Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

Д. В. Карпов, А. В. Пастор

О СТРУКТУРЕ k–СВЯЗНОГО ГРАФА

1. Введение. Основные определения

Понятие вершинной k-связности можно рассмотреть как обобщение понятия связности. Действительно, k-связный граф – это граф, содержащий как минимум $k+1$ вершину, в котором при удалении любых $k-1$ вершин сохраняется путь между любыми двумя оставшимися вершинами. При $k = 1$ мы получаем определение связного графа. Многие утверждения, верные для связных графов, можно обобщить на k-связные графы. Однако аналог тривиального для связности утверждения часто оказывается содержательным. Простейшим примером может быть теорема Менгера, утверждающая, что в k-связном графе между любыми двумя вершинами существует k не пересекающихся по вершинам путей. В частном случае $k = 1$ эта содержательная теорема становится тривиальной.

Рассмотрим другой пример. Легко видеть, что из любого связного графа можно удалить вершину без потери связности. Более того, для любого связного графа можно описать все вершины, удаление которых не ведет к потере связности – это вершины, не являющиеся точками сочленения.

Вопрос об удалении вершины из k-связного графа без потери k-связности является намного более содержательным. Существуют k-связные графы, которые при удалении любой вершины перестают быть k-связными (такие графы называются *критическими k-связными*). В 1972 году G. Chartrand, A. Kaugars и D. R. Lick [3] доказали, что в любом k-связном графе, все степени вершин которого не менее, чем $\frac{3k-1}{2}$, существует вершина, при удалении которой сохраняется k-связность. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в [3].

Авторы выражают признательность РФФИ за поддержку исследований.

Понятие блока для связного графа является хорошо известным. Свойства блоков можно найти в [1, стр. 41–46] и [2, стр. 105–121]. В разделе 3 будет определено понятие блока для k-связного графа и построено дерево блоков k-связного графа. Эти конструкции являются обобщением классических конструкций на случай $k > 1$ и обладают интересными свойствами. В частности, с помощью понятия блока будет дано описание всех вершин k-связного графа, при удалении которых сохраняется k-связность.

В настоящей работе также исследуется вопрос об одновременном удалении нескольких вершин без потери k-связности.

1.1. Компоненты и разделяющие множества. Рассмотрим k-связный граф $G = (V, E)$.

Определение 1. *Назовем множество R вершин графа G разделяющим, если при удалении этих вершин из графа теряется связность. В случаях, когда необходимо указать количество элементов разделяющего множества, мы будем называть разделяющее множество из x вершин x-разделяющим. Операцию удаления из графа разделяющего множества R (в результате которой получается несколько компонент) мы будем называть разрезом по множеству R.*

Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.

По определению, в k-связном графе нет $(k-1)$-разделяющего множества. Если в графе G нет k-разделяющего множества, то при удалении любой из вершин сохранится k-связность. Пусть в рассматриваемом графе есть k-разделяющие множества. Тогда для каждого k-разделяющего множества рассмотрим все компоненты связности, которые образуются при разрезе по данному k-разделяющему множеству. Для удобства будем называть такие компоненты связности просто *компонентами*. Нетрудно заметить, что для любой компоненты однозначно определено k-разделяющее множество, при разрезе по которому эта компонента образуется.

Определение 2. *Назовем компоненту минимальной, если она не* *содержит никакой другой компоненты (образовавшейся в результате разреза по какому-либо разделяющему множеству).*

Определение 3. 1) *Будем называть k-связный граф G нерасщепимым, если каждая его компонента состоит не менее, чем из $\frac{k+1}{2}$ вершин.*

2) *Будем называть k-связный граф G слабо нерасщепимым, если у графа G не существует компоненты H, состоящей менее, чем из $\frac{k+1}{2}$ вершин, и k-разделяющего множества R, таких что $H \subset R$.*

Нетрудно заметить, что всякий k-связный граф, степени вершин которого не менее $\frac{3k-1}{2}$, является нерасщепимым, а всякий нерасщепимый k-связный граф является слабо нерасщепимым.

Очевидно, что в любом k-связном графе существуют минимальные компоненты и, более того, внутри каждой компоненты есть минимальная. Ниже будет доказано, что в слабо нерасщепимом k-связном графе никакие две минимальные компоненты не пересекаются.

В [3] доказано, что из нерасщепимого k-связного графа, можно удалить без потери k-связности любую вершину из наименьшей по количеству вершин компоненты (это наиболее сильная формулировка доказанного в [3] результата). В теореме 1 мы докажем, что из слабо нерасщепимого k-связного графа, можно удалить без потери k-связности любую вершину любой минимальной компоненты. В теореме 5 мы докажем еще более сильный результат. Тем самым, мы усилим результаты из [3].

Пусть k-разделяющее множество R делит k-связный граф G на n компонент $G_1, G_2, \dots, G_n$. В разделе 2.2 рассматривается вопрос об одновременном удалении вершин из этих компонент без потери k-связности (теоремы 2 и 3). Этот вопрос аналогичен вопросу об одновременном удалении ребер из разных компонент без потери k-связности, который поставил R. Halin в [4]. В теореме 4 доказано, что для слабо нерасщепимого k-связного графа при некоторых дополнительных условиях одновременное удаление по одной вершине из разных минимальных компонент не ведет к потере k-связности. В теореме 7 мы усилим этот результат.

В разделе 3 строится дерево блоков k-связного графа. Построение дерева блоков, вообще говоря, неоднозначно, однако, в случае слабо нерасщепимого k-связного графа между блоками, входящими в разные деревья блоков, можно установить взаимно-однозначное соответствие так, что соответствующие блоки будут изоморфны, а множества их внутренних вершин будут совпадать.

2. Удаление вершин из минимальных компонент

2.1. Удаление одной вершины. Пусть G – k-связный граф. Начнем с изучения свойств его разделяющих множеств и минимальных компонент.

Определение 4. *Рассмотрим компоненту G_i и k-разделяющее множество R, которое ее отделяет. Добавим к G_i все вершины множества R и ребра, выходящие от них к вершинам G_i в графе G, а также все ребра между вершинами множества R (даже если таких ребер нет в графе G). Обозначим полученный граф через G_i^*.*

Лемма 1. *Пусть R – k-разделяющее множество в k-связном графе G, а G_0 – одна из компонент, образованная при разрезе G по R. Пусть T – разделяющее множество в графе G_0^*. Тогда T является разделяющим множеством и в графе G.*

Доказательство. Пусть A и B – две вершины, попавшие при разрезе G_0^* по множеству T в разные компоненты. Однако, в графе G после удаления T сохранился путь S между A и B. Если весь этот путь проходит по вершинам множества G_0^*, то после удаления T в G_0^* есть путь между A и B, что противоречит предположению. Следовательно, у пути S есть участок, проходящий вне G_0^*. Рассмотрим такой участок между вершинами C и D. Заметим, что вершины графа G, не принадлежащие G_0^*, не могут быть смежны с вершинами G_0, поскольку при разрезании по множеству R они оказываются в разных компонентах. Следовательно вершины C и D должны принадлежать множеству R, а значит в графе G_0^* они соединены ребром, на которое можно заменить участок пути между вершинами C и D. Поступив аналогично с другими участками пути, выходящими за пределы G_0^*, мы получим путь между A и B, проходящий внутри G_0^* (после удаления множества T), что противоречит условию. Следовательно, T является разделяющим множеством и в графе G. □

Лемма 2. *Рассмотрим произвольный k-связный граф G. Выполняются следующие утверждения.*

1) *Для любой компоненты G_0 граф G_0^* является k-связным.*

2) *Компонента* G_0 *минимальна тогда и только тогда, когда граф* G_0^* *является* $(k+1)$*-связным.*

Доказательство. 1) Пусть G_0^* не является k-связным графом. Тогда в нем есть $(k-1)$-разделяющее множество T, которое по лемме 1 является $(k-1)$-разделяющим и в графе G, что невозможно из k-связности этого графа.

2) Пусть для некоторой минимальной компоненты G_0 граф G_i^* не является $(k+1)$-связным. Следовательно, в G_0^* существует k-разделяющее множество T. Пусть при удалении этого множества образовались компоненты H_1, H_2, ... , H_m (где $m \geq 2$). Поскольку все вершины из R в графе G_0^* соединены ребрами, существует компонента H_i, в которую ни одна из них не попала. Но тогда H_i является компонентой графа G, лежащей внутри G_0, что противоречит минимальности G_0. Следовательно, граф G_0^* является $(k+1)$-связным.

Наоборот, пусть граф G_0^* является $(k+1)$-связным, но компонента G_0 содержит компоненту H. Поскольку k-разделяющее множество, отделяющее G_0, отделяет и все вершины компоненты H, то k-разделяющее множество компоненты H содержится в G_0^*, что противоречит $(k+1)$-связности графа G_0^*. □

Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф. Приступим к доказательству того, что при удалении любой из его вершин, входящих в одну из минимальных компонент, не нарушается k-связность.

Лемма 3. *Пусть* G *–* k*-связный граф, в котором отмечены* k *вершин. Удалим из него* m *неотмеченных вершин и* t *отмеченных вершин, где* $m + t \leq k - 1$. *Тогда из любой оставшейся неотмеченной вершины* B *можно дойти не менее, чем до* $k - m - t$ *неудаленных отмеченных вершин, не проходя через удаленные и отмеченные вершины.*

Доказательство. Удалим дополнительно $k-1-t-m$ произвольные отмеченные вершины. Поскольку исходный граф был k-связным, получится связный граф. Следовательно, от любой неотмеченной вершины B полученного графа можно дойти хотя бы до одной из оставшихся неудаленными $m + 1$ отмеченной вершины напрямую, не проходя через другие отмеченные вершины. Таким образом, вершина B соединена напрямую хотя бы с одной из любых $m+1$ неудаленных отмеченных вершин, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 4. *Рассмотрим граф G и его k-разделяющее множество R, которое делит его на компоненты G_1, G_2, ..., G_n, причем графы G_1^*, G_2^*, ..., G_n^* являются k-связными. Рассмотрим произвольное $(k-1)$-элементное множество T вершин графа.*

1) *Пусть хотя бы в двух компонентах G_i и G_j есть вершины, не содержащиеся в T. Тогда при удалении вершин множества T все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин множества R попадут в одну компоненту связности.*

2) *Пусть после удаления вершин множества T неудаленные вершины остались только в компоненте G_i, но из остальных компонент мы удалили не менее, чем $\frac{k-1}{2}$ вершин. Тогда все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин множества R попадут в одну компоненту связности.*

Доказательство. Будем называть вершины разделяющего множества R отмеченными. Удалим $k-1$ вершин множества T из графа G. Пусть мы удалили t отмеченных вершин и m_1, m_2, ..., m_n неотмеченных вершин из компонент G_1, G_2, ..., G_n соответственно. Тогда

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k - 1 - t.$$

По лемме 3 в графе G_i^* от каждой оставшейся неотмеченной вершины можно попасть, не проходя через удаленные и отмеченные вершины, как минимум до $k - t - m_i$ неудаленных отмеченных вершин.

1) Пусть в двух компонентах G_i и G_j остались неудаленные вершины B_i и B_j соответственно. Тогда заметим, что $m_i + m_j \leq k - 1 - t$, следовательно,

$$k - t - m_i + k - t - m_j \geq k + 1 - t > k - t.$$

Это означает, что вершины B_i и B_j должны быть соединены путями с общей неудаленнной отмеченной вершиной, следовательно, есть путь из B_i в B_j. Таким образом, в этом случае есть путь между любыми двумя вершинами из разных компонент, следовательно, из любой неотмеченной вершины можно попасть в любую другую неотмеченную вершину.

2) Пусть неудаленные вершины остались только в компоненте G_i, но из остальных компонент мы удалили не менее, чем $\frac{k-1}{2}$ вершин. В этом случае

$$m_i \leq k - 1 - t - \frac{k-1}{2}$$

и

$$2(k - t - m_i) \geq 2 + 2\left(\frac{k-1}{2}\right) = k + 1 > k - t.$$

Следовательно, любые две неотмеченные вершины соединены друг с другом.

Кроме того, выше было доказано, что в любом из случаев существует неотмеченная вершина, соединенная более чем с половиной неудаленных отмеченных вершин. Следовательно, более половины неудаленных отмеченных вершин (то есть, вершин разделяющего множества R) попадет в ту же компоненту связности относительно разделяющего множества T, что и вершины, не входящие в R. $\square$

Определение 5. *Рассмотрим граф G и множество S, состоящее из нескольких вершин графа G. Через $G - S$ мы, как обычно, будем обозначать граф, полученный из G при удалении всех вершин множества S и всех выходящих из них ребер.*

Лемма 5. *Никакое k-разделяющее множество слабо нерасщепимого k-связного графа G не содержит внутри себя компоненты.*

Доказательство. Предположим, что минимальная компонента H, отделяемая k-разделяющим множеством R, целиком содержится внутри k-разделяющего множества T. Поскольку граф G является слабо нерасщепимым, в компоненте H должно быть хотя бы $\frac{k+1}{2}$ вершин.

Пусть A – произвольная вершина компоненты H. Введем обозначения:

$$G' = G - A, \quad H' = H - A, \quad T' = T \setminus \{A\}.$$

Тогда граф $(H')^*$ является k-связным, а T' – $(k-1)$-разделяющее множество в графе G'. Множество T' целиком содержит компоненту H', в которой не менее, чем $\frac{k-1}{2}$ вершин. Следовательно, по лемме 4 при удалении из графа G' вершин множества T' (то есть, и при удалении из G вершин множества T) все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин из R попадут в одну компоненту связности. Следовательно, другую компоненту могут образовать не более, чем $\frac{k-1}{2}$ вершин из множества R, но тогда эти вершины в графе G отделяются k-разделяющим множеством T, что противоречит слабой нерасщепимости графа G. $\square$

Теорема 1. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф. Тогда любую из вершин графа G, входящую в одну из минимальных компонент, можно удалить без потери k-связности.*

Доказательство. Если граф G является $(k+1)$-связным, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что это не так. Тогда рассмотрим минимальную компоненту G_1 и ее k-разделяющее множество R. Пусть $G_2, \ldots, G_n$ – остальные компоненты, образующиеся при разрезе по R. Как следует из леммы 2, граф G_1^* является $(k+1)$-связным, а графы $G_2^*, \ldots, G_n^*$ являются k-связными. Рассмотрим произвольную вершину A из минимальной компоненты G_1. Пусть $\widetilde{G} = G - A$, $\widetilde{G}_1 = G_1 - A$. Очевидно, граф $\widetilde{G}_1^*$ является k-связным.

Из леммы 5 следует, что ни одна из компонент $\widetilde{G}_1, G_2, \ldots, G_n$ не содержится внутри никакого $(k-1)$-разделяющего множества. Следовательно, по пункту 1 леммы 4, для k-связности графа $\widetilde{G}$ достаточно доказать, что $k-1$ вершинами от разделяющего множества R нельзя отделить множество, состоящее не более, чем из $\frac{k-1}{2}$ вершин. Предположим противное: пусть такое множество P отделяется $k-1$ вершинами в графе $\widetilde{G}$, тогда P отделяется k вершинами в графе G, что противоречит слабой нерасщепимости графа G. Следовательно, при удалении вершины A мы получим k-связный граф. $\square$

Следствие 1. *Из k-связного графа, степени всех вершин которого не менее, чем $\frac{3k-1}{2}$, можно удалить вершину так, чтобы получился k-связный граф.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что такой граф является нерасщепимым (а следовательно, и слабо нерасщепимым). $\square$

Следствие 2. *Из k-связного графа, степени всех вершин в котором не меньше, чем $\frac{3k-1}{2} + N - 1$, можно удалить N вершин так, чтобы получился k-связный граф.*

Доказательство. По следствию 1, мы можем N раз последовательно удалить вершину без потери k-связности. □

Следствие 3. *Никакие две минимальные компоненты слабо нерасщепимого k-связного графа G не пересекаются.*

Доказательство. Пусть минимальные компоненты G_1 и G_2, отделяемые k-разделяющими множествами R_1 и R_2 соответственно, имеют непустое пересечение. Так как G_2 не содержится в G_1 и обе компоненты связны, существует вершина A из $G_2 \setminus G_1$, соединенная с какой-то вершиной G_1. Но вершины G_1 могут быть соединены либо с вершинами G_1, либо с вершинами R_1, следовательно, $A \in R_1$. Это означает, что при удалении вершины A граф G потеряет k-связность, что противоречит теореме 1. □

2.2. Удаление нескольких вершин. Мы доказали, что любую из вершин, входящих в минимальную компоненту слабо нерасщепимого k-связного графа G, можно удалить без потери k-связности. Кроме того, в любой компоненте содержится хотя бы одна минимальная компонента, и никакие две минимальные компоненты не пересекаются.

В этом разделе мы рассмотрим вопрос об одновременном удалении нескольких вершин из различных минимальных компонент без потери k-связности. Нашей главной целью будет нахождение такого множества вершин k-связного графа, что удаление любого его подмножества (в том числе и всего этого множества) не нарушает k-связность. Сначала докажем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 6. *Рассмотрим k-связный граф G и его k-разделяющее множество R, которое делит граф на компоненты G_1, G_2, …, G_n. Пусть множество A состоит из вершин графа G, не принадлежащих R; $\widetilde{G} = G - A$ и $\widetilde{G}_i = G_i - A$. Пусть для всех i от 1 до n граф $\widetilde{G}_i^*$ является k-связным и $\widetilde{G}_i$ не содержится ни в каком $(k-1)$-разделяющем множестве. Тогда после удаления любых $k-1$ вершин из графа $\widetilde{G}$, все вершины, не входящие в R, и более половины вершин множества R попадут в одну и ту же компоненту связности.*

Доказательство. Заметим, что ни один из графов $\widetilde{G}_i$ не содержится внутри никакого $(k-1)$-разделяющего множества. Следовательно к графам $\widetilde{G}_1^*$, $\widetilde{G}_2^*$, …, $\widetilde{G}_n^*$ и произвольному множеству из $k-1$ вершины можно применить пункт 1 леммы 4. □

Лемма 7. *Пусть k-разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна с одной из вершин компоненты G_1.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть вершина A множества R не смежна ни с одной вершиной компоненты G_1. Тогда все остальные вершины множества R (а их $k-1$) также отделяют компоненту G_1, что противоречит k-связности графа G. □

Пусть k-разделяющее множество R делит граф G на компоненты $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Ниже мы докажем, что при некоторых дополнительных условиях можно удалить по вершине из каждой компоненты $G_1, G_2, \ldots, G_n$ так, что при этом не теряется k-связность графа G. В теореме 2 это дополнительное условие будет ограничением снизу числа компонент, а в теореме 3 – ограничением снизу на степень вершин разделяющего множества.

Теорема 2. *Пусть k-разделяющее множество R делит слабо нерасщепимый k-связный граф G на компоненты $G_1, G_2, \ldots, G_n$, где $n \geq k$. В каждой компоненте G_i произвольным образом выберем вершину A_i, входящую в одну из минимальных компонент. Тогда при одновременном удалении из графа G любого набора, состоящего из выбранных вершин (в том числе и всех выбранных вершин), k-связность сохранится.*

Доказательство. Пусть

$$B \subset \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \quad \widetilde{G} = G - B, \quad \widetilde{G}_i = G - A_i, \quad \overline{G_i} = G_i - A_i.$$

Согласно теореме 1, граф $\widetilde{G}_i$ является k-связным. Следовательно, по лемме 2 граф $\overline{G_i}^*$ является k-связным. Так как граф G является слабо нерасщепимым, то ни для какого i компонента $\overline{G_i}^*$ не содержится ни в каком $(k-1)$-разделяющем множестве. Таким образом, применив лемму 6 мы получим, что при удалении из $\widetilde{G}$ произвольных $k-1$ вершин все вершины, не входящие в R, попадут в одну компоненту связности.

Пусть при удалении из графа $\widetilde{G}$ некоторых $k-1$ вершин он теряет связность. Тогда одна из образовавшихся компонент связности должна целиком содержаться в R. Обозначим ее R_1. Заметим, что поскольку для любого i граф $\widetilde{G}_i$ является k-связным, то по лемме 7 каждая вершина R_1 должна быть смежна с какой-либо вершиной из $\overline{G}_i$. Следовательно, чтобы отделить компоненту R_1 от остального графа, нам необходимо удалить хотя бы одну вершину в каждой из компонент $\overline{G}_i$. Таким образом, мы должны удалить хотя бы n вершин, что больше, чем $k-1$. $\square$

Теорема 3. *Пусть k-разделяющее множество R делит слабо нерасщепимый k-связный граф G на компоненты $G_1, G_2, \dots, G_n$, причем степень каждой вершины из множества R не менее, чем $2k-1$. В каждой компоненте G_i произвольным образом выберем вершину A_i, входящую в одну из минимальных компонент. Тогда при одновременном удалении из графа G любого набора, состоящего из выбранных вершин (в том числе и всех выбранных вершин), k-связность сохранится.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $n < k$ (иначе воспользуемся теоремой 2). Как и в теореме 2, пусть

$$B \subset \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \quad \widetilde{G} = G - B, \quad \widetilde{G}_i = G - A_i, \quad \overline{G}_i = G_i - A_i.$$

Согласно теореме 1, граф $\widetilde{G}_i$ является k-связным, откуда по лемме 2 граф $\overline{G}_i^*$ также является k-связным. Так как граф G является слабо нерасщепимым, то ни для какого i компонента $\overline{G}_i^*$ не содержится ни в каком $(k-1)$-разделяющем множестве. Таким образом, применив лемму 6 мы получим, что при удалении из $\widetilde{G}$ произвольных $k-1$ вершин все вершины, не входящие в R, и более половины вершин множества R попадут в одну компоненту связности.

Таким образом, нам достаточно проверить, что при удалении любых $k-1$ вершин в графе $\widetilde{G}$ не отделится компонента связности, состоящая не более, чем из $\frac{k-1}{2}$ вершин множества R. Предположим противное. Пусть разделяющее множество T из $k-1$ вершины отделяет подмножество R' множества R. Пусть множество R' содержит p вершин. Каждая вершина графа R' в графе G может быть соединена с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$, вершинами множества T и остальными $p-1$ вершинами из R'. Учитывая, что такая вершина по условию должна быть соединена не менее, чем с $2k-1$ вершиной, получаем неравенство

$$2k-1 \le p-1+n+k-1 \le p-1+2(k-1). \tag{2.1}$$

Из (2.1) немедленно следует, что $p \ge 2$.

Заметим, что удалив из k-связного графа $\overline{G}_i^*$ все $k-p$ вершин множества R, не вошедшие в R', мы получим p-связный граф. Следовательно, чтобы отделить в этом графе вершины множества R' от остальных, нужно удалить из него минимум p вершин, то есть для потери связности графа $\widetilde{G}$ всего нужно удалить не менее, чем pn вершин. Следовательно, $2n \le pn \le k-1$, откуда $n < \frac{k-1}{2}$. В силу неравенства (2.1), мы имеем $p > \frac{k+1}{2}$, что противоречит лемме 6. Следовательно, граф $\widetilde{G}$ является k-связным. □

Нам известно, что в каждой компоненте графа G содержится хотя бы одна минимальная компонента и никакие две минимальные компоненты не пересекаются. Мы знаем, что удаление любой вершины из минимальной компоненты не ведет к потере k-связности. В следующей теореме мы докажем, что при одновременном удалении по одной вершине из каждой минимальной компоненты также сохраняется k-связность. Сначала мы докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 8. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф. Рассмотрим набор его вершин $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, где $m > 1$, никакие две из которых не лежат в одной минимальной компоненте, и обладающий следующими свойствами:*

1) *существует k-разделяющее множество графа G, разделяющее набор $\mathfrak{A}$;*

2) *при удалении вершин любого подмножества множества $\mathfrak{A}$ граф G сохраняет k-связность;*

Пусть R_1, R_2, …, R_n – все k-разделяющие множества графа G, разделяющие набор $\mathfrak{A}$, пусть

$$R = \cap_{i=1}^{n} R_i, \quad \widetilde{G} = G - \mathfrak{A}.$$

Тогда после удаления любых $k-1$ вершин из графа $\widetilde{G}$ все вершины, не входящие в R, попадут в одну компоненту связности. Более того, количество не вошедших в эту компоненту вершин из множества R не превосходит $\frac{k-1}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное k-разделяющее множество R_i. Пусть при разрезе графа G по R_i образуются компоненты G_1, G_2, …, G_ℓ. Рассмотрим две вершины $A_r, A_s \in \mathfrak{A}$, попавшие в разные компоненты. Пусть

$$A_r \in G_u, \quad A_s \in G_v, \quad \widetilde{G}_j = G_j - \mathfrak{A}.$$

Удалим из графа G все вершины набора $\mathfrak{A}$, кроме A_r. По условию получится k-связный граф. Но при этом из всех компонент графа G, кроме G_u, мы удалили все входящие в них вершины множества $\mathfrak{A}$. Следовательно, по лемме 1, все графы $\widetilde{G}^*_j$, кроме $\widetilde{G}^*_u$, являются k-связными. Проведя аналогичное рассуждение с удалением всех вершин набора $\mathfrak{A}$, кроме A_s, мы получим, что все графы $\widetilde{G}^*_j$, кроме $\widetilde{G}^*_v$, также являются k-связными. Следовательно, k-связными являются все графы $\widetilde{G}^*_j$.

Заметим, что каждая компонента G_i содержит хотя бы одну минимальную компоненту H_i, из которой мы удалили не более одной вершины. Следовательно, после удаления всех вершин из множества $\mathfrak{A}$ компонента H_i (а следовательно, и G_i) не содержится ни в одном из $(k-1)$-разделяющих множеств.

Теперь мы можем применить пункт 1 леммы 4 к графам $\widetilde{G}^*_1$, $\widetilde{G}^*_2$, ..., $\widetilde{G}^*_\ell$ и получить, что при удалении из графа $\widetilde{G}$ любых $k-1$ вершин, все вершины, не входящие в R_i, попадут в одну компоненту связности. Причем количество не вошедших в эту компоненту вершин из множества R_i не превосходит $\frac{k-1}{2}$.

Проводя аналогичные рассуждения для всех разделяющих множеств R_1, R_2, ..., R_n, мы получим, что в одну компоненту связности попадут все вершины, не входящие в R, причем количество не вошедших в эту компоненту вершин из множества R не превосходит $\frac{k-1}{2}$. □

Теорема 4. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф, причем степень любой из вершин, входящих в какое-либо из его k-разделяющих множеств не менее, чем $2k-1$. Произвольно выберем в каждой минимальной компоненте графа G одну из вершин. Тогда при удалении любого набора, состоящего из выбранных вершин (в том числе и всех выбранных вершин), k-связность сохранится.*

Доказательство. Предположим противное, пусть при удалении выбранных вершин k-связность нарушится. Тогда существует минимальный по включению набор $\mathfrak{A}$ из выбранных вершин, при удалении которого теряется k-связность. Пусть этот набор состоит из вершин A_1, A_2, ..., A_n, принадлежащих различным минимальным компонентам H_1, H_2, ..., H_n соответственно. Обозначим k-разделяющее множество, отделяющее компоненту H_i, через R_i. Пусть

$$R = \cap_{i=1}^{n} R_i, \quad \widetilde{G} = G - \mathfrak{A}, \quad \widetilde{H}_i = H_i - A_i.$$

Из теоремы 1 следует, что графы $\widetilde{H}_1^*, \dots, \widetilde{H}_n^*$ являются k-связными.

Пусть в графе $\widetilde{G}$ существует состоящее не более чем из $k-1$ вершин множество T, отделяющее от остального графа компоненту связности R'. По лемме 8, все вершины из R' входят в R и их количество не превосходит $\frac{k-1}{2}$. Докажем, что в множестве T должно быть не менее, чем k вершин. Рассмотрим два случая.

Пусть $n \geq k$. По лемме 7, любая вершина из множества R' смежна с одной из вершин компоненты $\widetilde{H}_i$, следовательно, в множестве T должно быть хотя бы по одной вершине из каждой компоненты $\widetilde{H}_i$. Таким образом, в этом случае в разделяющем множестве T должно быть хотя бы k вершин.

Рассмотрим случай $n \leq k-1$. Пусть множество R' содержит p вершин. Каждая вершина графа R' в графе G может быть соединена с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$, вершинами множества T и остальными $p-1$ вершинами из R'. Учитывая, что такая вершина по условию должна быть соединена не менее, чем с $2k-1$ вершиной, получаем неравенство

$$2k - 1 \leq p - 1 + n + k - 1 \leq p - 1 + 2(k-1), \tag{2.2}$$

откуда немедленно следует, что $p \geq 2$.

Заметим, что удалив из k-связного графа $\widetilde{H}_i^*$ все $k-p$ вершин множества R_i, не вошедшие в R', мы получим p-связный граф. Следовательно, чтобы отделить в этом графе вершины множества R' от остальных, нужно удалить из него как минимум p вершин, то есть, для потери связности графа $\widetilde{G}$ всего нужно удалить не менее, чем pn вершин. Следовательно, $2n \leq pn \leq k-1$, откуда $n < \frac{k-1}{2}$. В силу неравенства (2.2) мы имеем $p > \frac{k+1}{2}$, что противоречит лемме 6. Следовательно, в разделяющем множестве T и в этом случае должно быть хотя бы k вершин.

Таким образом, мы доказали k-связность графа $\widetilde{G}$, что противоречит выбору набора $\mathfrak{A}$. Значит, при удалении всех выбранных вершин граф G не теряет k-связность. $\square$

3. Удаление вершин, не лежащих в минимальных компонентах. Понятие блока для k-связных графов

3.1. Удаление одной вершины. В этой части мы введем понятие блока для k-связного графа и построим дерево блоков. С помощью этих понятий мы полностью опишем множество вершин, удаление которых из k-связного графа G не нарушает k-связность, и докажем более сильные результаты об удалении нескольких вершин без потери k-связности.

Рассмотрим следующий процесс. В k-связном графе G выберем k-разделяющее множество R_1. Пусть при его удалении образуется компонента G_1. По лемме 2 граф G_1^* является k-связным. Отметим в G_1^* все вершины множества R_1. В графе G_1^* выберем k-разделяющее множество R_2 (мы не требуем, чтобы множество R_2 было k-разделяющим в графе G, поскольку ниже будет доказано, что это верно всегда). Пусть при разрезе по этому множеству из G_1^* получается компонента G_2, которой соответствует k-связный граф G_2^*. Дополнительно отметим в G_1^* все вершины множества R_2. И так далее, этот процесс окончится, когда на очередном шаге граф G_n^* окажется $(k+1)$-связным.

Определение 6. *Пусть H^* – полученный на одном из шагов описанного выше процесса k-связный граф. Назовем граф H^* псевдоблоком. Обозначим через H множество неотмеченных вершин в псевдоблоке H^*. Назовем множество H квазикомпонентой. Назовем границей квазикомпоненты H множество $R(H) = H^* \setminus H$. Если граф H^* является $(k+1)$-связным (то есть этот граф – конечный результат описанного выше процесса), то назовем его блоком, а множество его неотмеченных вершин H минимальной квазикомпонентой. Вершины минимальной квазикомпоненты мы будем называть внутренними вершинами соответствующего блока.*

Замечание. 1) Легко видеть, что компонента является квазикомпонентой, а минимальная компонента является минимальной квазикомпонентой. Таким образом, если H – компонента, то H^* – псевдоблок, а если H – минимальная компонента, то H^* – блок.

2) Квазикомпонента не всегда является связным графом. Более того, квазикомпонента может оказаться пустым графом, если в соответствующем графе H^* все вершины являются отмеченными. Мы будем считать, что каждому такому графу H^* соответствует пустая квазикомпонента, причем пустые квазикомпоненты, соот-

ветствующие разным графам H^*, мы будем считать различными. В остальных случаях мы будем считать квазикомпоненты совпадающими, если у них совпадают множества вершин.

Ниже мы исследуем структуру квазикомпонент и блоков. С помощью полученных результатов мы докажем, что удаление произвольной вершины из любой минимальной квазикомпоненты не ведет к потере k-связности и построим дерево блоков k-связного графа.

Лемма 9. *Рассмотрим k-связный граф G и его квазикомпоненту H. Пусть T – разделяющее множество в графе H^*. Тогда T является разделяющим множеством и в графе G. Более того, если образованная при разрезе графа H^* по T компонента H_0 содержится в H, то эта компонента образуется и при разрезе графа G по T.*

Доказательство. Пусть квазикомпонента H получена из графа G последовательными разрезами по k-разделяющим множествам $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Пусть $H_0^* = G, H_1^*, H_2^*, \ldots, H_n^* = H^*$ – графы, образующиеся на стадиях этой последовательности разрезов. Рассмотрим k-разделяющее множество T в графе H^*. Предположим, что T не является k-разделяющим множеством в G, пусть m – наименьшее такое число, что в графе H_m^* множество T является k-разделяющим. Очевидно, что $m \geq 1$. Применив лемму 1 для графа H_{m-1}^*, его k-разделяющего множества R_m и отрезанной по R_m компоненте H_m, мы получим, что T и в H_{m-1}^* является разделяющим множеством, что противоречит предположению. Следовательно, T является разделяющим множеством и в графе G.

Если образованная при разрезе по T компонента H_0 содержится в H, то она отделена от всех вершин разделяющих множеств, содержащихся в H^*. Отсюда следует, что вершины из H_0 в графе G после разреза по T не будут соединены ни с одной вершиной из $H^* \setminus H$, а следовательно, и ни с одной другой вершиной графа G. Таким образом, компонента H_0 образуется в графе G при разрезе по T. □

Определение 7. *Назовем разделяющие множества R и T независимыми, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.*

Лемма 10. *Пусть R и T – k-разделяющие множества в k-связном графе G, такие что множество R не разделяет множество T.*

Тогда множество T не разделяет множество R (то есть эти множества независимы).

Доказательство. Пусть при разрезе графа G по множеству R все неудаленные вершины k-разделяющего множества T попадут в одну компоненту связности G_1. Кроме того, должна образоваться еще хотя бы одна компонента G_2. Так как $G_2 \cap T = \varnothing$ и граф G_2 связен, то при разрезе графа G по T все вершины из G_2 окажутся в одной компоненте. По лемме 7, каждая вершина множества R соединена хотя бы с одной вершиной из G_2, следовательно, все неудаленные вершины множества R также окажутся в одной компоненте. □

Лемма 11. *Пусть R и T – независимые k-разделяющие множества графа G, причем T лежит в компоненте G_1 относительно R. Тогда T является k-разделяющим множеством в графе G_1^*.*

Доказательство. Пусть при разрезе графа G по множеству T все вершины k-разделяющего множества R попадут в компоненту связности F_1. Кроме того, должна образоваться еще хотя бы одна компонента F_2. Тогда любая вершина F_2 должна быть соединена с любой вершиной T путем, содержащемся в F_2, и следовательно, не содержащем вершин R. Таким образом, F_2 содержится в G_1.

С другой стороны, любой путь, соединяющий вершины компоненты F_2 и множества R, обязан содержать вершины множества T. Следовательно, при удалении вершин множества T из графа G_1^* вершины компоненты F_2 и множества R окажутся в разных компонентах связности. □

Определение 8. *Будем называть k-разделяющее множество R графа G граничным для квазикомпоненты H, если множество R содержится в H^*.*

Лемма 12. *Любая квазикомпонента H может быть получена из k-связного графа G разрезами по граничным k-разделяющим множествам. При этом порядок разрезов не имеет значения.*

Доказательство. Пусть квазикомпонента H была получена в результате последовательных разрезов графа G по k-разделяющим множествам $R_1, R_2, \dots, R_n$. Как и в лемме 9, пусть $H_0^* = G$, H_1^*, $H_2^*, \dots, H_n^* = H^*$ – графы, образующиеся на стадиях этой последовательности разрезов. Тогда R_i является k-разделяющим множеством в графе H_{i-1}^*, следовательно, по лемме 9, это множество является k-разделяющим и в графе G.

Итак, все множества R_1, R_2, ... , R_n являются k-разделяющими в графе G. Из леммы 10 следует, что эти множества попарно независимы. Докажем, что в результате разрезов по этим множествам независимо от порядка разрезов получается квазикомпонента H. Действительно, рассмотрим произвольное k-разделяющее множество R_i. Заметим, что после разреза графа G по этому множеству все неудаленные вершины H^* окажутся в одной компоненте. Обозначим ее F_i. Пусть в результате последовательных разрезов по множествам R_1, R_2, ... , R_n, проведенных в некотором порядке, образовалась квазикомпонента $\widetilde{H}$. Тогда множеством вершин графа $\widetilde{H}^*$ будет пересечение множеств вершин графов F_i^* (при разрезе по множеству R_i мы отбрасываем те вершины, которые не входят в F_i^*). При этом, две вершины графа $\widetilde{H}^*$ смежны тогда и только тогда, когда они либо смежны в графе G, либо содержатся в множестве R_i для некоторого i. Таким образом, результат не зависит от порядка проведения разрезов, следовательно, $\widetilde{H}^*$ совпадает с H^*.

Докажем индукцией по количеству разрезов, что из разделяющих множеств R_1, R_2, ... , R_n можно выбрать несколько содержащихся внутри H^*, разрезами по которым можно получить H^*. В случае одного разреза данное утверждение очевидно. Пусть в некий момент был произведен разрез по множеству R_j, причем для полученного до этого шага графа H_{j-1}^* утверждение леммы выполнялось. Тогда можно считать, что все множества R_1, R_2, ... , R_{j-1} целиком содержатся в H_{j-1}^*. Рассмотрим произвольное множество R_i, где $i < j$. Заметим, что все его вершины попарно соединены ребрами в графе H_j^*, следовательно, все вершины R_i, не входящие в R_j, попадут в одну компоненту относительно R_j. Если мы выберем эту компоненту, то в полученном после разреза по R_j графе H_j^* будут содержаться все вершины множества R_i. Если же после разреза по R_j мы выберем другую компоненту, то все вершины из R_i, содержащиеся в H_j^*, (а следовательно, и все вершины из R_i, содержащиеся в H^*) будут содержаться в R_j. В этом случае множество R_i можно исключить из рассмотрения. Таким образом, по окончании процесса останутся лишь множества, содержащиеся внутри H^*. □

Лемма 13. *Пусть H – квазикомпонента в графе G, отделяемая* *граничными k-разделяющими множествами R_1, R_2, ..., R_n. Пусть при разрезе графа G по разделяющему множеству R_i образуются компоненты G_{i1}, ..., G_{im_i} (не содержащие вершин из X), причем граф H^* и графы G^*_{i1}, ..., $G^*_{im_i}$ (для всех i от 1 до n) являются k-связными. Пусть никакое $(k-1)$-разделяющее множество в графе G не отделяет компоненты, целиком содержащейся внутри какого-либо k-разделяющего множества, и не содержит никакой компоненты, отделяемой k-разделяющим множеством. Тогда граф G является k-связным.*

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству граничных разделяющих множеств, отделяющих квазикомпоненту H. В случае $n = 1$ утверждение леммы непосредственно следует из пункта 1 леммы 4.

Пусть $n \geq 2$. Обозначим через H_1 квазикомпоненту, отделяемую граничными множествами R_2, ..., R_n. Для индукционного перехода достаточно доказать k-связность графа H_1^*. Рассмотрим произвольное множество T из $k-1$ вершины графа G и докажем, что H_1^* не теряет связности при удалении вершин множества T. Отметим в графе H_1^* все вершины множества R_1. Разберем два случая.

1) Предположим, что $(H^* \setminus R_1) \not\subset T$. По условию, при удалении вершин множества T неотмеченные вершины остаются в каждой из компонент G_{11}, ..., G_{1m_1}. Так как в рассматриваемом случае неотмеченные вершины есть в H, то по пункту 1 леммы 4 все неудаленные неотмеченные вершины попадут в одну компоненту связности, причем в эту же компоненту связности попадет более половины отмеченных вершин (то есть вершин из множества R_1).

2) Предположим, что $(H^* \setminus R_1) \subset T$. Рассмотрим k-разделяющее множество R_2. Пусть

$$|H^* \cap T| = t, \quad |R_2 \setminus R_1| = |R_1 \setminus R_2| = s.$$

Тогда $|R_1 \cap R_2| = k - s$. Очевидно, что не более, чем $t - s$ вершин из R_1, входят в T. Следовательно, не менее, чем $(k-s)-(t-s) = k-t$ вершин из $R_1 \setminus T$, принадлежат $R_1 \cap R_2$. Эти вершины попарно смежны. Обозначим множество таких вершин через W.

Пусть в множествах $G_{ij} \cap T$ по m_{ij} вершин. Нетрудно заметить, что $m_{1j} \leq (k-1-t)$. По лемме 3, после удаления из графа G вершин множества T, из каждой неудаленной вершины компоненты G_{1j} можно попасть не менее, чем в $k-(t-s)-m_{1j} \geq s+1$

неудаленных вершин из множества R_1. Отсюда следует, что из каждой неудаленной вершины компоненты G_{1j} можно попасть хотя бы в одну из вершин множества W, а следовательно, и во все вершины W (так как они попарно смежны). Таким образом, от любых двух вершин A и B из компонент G_{1i} и G_{1j} можно дойти до общей вершины из R_1, следовательно, все вершины, не вошедшие в R_1, и в этом случае попали в одну компоненту связности F.

Докажем теперь, что в эту же компоненту связности F попало более половины неудаленных вершин множества R_1. Предположим противное. Так как все вершины из множества W попали в компоненту F, то вершины множества W составляют не более половины неудаленных вершин множества R_1, откуда следует, что $|W| \leq s$. Следовательно, количество неудаленных вершин в множестве R_1 не превосходит $2s$. Но по доказанному выше, как минимум $s+1$ из них попадут в интересующую нас компоненту связности. Следовательно, сделанное выше предположение неверно, и более половины вершин разделяющего множества R_1 при разрезе по T попадут в компоненту связности F.

Предположим, что после разреза по T в графе H_1^* отделилась компонента $P \subset R_1$ из p вершин. По доказанному выше, $p \leq \frac{k-1}{2}$. По лемме 9, T является разделяющим множеством в G, причем, если P не пересекается ни с одним другим множеством R_j, то множество T отрезает компоненту P в графе G, что противоречит условию леммы. Следовательно, $P \cap R_j \neq \varnothing$ для некоторого j. Но так как в графе H^* все вершины из R_j попарно смежны, множество T должно содержать все вершины из $R_j \setminus P$, а таких вершин не менее, чем $k-p$.

Рассмотрим граф G_{11}. Докажем, что множество T должно содержать хотя бы p вершин из компоненты G_{11}. Заметим, что при удалении из k-связного графа G_{11}^* всех $k-p$ вершин из множества $R_1 \setminus P$, мы получим p-связный граф. Следовательно, отделяющее компоненту P множество T должно содержать хотя бы p вершин из G_{11}. Таким образом, поскольку $G_{11} \cap R_j = \varnothing$, мы получаем $|T| \geq k$, что противоречит предположению. $\square$

Теорема 5. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф. Тогда любую из вершин графа G, входящую в одну из минимальных квазикомпонент, можно удалить без потери k-связности.*

Доказательство. Пусть минимальная квазикомпонента H получена разрезами по граничным k-разделяющим множествам R_1, R_2, ... , R_n. По лемме 12, порядок разрезов не имеет значения.

Выберем в H любую вершину A и удалим ее. Пусть

$$\widetilde{G} = G - A, \quad \widetilde{H} = H - A.$$

Граф $\widetilde{H}^*$ является k-связным, поскольку H^* – $(k+1)$-связный граф. Пусть G_{i1}, ... , G_{im_i} – компоненты, отделяющиеся при разрезе графа G по разделяющему множеству R_i, которые не содержат вершин из H. Заметим, что графы G^*_{i1}, ... , $G^*_{im_i}$ также являются k-связными.

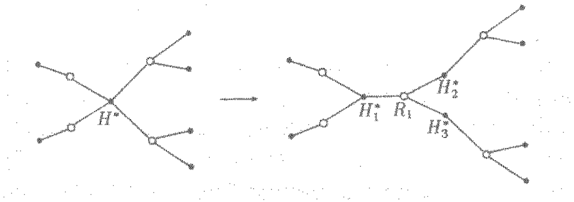
Согласно лемме 5 никакое k-разделяющее множество в графе G не отделяет компоненту, целиком содержащуюся в другом k-разделяющем множестве. Следовательно, никакое $(k-1)$-разделяющее множество в графе $\widetilde{G}$ не отделяет компоненты, целиком содержащейся внутри какого-либо k-разделяющего множества, и не содержит никакой компоненты, отделяемой k-разделяющим множеством.

Таким образом, по лемме 13, граф $\widetilde{G}$ является k-связным. □

3.2. Деревья блоков k-связного графа. Рассмотрим процесс последовательных разрезов графа G по k-разделяющим множествам R_1, R_2, ... , R_n, в результате которого граф окажется разрезан на блоки. По лемме 10, все множества R_1, R_2, ... , R_n будут попарно независимы. Нетрудно заметить, что любое k-разделяющее множество, отличное от R_1, R_2, ... , R_n, будет разделено хотя бы одним из них (иначе по этому множеству можно провести еще один разрез, но разбиение на блоки уже закончено). Следовательно, выбранные нами k-разделяющие множества представляют из себя максимальный по включению набор попарно независимых k-разделяющих множеств.

Заметим также, что полученное разбиение на блоки зависит только от набора попарно независимых k-разделяющих множеств, но не от порядка, в котором проводились разрезы по множествам этого набора.

Каждому (не обязательно максимальному) набору попарно независимых k-разделяющих множеств $R_1, R_2, \ldots, R_\ell$ можно поставить в соответствие двудольный граф $B(G; R_1, R_2, \ldots, R_\ell)$, вершинами которого будут k-разделяющие множества R_1, R_2, ... , R_ℓ и псевдоблоки, полученные при разрезании графа G по множествам данного набора. Псевдоблок H^* и k-разделяющее множество R_i смежны в $B(G; R_1, R_2, \dots, R_\ell)$ тогда и только тогда, когда R_i – граничное k-разделяющее множество псевдоблока H^*.



Заметим, что граф $B(G; R_1)$ является деревом диаметра 2 (этот граф содержит единственное k-разделяющее множество R_1 и смежные ему псевдоблоки G_1^*, $G_2^*, \dots, G_m^*$ графа G, образующиеся при разрезе графа G по R_1). Заметим также, что граф $B(G;\ R_1, R_2, \dots, R_{\ell-1}, R_\ell)$ можно получить из графа $B(G; R_1, R_2, \dots, R_{\ell-1})$ заменой вершины, соответствующей псевдоблоку H^*, содержащему k-разделяющее множество R_ℓ, на дерево $B(H^*; R_\ell)$. Каждое k-разделяющее множество, смежное в $B(G; R_1, R_2, \dots, R_{\ell-1})$ с H^*, будет в $B(G; R_1, R_2, \dots, R_\ell)$ смежно с одной из висячих вершин дерева $B(H^*; R_\ell)$ (а именно, с вершиной, соответствующей псевдоблоку, полученному при разрезе H^* по R_ℓ, в котором содержится данное k-разделяющее множество).

Таким образом, для любого набора попарно независимых k-разделяющих множеств R_1, R_2, ... , R_ℓ граф $B(G; R_1, R_2, \dots, R_\ell)$ будет деревом. В частности, деревом будет граф, соответствующий произвольному максимальному набору попарно независимых k-разделяющих множеств R_1, R_2, ... , R_n, а значит и произвольному разбиению графа G на блоки. Вершины такого дерева соответствуют k-разделяющим множествам R_1, R_2, ... , R_n и блокам, полученным при разрезе по этим множествам.

Определение 9. *Дерево, соответствующее разбиению графа G на блоки, мы будем называть деревом блоков графа G.*

Замечание. 1) Вообще говоря, различным разбиениям графа G на блоки соответствуют различные деревья. Однако, ниже мы докажем, что между блоками, входящими в разные деревья блоков, можно установить взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие блоки будут изоморфны, а множества их внутренних вершин будут совпадать. Тем самым мы покажем, что независимо от способа разбиения графа G будут получаться одинаковые с точностью до изоморфизма блоки, с полностью совпадающими множествами внутренних вершин, хотя структура образованного ими дерева может изменяться в зависимости от способа разбиения.

2) Для любого максимального набора попарно независимых k-разделяющих множеств R_1, R_2, ... , R_n соответствующее дерево блоков состоит из множества R_1 и деревьев $B(G_1^*)$, $B(G_2^*)$, ... , $B(G_m^*)$, где G_1, G_2, ... , G_m – компоненты графа G, образующиеся при разрезе по R_1, а под деревом блоков $B(G_i^*)$ понимается дерево блоков, которое соответствует набору k-разделяющих множеств, принадлежащих набору R_1, R_2, ... , R_n и содержащихся в G_i^*.

3) Легко видеть, что висячим вершинам дерева блоков соответствуют минимальные компоненты графа G.

Для доказательства последующих результатов изучим свойства зависимых k-разделяющих множеств. Пусть R и T – два зависимых k-разделяющих множества в слабо нерасщепимом k-связном графе G. Пусть $P = R \cap T$. Предположим, что при разрезе по T образуются компоненты F_1, F_2, ... , F_n. Пусть в компоненте F_i содержится часть R_i множества R. Тогда $R = (\cup_{i=1}^n R_i) \cup P$. Пусть при разрезе по R образуются компоненты H_1, H_2, ... , H_m, причем компонента H_i содержит часть T_i множества T. Тогда $T = (\cup_{i=1}^m T_i) \cup P$.

Пусть $G_{ij} = F_i \cap H_j$, $S_{ij} = R_i \cup T_j \cup P$. Тогда множество S_{ij} отделяет от остальных вершин графа G компоненту G_{ij} (отметим, что количество вершин в S_{ij} не обязательно равно k).

Лемма 14. *Пусть R и T – два зависимых k-разделяющих множества в слабо нерасщепимом k-связном графе G. Тогда каждое из множеств R и T разбивает граф G ровно на две компоненты и эти компоненты можно занумеровать так, что множества S_{12} и S_{21} будут содержать по k элементов.*

Доказательство. Пусть в множестве $P = R \cap T$ ровно p вершин. Докажем, что $R_i \neq \varnothing$ ни для какого i. Предположим противное, пусть $R_i = \varnothing$. Тогда при разрезе графа G по R все вершины связного графа F_i окажутся в одной компоненте. Но по лемме 7 каждая из вершин T смежна хотя бы с одной вершиной из F_i, то есть R не разделяет T, что противоречит лемме 10. Аналогично, $T_i \neq \varnothing$ ни для какого i.

Предположим, что $n > 2$ или $m > 2$. Рассмотрим произвольную пару множеств S_{ij} и S_{xy} таких, что $i \neq x$ и $j \neq y$. Заметим, что количество элементов в множествах S_{ij} и S_{xy} в сумме меньше, чем $2k$. Следовательно, одно из этих множеств содержит менее, чем k элементов. Пусть это множество S_{ij}, которое отделяет от остальных вершин графа G множество G_{ij}. Тогда, из k-связности графа G следует, что $G_{ij} = \varnothing$.

Таким образом, мы доказали, что в случае $n > 2$ или $m > 2$ при $i \neq x$ и $j \neq y$ одно из множеств G_{ij} или G_{xy} пусто. Расположим все множества G_{ij} (где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) в виде таблицы $n \times m$. Из доказанного выше следует, что все непустые из рассматриваемых множеств расположены в одной строке или в одном столбце нашей таблицы, то есть, лежат в одной из компонент F_i или H_j.

Не умаляя общности предположим, что все непустые множества лежат внутри F_1, откуда следует, что $F_2 = R_2, \ldots, F_n = R_n$. Но тогда разделяющее множество R содержит компоненты F_2, $F_3, \ldots, F_n$, что противоречит лемме 5. Таким образом мы получили, что $m = n = 2$, причем все непустые множества G_{ij} не могут лежать внутри одной компоненты.

Итак, можно считать, что оба множества G_{12} и G_{21} непусты (в противном случае компоненты можно перенумеровать так, чтобы это условие выполнялось). Поскольку компонента G_{ij} выделяется в графе G при разрезе по S_{ij}, в каждом из множеств S_{12} и S_{21} должно быть не менее, чем k вершин. Однако, в S_{12} и S_{21} вместе ровно $2k$ вершин, следовательно, каждое из них является k-разделяющим множеством в графе G. $\square$

Теорема 6. *Для любых двух деревьев блоков слабо нерасщепимого k-связного графа G существует взаимно однозначное соответствие между входящими в них блоками, такое что соответствующие блоки изоморфны, а их внутренности совпадают.*

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству вершин в графе. База для $(k+1)$-связного графа очевидна, докажем переход. В индукционном переходе мы будем пользоваться утверждением теоремы для некоторых графов вида H^* (где H – квазикомпонента графа G). Такие графы могут не быть слабо нерасщепимыми. Однако, по леммам 9 и 10, любое k-разделяющее множество в H^* – это k-разделяющее множество графа G, независимое со всеми k-разделяющими множествами, по которым уже проведен разрез при построении H^*, и следовательно, любая компонента в H^* является компонентой в G. Следовательно, для таких графов мы можем использовать описание пар зависимых k-разделяющих множеств, данное в лемме 14.

Рассмотрим две последовательности разрезов $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Заметим, что если R_1 совпадает с T_1, то утверждение теоремы выполнено, поскольку по замечанию 2 к определению 9 соответствующие деревья блоков будут состоять из множества R_1 и деревьев блоков графов $G_1^*, G_2^*, \ldots, G_s^*$, где G_1, $G_2, \ldots, G_s$ – компоненты, на которые R_1 делит G. Но между блоками графов $G_1^*, G_2^*, \ldots, G_s^*$, получающимися в результате последовательностей разрезов $R_2, R_3, \ldots, R_n$ и $T_2, T_3, \ldots, T_m$, по индукционному предположению существует требуемое взаимно однозначное соответствие.

Предположим теперь, что R_1 и T_1 различны. Пусть они независимы. Тогда проведем разрез по множеству R_1, затем проведем разрез по множеству T_1, после чего дополним эту последовательность разрезов до разбиения на блоки произвольным набором независимых разделяющих множеств $S_3, S_4, \ldots, S_\ell$. По доказанному выше, для деревьев блоков, соответствующих наборам k-разделяющих множеств $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и $R_1, T_1, S_3, S_4, \ldots, S_\ell$, выполняется утверждение теоремы. Аналогично, для деревьев блоков, соответствующих наборам k-разделяющих множеств $T_1, T_2, \ldots, T_m$ и $T_1, R_1, S_3, S_4, \ldots, S_\ell$, также выполняется утверждение теоремы. Но заметим, что наборы $R_1, T_1, S_3, S_4, \ldots, S_\ell$ и $T_1, R_1, S_3, S_4, \ldots, S_\ell$ отличаются лишь порядком элементов, следовательно соответствующие им деревья блоков совпадают. Таким образом, для деревьев блоков, соответствующих наборам k-разделяющих множеств $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_m$ выполняется утверждение теоремы.

Рассмотрим случай, когда R_1 и T_1 зависимы. По лемме 14, каждое из этих множеств разбивает граф G ровно на две компоненты. Пусть при разрезе по T образуются компоненты F_1 и F_2 (содержащие части R_{11} и R_{12} множества R_1 соответственно), а при разрезе по R образуются компоненты H_1 и H_2 (содержащие части T_{11} и T_{12} множества T_1 соответственно). Пусть $P = R_1 \cap T_1$, $G_{ij} = F_i \cap H_j$, $S_{ij} = R_{1i} \cup T_{1j} \cup P$. Как доказано в лемме 14, можно пронумеровать компоненты так, что множества S_{12} и S_{21} являются k-разделяющими в графе G.

Предположим, что первый разрез был по T_1. По индукционному предположению, в каждом из полученных при этом разрезе

k-связных графов F_1^* и F_2^* блоки, входящие в их деревья блоков, не зависят от выбора максимального набора k-разделяющих множеств и от порядка разрезов. Проведем в них разрезы по S_{12} и S_{21} соответственно. В результате получится следующее дерево блоков $B(G; T_1, S_{12}, S_{21})$: разделяющее множество T_1 смежно псевдоблокам G_{11}^* и G_{22}^*, которые кроме T_1 смежны разделяющим множествам S_{12} и S_{21} соответственно. При этом разделяющему множеству S_{12} смежен также псевдоблок G_{12}^*, а разделяющему множеству S_{21} – псевдоблок G_{21}^*, последние два псевдоблока являются в дереве $B(G; T_1, S_{12}, S_{21})$ висячими вершинами.

Аналогично, в результате разрезов по k-разделяющим множествам R_1, S_{12} и S_{21} получится следующее дерево блоков $B(G; R_1, S_{12}, S_{21})$: разделяющее множество R_1 смежно псевдоблокам G_{11}^* и G_{22}^*, которые кроме R_1 смежны разделяющим множествам S_{21} и S_{12} соответственно. При этом разделяющему множеству S_{12} смежен также псевдоблок G_{12}^*, а разделяющему множеству S_{21} – псевдоблок G_{21}^*, последние два псевдоблока являются в дереве $B(G; R_1, S_{12}, S_{21})$ висячими вершинами.

Заметим, что для получившихся деревьев внутренние квазикомпоненты входящих в них блоков совпадают. Более того, графы G_{12}^* и G_{21}^* в обоих случаях будут одинаковы (граничными множествами для соответствующих компонент будут S_{12} и S_{21} соответственно). Графы G_{11}^* и G_{22}^* будут зависеть от того, какой способ разрезания мы применили. Но при этом получающиеся графы будут изоморфны. Действительно, множества вершин графов G_{11}^*, полученных в результате рассматриваемых способов разрезания, отличаются лишь множествами R_{12} и T_{12}, содержащими одинаковое число вершин. При этом отношение смежности вершин, не входящих в эти множества, в обоих случаях одинаково, а вершины этих множеств смежны с теми и только теми вершинами G_{11}^*, которые являются граничными (они не могут быть смежны вершинам G_{11}, так как R_{12} и G_{11} лежат в разных компонентах связности относительно T_1, а T_{12} и G_{11} лежат в разных компонентах связности относительно R_1). Следовательно, получающиеся в результате двух указанных выше способов разрезов графы G_{11}^* изоморфны. Аналогичное рассуждение верно и для графов G_{22}^*.

Итак, после разрезов по R_1, S_{12}, S_{21} и по T_1, S_{12}, S_{21} у нас получились деревья блоков, у которых соответствующие псевдоблоки изоморфны, а их внутренние квазикомпоненты совпадают. Следовательно, при любом разбиении этих псевдоблоков на блоки получатся деревья блоков, для которых выполняется утверждение теоремы. Следовательно, утверждение теоремы выполнено для деревьев блоков, соответствующих наборам k-разделяющих множеств вида R_1, S_{12}, S_{21}, S_4, ... , S_ℓ и T_1, S_{12}, S_{21}, S'_4, ... , S'_f, а значит, по доказанному выше, и для деревьев блоков, соответствующих наборам R_1, R_2, ... , R_n и T_1, T_2, ... , T_m. $\square$

Построенные выше деревья блоков являются обобщением на случай k-связности известных конструкций для блоков связного графа. В теоремах 4 и 5 мы доказали, что удаление внутренней вершины любого блока не ведет к потере k-связности и одновременное удаление внутренних вершин из нескольких крайних блоков (то есть, из минимальных компонент) не ведет к потере k-связности. Эти свойства обобщают свойства блоков связного графа (см. [1, стр. 41–46] и [2, стр. 105–121]).

3.3 Удаление нескольких вершин. В заключение работы мы докажем еще одну теорему об одновременном удалении вершин из разных блоков, обобщающую результат теоремы 4.

Определение 10. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф, а H^* – произвольный блок этого графа. Обозначим через $R_2(H)$ множество всех граничных вершин блока H^*, которые принадлежат хотя бы двум различным граничным k-разделяющим множествам.*

Назовем блок H^* полным, если $|H| > |R_2(H)|$.

Замечание. Блок, границу которого составляет одно k-разделяющее множество, всегда полный. Непустой блок, никакие два граничных k-разделяющих множества которого не пересекаются, также всегда является полным.

Теорема 7. *Пусть G – слабо нерасщепимый k-связный граф, причем степень любой из вершин, входящих в одно из его k-разделяющих множеств не менее, чем $2k-1$. Пусть $B(G)$ – дерево блоков графа G. Тогда в каждом полном блоке дерева $B(G)$ можно выбрать по одной внутренней вершине так, чтобы при удалении любого набора, состоящего из выбранных вершин (в том числе и всех выбранных вершин), k-связность сохранится.*

Доказательство. Опишем процесс выбора вершины в блоке H^*, таком что $R_2(H) \neq \varnothing$ (при $R_2(H) = \varnothing$ можно выбрать произвольную внутреннюю вершину блока).

Пусть $R_2(H) = \{D_1, \dots, D_q\}$. Рассмотрим вершину D_1 и отметим в H одну из смежных с ней вершин (если такие есть). Потом рассмотрим вершину D_2, и отметим в H одну из неотмеченных вершин, смежных с D_2 (если такая вершина есть). И так далее, на i шаге мы отметим в квазикомпоненте H одну из еще не отмеченных вершин, смежных с D_i (если такие вершины есть). Таким образом, окажутся отмеченными не более, чем $|R_2(H)|$ вершин из H, следовательно, останется неотмеченной хотя бы одна из вершин H. Мы выберем любую из неотмеченных вершин квазикомпоненты H. Таким образом, все вершины множества $R_2(H)$, не имеющие смежных вершин в H после удаления из H выбранной вершины, не имели смежных вершин в H и до удаления.

Предположим противное, пусть при удалении некоторого множества из выбранных вершин k-связность нарушится. Тогда существует минимальный по включению набор $\mathfrak{A}$ из выбранных вершин, при удалении которого теряется k-связность. Пусть этот набор состоит из вершин A_1, A_2, ... , A_n, принадлежащих различным минимальным квазикомпонентам H_1, H_2, ... , H_n соответственно. Пусть R_1, R_2, ... , R_m – все k-разделяющие множества, которые разделяют набор $\mathfrak{A}$. Пусть

$$\widetilde{G} = G - \mathfrak{A}, \quad R = \cap_{i=1}^{m} R_i.$$

Пусть в графе $\widetilde{G}$ существует состоящее не более чем из $k-1$ вершин разделяющее множество T. По лемме 8, при удалении из $\widetilde{G}$ вершин множества T, все неудаленные вершины, не входящие в R, и более половины неудаленных вершин множества R попадут в одну компоненту связности. Пусть при удалении вершин множества T образовалась компонента R', содержащаяся в R. По лемме 8, количество вершин в R' не превосходит $\frac{k-1}{2}$. Пусть ℓ – количество таких i, для которых квазикомпонента H_i имеет вершину, смежную хотя бы с одной из вершин R'. Не умаляя общности предположим, что эти номера – от 1 до ℓ. Упорядочим квазикомпоненты H_1, H_2, ... , H_ℓ таким образом, чтобы для всех i от 1 до s выполнялось соотношение $R' \subset R_2(H_i)$, а для остальных квазикомпонент H_j такое соотношение не выполнялось.

Нетрудно заметить, что для каждой квазикомпоненты H_j (при j от $s+1$ до ℓ) существует единственное граничное k-

разделяющее множество R_x, которое разделяет набор удаленных вершин $\mathfrak{A}$. Следовательно, это множество отделяет квазикомпоненту H_j от остальных рассматриваемых квазикомпонент. Обозначим такое множество R_x через $P(H_j)$. Пусть при разрезе графа G по k-разделяющему множеству $P(H_j)$ квазикомпонента H_j попадает в компоненту G_j, рассмотрим граф $\widetilde{G}_j = G_j - A_j$. Поскольку по теореме 5 граф G не теряет k-связность при удалении A_j, то граф $\widetilde{G}_j^*$ является k-связным. Отметим, что при $j \neq i$

$$G_j \cap H_i = \varnothing, \quad G_i \cap G_j = \varnothing.$$

Докажем, что в множестве T должно быть не менее, чем k вершин. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\ell \geq k$. Докажем, что в множестве T должно быть хотя бы по одной вершине из $H_1, \ldots, H_s, G_{s+1}, \ldots, G_\ell$. Предположим противное. Пусть в множество T не вошло ни одной вершины из квазикомпоненты H_i, где $1 \leq i \leq s$. Изначально в H_i была вершина, смежная с одной из вершин B отделившегося множества R'. Поскольку $B \in R' \subset R_2(H_i)$, выбранная нами в H_i вершина A_i такова, что и после удаления A_i вершина B будет смежна с одной из вершин H_i, что противоречит предположению об отделении R'.

Предположим, что в множество T не вошло ни одной вершины из компоненты G_i, где $s < i \leq \ell$. Однако, по лемме 7 каждая вершина множества R' смежна хотя бы с одной из вершин $\widetilde{G}_i$, что противоречит предположению об отделении R'.

Следовательно, в этом случае в разделяющем множестве T должно быть хотя бы по одной вершине из $H_1, \ldots, H_s, G_{s+1}, \ldots, G_\ell$, то есть, не менее, чем k вершин.

2) Пусть $\ell \leq k-1$, а множество R' содержит p вершин. Каждая вершина графа R' в графе G может быть соединена с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$, вершинами множества T и остальными $p-1$ вершинами из R'. Учитывая, что такая вершина по условию должна быть соединена не менее, чем с $2k-1$ вершиной, получаем неравенство

$$2k-1 \leq p-1+\ell+k-1 \leq p-1+2(k-1), \qquad (3.1)$$

откуда немедленно следует $p \geq 2$.

Рассмотрим компоненты G_i, где $s < i \leq \ell$. Заметим, что удалив из k-связного графа $\widetilde{G}_i^*$ все $k-p$ вершин множества $P(H_i)$, не вошедшие в R', мы получим p-связный граф. Следовательно, чтобы отделить в этом графе вершины множества R' от остальных, нужно удалить из него как минимум p вершин, то есть для потери связности графа $\widetilde{G}$ из этих компонент всего нужно удалить не менее, чем $p(\ell - s)$ вершин.

Проведем подсчет суммы степеней вершин множества R'. Рассмотрим квазикомпоненту H_i (где $1 \leq i \leq \ell$). Пусть после удаления A_i в квазикомпоненте H_i осталось t_i вершин, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества R'. Следовательно, в разделяющее множество T должны войти как минимум t_i вершин из H_i. Поскольку множество T содержит $k-1$ вершину, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{s} t_i + p(\ell - s) \leq k - 1. \qquad (3.2)$$

Докажем, что удаленная из H_i вершина A_i была смежна не более, чем с t_i вершинами из R'. Предположим противное. Пусть в процессе выбора вершины A_i (для удаления из H_i) мы в некотором порядке рассмотрели все вершины множества R' и на каждом из этих шагов мы отмечали одну из еще не отмеченных к этому моменту вершин, смежных с рассматриваемой вершиной из R'. Поскольку оказалось отмечено не более, чем t_i вершин, смежных хотя бы с одной из вершин R', то мы отмечали вершины не более, чем на t_i шагах, сделанных с вершинами из R'. Однако, если в R' есть более, чем t_i вершин, смежных с A_i, то при рассмотрении одной из этих вершин мы не отметили ни одной вершины. Но это невозможно, поскольку в этот момент была неотмеченная вершина смежная рассматриваемой (вершина A_i).

Значит, A_i смежна не более, чем с t_i вершинами из R'. Сложив неравенства для квазикомпонент H_1, H_2, ... , H_ℓ, мы получим, что от удаленных вершин A_1, A_2, ... , A_s к вершинам множества R' выходило не более, чем $\sum_{i=1}^{s} t_i$ ребер, а от вершин A_{s+1}, A_{s+2}, ... , A_ℓ – не более, чем $p(\ell - s)$ ребер. Заметим, что вершина из множества R' может быть смежна только с удаленными вершинами A_1, A_2, ... , A_ℓ, вершинами $(k-1)$-разделяющего множества T и другими вершинами из R'. Учитывая, что степень каждой вершины множества R' должна быть не менее $2k-1$ и неравенство (3.2), мы получим неравенство на суммарную степень вершин R'

$$p(2k-1) \leq p(p-1)+p(k-1)+\sum_{i=1}^{\ell} t_i+p(\ell-s) \leq p(p-1)+(p+1)(k-1),$$

откуда непосредственно следует

$$p-1 \geq 2k-1-\frac{p+1}{p}(k-1) \geq 2k-1-\frac{3}{2}(k-1)=\frac{k+1}{2}. \qquad (3.3)$$

Однако, неравенство (3.3) противоречит лемме 8. Следовательно, и в этом случае граф $\widetilde{G}$ оказывается k-связным, что противоречит выбору набора вершин $\mathfrak{A}$.

Это означает, что при удалении любого множества из отмеченных вершин k-связность не нарушается. $\square$

Замечание. Нетрудно заметить, что выбор удаляемой вершины из любой минимальной компоненты в теореме 7 произволен, как и в теореме 4.

Литература

1. Ф. Харари, *Теория графов.* М., Мир, 1973.
2. О. Оре, *Теория графов.* М., Наука, 1968, Перевод с английского: О. Оре, Тхеоры оф грапхс, 1962.
3. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n-connected graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. **32** no. 1 (1972).
4. R. Halin, *A theorem on n-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** no. 2 (1969).

Karpov D. V., Pastor A. V. On the structure of k-connected graphs.

For k-connected graph we determine a notion of block and build a block tree. These constructions generalize well known and important in graph theory notion of block for the case of k-connected graph. With the help of these notions we describe such set W of vertices of k-connected graph, that one can delete from graph any subset of W without less of vertex connectivity.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Email dvk@pdmi.ras.ru
Email pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 1999 г.