравества в этом случае следует, что $l > 0$ и $v > 0$, т. е. число слов растет экспоненциально. Положительность энтропии влечет экспоненциальность, но не влечет аменабельность (см. [4]), а экспоненциальность не влечет положительность энтропии. Но положительность энтропии оказывается равносильной положительности $l_\mu > 0$ – т. е. линейности среднего роста длины слова, это мы увидим далее.

Удобно ввести *нормированную энтропию* или удельную энтропию на одну ("типичную") образующую:

$$\hat{h}_\mu = \frac{h_\mu}{l_\mu}.$$

Фундаментальное неравенство превратится в следующее:

$$\hat{h}_\mu \leq v_S.$$

Эта форма фундаментального неравенства подчеркивает сходство v_S с топологической энтропией и интерпретацию фундаментального неравенства как неравенства между метрической и топологической энтропиями. Ниже мы увидим, в каком смысле это верно.

Рассмотрим величину

$$\sup_\mu h_\mu \equiv h_S,$$

где супремум берется по всем симметричным мерам с носителем S. Аналогично определяется величина l_S.

Лемма 1. *Существует мера с носителем S, для которой реализуется супремум h_S величины h_μ.*

Действительно, так как множество S конечно, то множество симметричных мер на нем – компактно. Энтропия h_μ, как можно убедиться из простых оценок, приведенных в [2], непрерывно зависит от меры μ.

Поскольку различные меры μ определяют попарно взаимносингулярные бернуллиевские меры на пространстве бесконечных слов (см. следующий пункт), то непрерывность математических ожиданий функционалов, зависящих от n (таких как нормированная длина слова), вообще говоря, не имеет места. Поэтому, пока неясно, существует ли мера, реализующая супремум l_S величин l_μ, но для дальнейшего это неважно, так как из предыдущего видно, что имеет место неравенство

$$h_S \leq l_S \cdot v_S.$$

Мера, которая реализует супремум h_μ, называется *мерой с максимальной энтропией на данной системе образующих.*

Стоит отметить, что равномерная мера на S не обязательно является мерой с максимальной энтропией, так как образующие могут быть неравноправны с точки зрения определяющих соотношений. Если же транзитивно действующая на образующих группа подстановок продолжается до автоморфизма группы, то естественно предположить, что это так.

Наконец, введем величину

$$q_S \equiv \frac{h_S}{l_S \cdot v_S}.$$

Величина q_S зависит только от системы образующих S и, как мы увидим, является ее важной характеристикой.

Определение 4. *Система образующих S в сильно экспоненциальной группе G называется экстремальной, если величина q_S есть максимально возможное значение $Q = \sup q_S$ (супремум берется по всем конечным системам образующих).*

Из неравенства следует, что

$$Q \leq 1.$$

Возникает возможность сравнения систем образующих с помощью параметра q_S. Неизвестно, в каждой ли конечно-порожденной группе существует экстремальная система образующих. Однако введенное выше число Q является нетривиальным *инвариантом конечно-порожденной сильно экспоненциальной группы.*

Определение 5. *Группа называется свободно-подобной, если $Q = 1$.*

Смысл термина разъясняется из следующего простого вычисления (см. [4]).

В свободной группе с конечным числом образующих система свободных образующих экстремальна, равномерная мера на образующих имеет максимальную энтропию, а $Q = 1$. Явные значения всех трех констант для этой меры таковы:

$$v = \log(2k-1), \quad l = \frac{k-1}{k}, \quad h = \frac{(k-1)\cdot\log(2k-1)}{k}.$$

Эти подсчеты хорошо известны. Нетрудно убедиться в том, что конечные расширения свободно-подобных групп свободно-подобны, поэтому виртуально свободные группы (конечные расширения свободных групп), и в частности, свободное произведение циклических групп, также свободно-подобно (напомним, что только свободное произведение двух групп второго порядка не является виртуально-свободной группой).

2. Пространство бесконечных слов-путей в графе Кэли

Мы изучаем статистику слов в группе, границы и др. с помощью *модели бесконечных слов.* С точки зрения случайных блужданий эта модель рассматривает приращения марковского процесса вместо него самого. Такой подход ближе к эргодической теории и теории меры.

Пусть X^∞ – пространство бесконечных слов в алфавите $S = (g_1, \dots g_k, g_1^{-1}, \dots g_k^{-1})$ – образующих группы G. В терминах графа Кэли, соответствующего системе образующих S, пространство X^∞ есть пространство бесконечных связных путей, начинающихся из единицы группы, каждое ребро этого пути есть элемент S.

Если μ – симметричная мера на образующих, то μ^∞ – бернуллиевская (продакт) мера на X^∞. Рассмотрим на (X^∞, μ^∞) последовательность измеримых разбиений $[\xi_n]$ и $[\eta_n]$, где элементы разбиения ξ_n есть конечные множества, состоящие из точек $x \in X^\infty$, координаты которых начиная с номера $n+1$ совпадают, а элементы разбиения η_n подразбивают каждый элемент разбиения ξ_n на подмножества с одинаковым произведением первых n координат как элементов группы.

Очевидно, что каждое разбиение ξ_n мажорирует разбиение η_n и что последовательности разбиений $[\xi_n]$ и $[\eta_n]$ – убывают, т. е. всякий элемент разбиения ξ_{n+1} (соотв. η_{n+1}) есть объединение нескольких элементов разбиения ξ_n (соотв. η_n). Иногда удобнее говорить о разбиениях как об отношениях эквивалентности. В этом смысле мы имеем монотонные последовательности отношений эквивалентности, сходящиеся к некоторому предельному отношению, однако необходимо рассматривать не само предельное отношение, а его измеримую оболочку. Для последовательности $[\xi_n]$ она тривиальна, что есть классический закон нуля–единицы, а предельное разбиение (теоретико-множественное пересечение разбиений) для последовательности $[\xi_n]$ есть “хвостовое” разбиение – разбиение на классы элементов, не совпадающих на произвольном конечном числе мест. Измеримое же пересечение последовательности $[\eta_n]$ есть основной объект рассмотрения. Он, конечно, зависит от группы и, вообще говоря, от меры. Это пересечение, вообще говоря, не является инвариантным относительно сдвига.

Определение 6. *Назовем измеримое пересечение*

$$\wedge_n \eta_n = \pi(G, \mu)$$

пространства (X^∞, μ^∞) *граничным разбиением, отвечающим мере* μ, *а фактор-пространство по нему* X^∞/π *– метрическим абсолютом пары* (G, μ). *Образ меры* μ^∞ *на фактор-пространстве обозначим* μ_π.

Термин связан с тем, что для группы движений пространства Лобачевского это абсолют плоскости. Более традиционное название этой границы (в вероятностной трактовке) – граница-выход.

Другое важное семейство разбиений строится следующим образом. Зафиксируем два натуральных числа n, k и скажем, что две точки $x, y \in X^\infty$ (n,k)-эквивалентны, если произведение первых n координат точки x совпадает с произведением первых k координат точки y, и для всех i, $x_{n+i} = y_{k+i}$. Тем самым определено разбиение $\eta_{n,k}$. При $n = k$ получаем разбиения η_n.

Измеримое пересечение всех разбиений

$$\wedge_{n,k} \eta_{n,k}$$

есть по определению разбиение $\sigma(G, \mu)$, называемое *стационарным разбиением*, а фактор-пространство по нему назовем *стационарной границей* пары (G, μ) и обозначим $\Gamma(G, \mu)$. Стационарная граница естественно отображается на абсолют, так как стационарное разбиение мажорируется граничным, ниже мы увидим, что это отображение есть изоморфизм.

Заметим еще, что теоретико-множественное пересечение $\cap_n \eta_n$ (то есть предельное отношение эквивалентности) есть подразбиение хвостового разбиения, построенные разбиения π, σ аналогичны разбиениям, соответственно, на траектории группы финитных замен координат и на траектории полугруппы сдвигов (по Рохлину).

Стационарная граница $\Gamma(G, \mu)$ совпадает с *границей Пуассона* той же пары (G, μ).

В теории марковских процессов и операторов традиционно определение границы Пуассона с помощью понятия μ-гармонических функций. А именно, каждая точка $\tau \in \Gamma(G, \mu)$ границы (в вышеприведенном смысле) определяет условную меру μ_τ на X^∞; функция f_τ на группе G, значение которой на элементе $g \in G$

равно значению $\mu_\tau(g)$ – т. е. мере цилиндрического множества в X^∞, состоящего из точек, произведение первых координат которых равно g.

Приведенные определения разбиений естественно обобщаются. Пусть S – произвольный алфавит. Для каждого n рассмотрим произвольное разбиение θ_n^1 пространства (X^∞, μ^∞), независимое с ξ_n, т. е. фактически разбиение множества слов длины n в абстрактном алфавите S, при этом при разных n они согласованы следующим образом: на словах длины $n+k$ с одинаковыми началами (или концами) длины k разбиение θ_{n+k}^1 индуцирует на оставшейся части слов разбиение θ_n^1. Теперь построим разбиение θ_n как произведение θ_n^1 и ξ_n. Из приведенного условия вытекает, что последовательность $[\theta_n]$ – убывающая и что θ_n мажорирует ξ_n. В такое обобщение попадают полугруппы, ассоциативные системы и некоторые формальные грамматики.

Перейдем к интерпретации введенных численных констант в терминах нашей модели.

Прежде всего, каждое из разбиений η_n есть прямое произведение разбиения η_n^1 начальных отрезков (до n) на классы по произведениям первых n координат и разбиения ξ_n. Поэтому число слов длины n есть число элементов разбиения η_n^1, а энтропия этого разбиения и есть энтропия $H(\mu^n)$, см. п. 1. Разбиение η_1^1 есть цилиндрическое разбиение по первой координате. Что касается интерпретации сноса, то в каждом элементе разбиения η_n^1 есть слово минимальной длины, следовательно, это определяет функцию длины L_n на X^∞, и ее математическое ожидание есть средняя длина слова, а ее нормированный на n предел и есть снос. Эта интерпретация делает совершенно понятным фундаментальное неравенство, фактически, это повторение доказательства из [4].

Теорема 2 [4]. *Следующие предложения эквивалентны:*

1. *Метрический абсолют $\Gamma(\mu)$ состоит из одной точки; иначе говоря, разбиение $\pi(\mu)$ пространства (X^∞, μ^∞) тривиально.*
2. *Энтропия обращается в нуль: $h_\mu = 0$.*
3. *Математическое ожидание логарифма вероятности слова по мере μ^n растет медленнее n (сублинейно).*
4. *Снос равен нулю: $l_\mu = 0$, т. е. средняя по мерам μ^n длина слов растет сублинейно.*
5. *Стационарная граница тривиальна.*

Доказательство. Эквивалентность $1 \longleftrightarrow 2$ доказана в [4]. Основной здесь является следующая формула:

$$h_\mu = H(\xi_1^1) - H(\xi_1^1|\pi),$$

вытекающая из свойств h_μ.

Эквивалентность $2 \longleftrightarrow 3$ есть аналог теоремы Шеннона, доказанный там же: энтропию можно вычислять на траекториях как предел нормированных логарифмов вероятностей.

Импликация $4 \longrightarrow 2$ есть прямое следствие фундаментального неравенства.

Вывод утверждения $2 \longrightarrow 4$ мы отложим до более подробной публикации (см. также [9]). Что же касается эквивалентности свойств 1 и 5, то имеет место более общее утверждение:

Метрический абсолют и стационарная граница – совпадают.

Доказательство этого утверждения повторяет хорошо известное рассуждение из теории стационарных марковских цепей: всякая апериодическая марковская цепь с конечным множеством состояний регулярна, т. е. граница-выход тривиальна. Апериодичность означает отсутствие разбиения множества состояний на подклассы, которые сдвиг детерминированно переставляет. Это утверждение остается верным для счетного множества состояний и сигма-конечной инвариантной начальной меры, как в нашем случае. Апериодичность есть эргодичность, т. е. тривиальность стационарной границы, и следовательно, это влечет тривиальность границы-выход, т. е. метрического абсолюта. Заметим, что для континуального пространства состояний эта связь не имеет места, известны примеры эргодических нерегулярных марковских цепей с непрерывным множеством состояний.

Замечание. По поводу эквивалентности $1 \longleftrightarrow 2$ заметим следующее: тот факт, что энтропия равна нулю, если и только если фактор-пространство тривиально, обобщает свойство *полной положительности энтропии автоморфизма Бернулли*. Действительно, если бы разбиение π было бы инвариантным относительно сдвига, то наше утверждение было бы прямым следствием полной положительности энтропии. Это делает интересным общий вопрос о том, для каких классов неинвариантных относительно сдвига разбиений равенство нулю предела нормированных энтропий разбиений, аппроксимирующих данное разбиение из этого класса, равносильно его тривиальности.

3. Локально свободные группы

В работе [5] вычислены, точнее, даны оценки всех трех констант v, l, h для локально свободной группы и равномерной меры на естественных образующих. Приведем эти ответы. Напомним, что локально свободная группа LF_n есть группа с $n-1$ образующими и соотношениями: соседние образующие образуют свободную группу, а остальные пары коммутируют. Эта группа накрывает группу кос очевидным образом и содержится в группе кос как группа, порожденная квадратами стандартных образующих группы кос.

Теорема 3. *Для локально свободной группы с двумя и более образующими фундаментальное неравенство является строгим (т. е. не является равенством).*

Особенность постановки вопросов для локально свободной группы и более общо – локальных групп [6], в частности, группы кос, в специальном интересе к асимптотике по числу образующих. Оказывается, такой *конечный* предел существует для каждой из трех констант. Мы приведем соответствующие оценки. Заметим сначала, что каждая из групп имеет свою "положительную" полугруппу LF_n^+, порожденную положительными степенями образующих, которая служит базой для предварительных оценок.

Теорема 4. *В пределе по числу образующих $n \to \infty$*

1. *Логарифмический объем равен для LF_n^+*

$$v = \log 4 + O(n^{-1}),$$

для LF_n

$$v = \log 7 + O(n^{-1}).$$

2. *Снос для LF_n равен*

$$l = \frac{2-\alpha}{3-\alpha},$$

где константа $|\alpha| < 1/2$, т. е.

$$3/5 < l < 5/7.$$

(Снос для полугруппы равен $l = 1$, так как в LF_n^+ нет сокращений).

3. *Энтропия равна для* LF_n^+ –

$$h = \log 3 + O(n^{-1}),$$

а для LF_n –

$$h = \log(3-\alpha) + O(n^{-1}).$$

Таким образом, фундаментальные неравенства в обоих случаях строгие при достаточно больших n: для LF_n^+

$$\log 3 < \log 4,$$

а для LF_n

$$\log(3-\alpha) < \frac{2-\alpha}{3-\alpha} \cdot \log 7$$

для $|\alpha| < 1/2$. Таким образом, константа q из пункта 1 равна

$$q = \frac{(3-\alpha)\log(3-\alpha)}{(2-\alpha)\log 7} < 1.$$

Эти подсчеты весьма нетривиальны и используют теоремы, цитированные в предыдущем пункте – аналог теоремы Шеннона и др., а также важную геометрическую модель слов локально свободной группы, так называемые груды (heap), и естественную нормальную форму в этой группе. С помощью бесконечных груд можно описать границу (абсолют) локально свободной группы.

Определение 7. *Для групп кос также имеет место строгое фундаментальное неравенство.*

Это следует из соотношений между группами кос и локально свободными группами, указанными выше. Однако, описание границы для локально свободной группы не помогает явному нахождению границы для группы кос – в отличие от нее, в группе кос ни для одной известной нормальной формы нет стабилизации символов в записи случайных слов.

Следствием того, что неравенство строгое, является следующее довольно неожиданное обстоятельство: случайная генерация элементов группы с помощью последовательных произведений n независимых образующих дает (с ростом n) лишь *экспоненциально малую часть всех элементов группы соответствующей длины* $l \cdot n$. Этот практический вывод показывает, что выбор образующих с наибольшей константой q из пункта 1 является весьма актуальным для практики. Но даже для достаточно хорошо изученной локально свободной группы мы до сих пор не знаем, есть ли в ней образующие, для которых эта константа лучше, чем для естественных образующих, и тем более неизвестно, является ли эта группа свободно-подобной, т. е. есть ли образующие, для которых $Q = q = 1$.

4. Свободная разрешимая группа

По ряду причин интересно рассмотреть с той же точки зрения свободные разрешимые группы. Эти группы подробно изучались алгебраистами в 60–70-х гг. (в работах Холла, Магнуса, Шмелькина и др.), однако, они еще не стали предметом исследования с точки зрения случайных блужданий. Но очень близкие к ним группы-сплетения вошли в круг примеров довольно давно, по-видимому, после работы [3] и работы [4] (хотя там они не названы сплетениями), в последней рассматривались сплетения $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 3$, и $\mathbf{Z}$, которые дают пример разрешимых групп с нетривиальной границей – метрическим абсолютом. Недавно сплетения дали пример промежуточного роста сноса (между линейным и квадратным корнем, А. Дюбина).

Теперь становится ясным, что свободные разрешимые группы являются более естественным классом примеров.

Здесь мы дадим новую, насколько известно, геометрическую трактовку свободной разрешимой группы. Ряд других вопросов, связанных с этой группой, рассмотрен совместно со студентом С. Добрыниным и будет описан в другой работе.

Рассмотрим свободную разрешимую группу ступени 2 – $\mathrm{Sol}_{r,2} = \mathrm{Sol}_r$ с r образующими. Ее коммутант есть абелева группа с бесконечным числом образующих, которые можно занумеровать элементами d-мерной решетки, а именно – это образы коммутаторов $[x_i, x_j]$, $i, j = 1 \ldots r$, $i \neq j$, исходных образующих под действием внутренних автоморфизмов, определяемых мономами $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$ (порядок сомножителей несущественнен, так как внутренний автоморфизм, как нетрудно проверить, определяется лишь степенями переменных и не зависит от их порядка).

Поэтому группа Sol_r изоморфна расширению этой абелевой группы с помощью группы $\mathbf{Z}^r$ и некоторого 2-коцикла. Для $r = 2$ коммутант полностью определен, так как между описанными образующими коммутанта нет никаких соотношений (кроме коммутирования), но при большем числе образующих описание становится сложным, так как между коммутаторами появляются соотношения. Однако, есть прямой способ описания коммутанта, заимствованный из *теории кубических гомологий* [7]. Он же позволяет легко описать коцикл.

Будем понимать решетку как топологическое пространство, а именно, совокупность всех сдвигов координатных осей на целочисленные векторы. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbf{B}_r$ замкнутых 1-циклов на решетке $\mathbf{Z}^r$ (см. ниже) как на одномерном комплексе. Ее образующими являются элементарные циклы (*плакеты* по физической терминологии или стандартные 1-циклы в смысле теории кубических гомологий [7]) т. е. циклы, обходящие один квадрат решетки. Обход квадрата с вершинами $(0, e_i, e_i + e_j, e_j)$ в указанном порядке, где e_i, e_j – координатные орты, назовем элементарным (i, j)-координатным циклом. На группе циклов $\mathbf{B}_r$ естественно действует сдвигами группа $\mathbf{Z}^r$. Всякий элементарный цикл есть сдвиг одного из координатных элементарных циклов.

Определим 2-коцикл $\alpha(\cdot, \cdot)$ группы $\mathbf{Z}^r$ со значениями в группе циклов $\mathbf{B}_r$. Точнее, мы сразу определяем класс когомологий коциклов. Для каждого элемента $v \in \mathbf{Z}^r$ определим произвольный связный путь τ_v, соединяющий нуль с элементом v ("путь", как и "решетка", понимается буквально: путь – непрерывное отображение полупрямой в решетку, переводящее целые точки в целочисленные вектора). Тогда пара (v, w) элементов определяет *цикл* $\alpha(v, w) \in \mathbf{B}_r$, составленный из трех путей:

$$(\tau_v, v + \tau_w, -\tau_{v+w}).$$

Этот цикл, рассматриваемый как элемент $\mathbf{B}_r$, и есть значение 2-коцикла $\alpha(v, w)$.

Лемма 2. *Различные выборы системы путей $v \to \tau_v$ приводят к когомологичным коциклам.*

Обозначим класс когомологий построенного коцикла через $\bar{\alpha}$.

Теорема 5. *Расширение группы циклов $\mathbf{B}_r$ при помощи группы сдвигов $\mathbf{Z}^r$ и класса когомологий $\bar{\alpha}$ канонически изоморфна свободной разрешимой группе ступени 2 с r образующими Sol_r. При этом изоморфизме коммутант изоморфно переходит в коммутант, при-*

чем образ элементарного (i, j)*-координатного цикла есть коммутатор образующих* $[x_i, x_j]$.

Таким образом, свободная разрешимая группа второй ступени есть просто расширение группы циклов решетки с помощью группы сдвигов решетки и естественного класса когомологий. По-видимому, $H^2(\mathbf{Z}^r; \mathbf{B}_r) = \mathbf{Z}$, что означало бы, что наш коцикл единственный с точностью до множителя.

Заметим, что эта конструкция допускает далекие обобщения.

Вопросы, связанные с вычислением констант для свободных разрешимых групп, также будут рассмотрены в отдельной работе.

Литература

1. A. Avez, *Entropie des groupes de type fini.* — C. R. Acad. Sci. Paris **275A** (1972), 1363–1366.
2. А. Вершик, *Численные характеристики групп и соотношения между ними.* — Зап. науч. сем. ПОМИ **256** (1999), 5–18.
3. А. Вершик, *Счетные группы, близкие к конечным.* — В кн.: В кн.: Ф. Гринлиф, Инвариантные средние на группах. М., Мир, 1973.
4. V. Kaimanovich, A. Vershik, *Random Walks on Discrete Groups: Boundary and Entropy.* — Ann. Prob. **11** no. 3 (1983), 457–490.
5. R. Bikbov, S. Nechaev, A. Vershik, *Statistical properties of braid groups in locally free approximation.* — Preprint IHES/M/99/45, Juin 1999. 1–31.
6. A. Vershik, *Local algebras and new version of Young's orthogonal form.* — Banach Center Publ. PWN-Polish Sci. Publ. **26**, part 2 (1990), 467–473.
7. П. Хилтон, С. Уайли, *Теория гомологий.* М., 1966.
8. V. Kaimanovich, *Hausdorf dimension of the harmonic measure an frees.* — Erg. Th. Dyn. Syst. **18** no. 3 (1998), 60–63.
9. N. Varopoulos, *Long range estimates for Markov chains.* — Bull. Sci. Math. **2(109)** (1985).

Vershik A. M. Numerical invariants of exponential groups and locally free approximation of the braid group.

We continue the studying of the numerical constants of the countable groups, like entropy, escape and logariphmic volume. We give examples of the groups for which fundamental inequality is strict.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 9 сентября 1999 г.