Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

Г. А. Леонов

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ОЦЕНКАХ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Настоящая статья является текстом доклада, прочитанного на Рохлинском мемориале в августе 1999 года.

Числовыми характеристиками для гармонических колебаний являются амплитуда, период, частота, для периодических колебаний – их период. В результате многочисленных исследований стало ясно, что и более сложные колебания обладают числовыми характеристиками. Это – размерности аттракторов, соответствующих ансамблям таких колебаний.

Развитая в первой половине двадцатого века теория топологической размерности [1, 2] мало пригодна для того, чтобы дать шкалу размерностных характеристик аттракторов. Дело в том, что топологическая размерность может принимать лишь целочисленные значения, и составленная таким образом шкала размерностных характеристик оказывается слишком бедной.

Для исследования аттракторов более адекватной оказалось хаусдорфова размерность множеств. Эта размерностная характеристика может принимать любые неотрицательные значения и на таких привычных объектах в евклидовом пространстве как гладкая кривая, поверхность, счетное множество точек, совпадает с топологической размерностью.

Часто аттракторы, имеющие нецелую хаусдорфову размерность, называют странными. К настоящему времени с помощью компьютерных экспериментов открыто большое количество странных аттракторов, описывающих сложные колебания, наблюдаемые в природе и технике [3–6].

Перейдем теперь к определению хаусдорфовой размерности множеств.

Рассмотрим компактное метрическое пространство X с метрикой ρ, подмножество $E \subset X$ и числа $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

Покроем E шарами с радиусами $r_j < \varepsilon$ и обозначим

$$\mu_H(E, d, \varepsilon) = \inf \sum_j r_j^d,$$

где инфимум берется по всем таким ε-покрытиям E.

Очевидно, что $\mu_H(E, d, \varepsilon)$ не убывает при уменьшении ε. Поэтому существует предел (возможно бесконечный)

$$\mu_H(E, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_H(E, d, \varepsilon).$$

Определение 1. *Функция $\mu_H(\cdot, d)$ называется d-мерой Хаусдорфа.*

При фиксированном d функция $\mu_H(E, d)$ обладает всеми свойствами внешней меры на X.

При фиксированном множестве E функция $\mu_H(E, \cdot)$ обладает следующим свойством. Существует такое $d_{kp} \in [0, \infty]$, что

$$\mu_H(E, d) = \infty, \quad \forall\, d < d_{kp},$$
$$\mu_H(E, d) = 0, \quad \forall\, d > d_{kp}.$$

Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то $d_{kp} \le n$. Здесь $\mathbb{R}^n$ – евклидово n-мерное пространство.

Положим

$$\dim_H E = d_{kp} = \inf \bigl\{ d |\ \mu_H(E, d) = 0 \bigr\}.$$

Определение 2. *Величина $\dim_H E$ называется размерностью Хаусдорфа множества E.*

Пример 1. Рассмотрим канторово множество

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} E_j,$$

где $E_0 = [0, 1]$ и E_j состоит из 2^j отрезков длины 3^{-j}, получаемых из отрезков, входящих в E_{j-1}, удалением из них середин открытых интервалов длины 3^{-j} (рис. 1).

В классической теории топологической размерности хорошо известно, что $\dim_T E = 0$.

Непосредственно из определения хаусдорфовой размерности легко получить, что $\mu_H(E, d) = 1$ при $d = \log 2 / \log 3 = 0,6309\ldots$ и, следовательно,

$$\dim_H E = \frac{\log 2}{\log 3}\,.$$

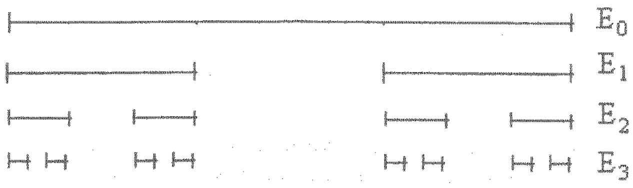

Рис. 1

Топологическая размерность является инвариантом по отношению к гомеоморфизмам. Хаусдорфова размерность является инвариантом по отношению к диффеоморфизмам, и нецелая хаусдорфова размерность не является инвариантом по отношению к гомеоморфизмам [2].

При исследовании аттракторов динамических систем в фазовом пространстве часто используются гладкие замены координат. Поэтому в таких рассмотрениях достаточно инвариантности по отношению к диффеоморфизмам.

Хорошо известно, что $\dim_T E \leq \dim_H E$. Канторовское множество E дает пример, когда это неравенство является строгим.

Приведем теперь два эквивалентных определения фрактальной размерности.

Обозначим через $\mathcal{N}_\varepsilon(E)$ минимальное число шаров радиуса ε, необходимое для покрытия множества $E \subset X$.

Введем в рассмотрение числа $d \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и положим

$$\mu_F(E, d, \varepsilon) = \mathcal{N}_\varepsilon(E)\varepsilon^d,$$
$$\mu_F(E, d) = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \mu_F(E, d, \varepsilon).$$

Определение 3. *Фрактальной размерностью множества E называется величина*

$$\dim_F E = \inf\{d \mid \mu_F(E, d) = 0\}.$$

Заметим, что это определение проведено по схеме, аналогичной определению хаусдорфовой размерности. Здесь только покрытие проводится шарами одного и того же радиуса ε.

Определение 4. *Фрактальной размерностью множества E называется величина*

$$\dim_F E = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathcal{N}_\varepsilon(E)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Легко видеть, что

$$\dim_H E \le \dim_F E.$$

Пример 2. Для $X = [0,1]$ и $E = \{0, 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots\}$

$$\dim_H E = 0, \quad \dim_F E = \frac{1}{2}\,.$$

Обобщения схем введения хаусдорфовой и фрактальной меры и размерности и определения различных метрических размерностных характеристик даны в [7].

Оказалось [8–13], что верхней оценкой хаусдорфовой и фрактальной размерности инвариантных множеств является ляпуновская размерность. Дадим здесь определение ляпуновской размерности.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое отображение F множества $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через T_xF матрицу Якоби отображения F в точке x. Из непрерывной дифференцируемости F следует соотношение

$$F(x+h) - F(x) = (T_xF)h + o(h).$$

В дальнейшем будем предполагать, что множество $K \subset U$ инвариантно относительно преобразования $F: \ F(K) = K$.

Введем в рассмотрение сингулярные числа $n \times n$-матрицы A

$$\alpha_1(A) \ge \dots \ge \alpha_n(A).$$

Напомним, что сингулярным числом матрицы A называется квадратный корень из собственного значения матрицы A^*A. Здесь через $*$ обозначена операция транспонирования (в вещественном случае) или эрмитова сопряжения.

Определение 5. *Локальной ляпуновской размерностью отображения F в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L(F,x) = j + s,$$

где j – наибольшее целое число из отрезка $[1,n]$, для которого

$$\alpha_1(T_xF)\dots\alpha_j(T_xF) \ge 1,$$

и число $s \in [0,1]$, для которого

$$\alpha_1(T_xF)\dots\alpha_j(T_xF)\alpha_{j+1}(T_xF)^s = 1.$$

В случае $\alpha_1(T_xF) < 1$ по определению имеем $\dim_L(F,x) = 0$, и в случае

$$\alpha_1(T_xF)\dots\alpha_n(T_xF) \geq 1$$

по определению $\dim_L(F,x) = n$.

Определение 6. *Ляпуновской размерностью отображения F множества K назовем число*

$$\dim_L(F,K) = \sup_K \dim_L(F,x).$$

Определение 7. *Локальной ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \varlimsup_{i\to+\infty} \dim_L(F^i,x).$$

Определение 8. *Ляпуновской размерностью последовательности отображений F^i множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x.$$

Для отображений F_t, зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}^1$, можно ввести следующие аналоги определений 7 и 8.

Определение 9. *Локальной ляпуновской размерностью отображения F_t в точке $x \in K$ назовем число*

$$\dim_L x = \varlimsup_{t\to+\infty} \dim_L(F_t,x).$$

Определение 10. *Ляпуновской размерностью отображения F_t множества K назовем число*

$$\dim_L K = \sup_K \dim_L x.$$

Еще раз отметим, что важным свойством ляпуновской размерности является неравенство [11–13] $\dim_F K \leq \dim_L K$.

Таким образом,

$$\dim_T K \leq \dim_H K \leq \dim_F K \leq \dim_L K.$$

Отметим также, что ляпуновская размерность может служить характеристикой внутренней неустойчивости динамической системы, определенной на инвариантном множестве K и порожденной семейством отображений F^i или F_t.

Ляпуновская размерность является инвариантом по отношению к линейным ортогональным операторам. Иногда это приводит к поискам некоторого "хорошего" (или наилучшего в некотором смысле) базиса при исследовании конкретных динамических систем.

Здесь следует отметить, что переходя от топологической размерности к хаусдорфовой, мы уже нарушили нашу топологическую девственность, отдавая себе отчет в том, что хаусдорфова размерность не инвариантна относительно гомеоморфизмов. Введение ляпуновской размерности является следующим шагом в прагматическом подходе к исследованию динамических систем: ляпуновская размерность не является размерностной характеристикой в классическом смысле, однако позволяет, во-первых, эффективно оценивать сверху топологическую, хаусдорфову и фрактальную размерности, во-вторых, является характеристикой неустойчивости динамических систем, и, в-третьих, хорошо "приспособлена" для исследований методами классической теории устойчивости движения.

Продемонстрируем это, введя в оценки ляпуновской размерности функции Ляпунова. Впервые идеи введения функций Ляпунова в оценки размерностных характеристик были высказаны в работе [14] и в дальнейшем развивались в [15–20, 9, 10]. Здесь мы в основном следует этим идеям.

Введем в рассмотрение непрерывно дифференцируемую функцию $p(x) : U \to \mathbb{R}^1$, для которой будем предполагать выполнение следующего условия

$$p_1 \le p(x) \le p_2, \quad \forall\, x \in U.$$

Здесь p_1 и p_2 – положительные числа.

Пусть j – целое число из промежутка $[1, n]$, $s \in [0,1)$, $d = j + s$, A – $n \times n$-матрица,

$$\omega_d(A) = \alpha_1(A) \dots \alpha_j(A) \alpha_{j+1}(A)^s,$$

$$\omega(d, K, p, F) = \sup_K \omega_d \left(\frac{p(F(x))}{p(x)} T_x F \right).$$

Теорема 1. *Если* $F(K) = K$ *и выполнено неравенство*

$$\omega(d, K, p, F) < 1, \tag{1}$$

то для достаточно больших натуральных i *справедлива оценка*

$$\dim_L(F^i, K) \le d. \tag{2}$$

Доказательство. Для двух $n \times n$-матриц A и B хорошо известно [21] неравенство

$$\omega_d(AB) \le \omega_d(A)\omega_d(B). \tag{3}$$

Используя соотношение

$$T_x F^i = \left(T_{F^{i-1}(x)}F\right)\left(T_{F^{i-2}(x)}F\right)\dots\left(T_x F\right),$$

получим равенство

$$T_x F^i = \frac{p(x)}{p(F^i(x))}\left(\frac{p(F^i(x))}{p(F^{i-1}(x))}\,T_{F^{i-1}(x)}F\right)\dots\left(\frac{p(F(x))}{p(x)}\,T_x F\right).$$

Отсюда и из неравенства (3) следует оценка

$$\omega_d(T_x F^i) \le \sup_K \left(\frac{p(x)}{p(F^i(x))}\right)^d \omega(d, K, p, F)^i.$$

Из этого неравенства, условия (1) и определения ляпуновской размерности получим оценку (2).

Как будет показано в дальнейшем, множители вида

$$\frac{p(F(x))}{p(x)}$$

в условии (1) играют роль функций ляпуновского типа. Особенно наглядно это проявляется при переходе к динамическим системам, порождаемым дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}^1, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где $f(t,x)$ – непрерывно дифференцируемая T-периодическая вектор-функция $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(t+T, x) = f(t, x)$.

Будем предполагать, что решение $x(t, x_0)$ системы (4) с начальными данными $x(0, x_0) = x_0$ определено на промежутке $[0, T]$, и обозначим через G_T оператор сдвига по решениям системы (4):

$$G_T q = x(T, q).$$

Будем предполагать, что для некоторого множества K выполнено соотношение

$$G_T K = K.$$

Обозначим через $J(t, x)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(t, x)$:

$$J(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\,.$$

Пусть $\lambda_1(t, x) \geq \cdots \geq \lambda_n(t, x)$ – собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2}\left(J(t, x) + J(t, x)^*\right).$$

Здесь $*$ означает операцию транспонирования.

Теорема 2. *Предположим, что существует целое число $j \in [1, n]$, число $s \in [0, 1)$ и непрерывно дифференцируемая функция $v(x)$ такие, что выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}\sup_{q\in K} \int\limits_0^T \big(\lambda_1(t, x(t, q)) + \cdots + \lambda_j(t, x(t, x)) +{}& \\ + s\lambda_{j+1}(t, x(t, q)) + \dot v(x(t, q))\big)\, dt < 0.&\end{aligned} \tag{5}$$

Тогда для достаточно больших натуральных i выполнено неравенство

$$\dim_L(G_T^i, K) \leq j + s. \tag{6}$$

При анализе динамических систем в духе прямого метода Ляпунова вместо неравенства (5) часто удобнее использовать более грубое условие

$$\begin{aligned}\sup_{q\in K} \big(\lambda_1(t, x(t, q)) + \cdots + \lambda_j(t, x(t, x)) +{}& \\ + s\lambda_{j+1}(t, x(t, q)) + \dot v(x(t, q))\big) < 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1.&\end{aligned} \tag{7}$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется один факт, справедливый для линейной системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \tag{8}$$

где $A(t)$ – вещественная непрерывная $n \times n$-матрица, $X(t)$ – $n \times n$-матрица, являющаяся решением системы (8) с начальным условием $X(0) = I$.

Обозначим через $\lambda_1(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ собственные значения матрицы

$$\frac{1}{2}\left(A(t) + A(t)^*\right)$$

и через $\sigma_1(t) \geq \cdots \geq \sigma_n(t)$ – сингулярные значения матрицы $X(t)$.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\sigma_1(t)\ldots\sigma_j(t) \leq \exp\left(\int\limits_0^t \left(\lambda_1(\tau) + \cdots + \lambda_j(\tau)\right) d\tau\right). \tag{9}$$

Доказательство. Легко видеть, что числа $\sigma_k(t + \Delta t)$ являются сингулярными значениями матрицы

$$X(t + \Delta t) = \big(I + A(t)\Delta t + o(\Delta t)\big)X(t).$$

Отсюда и из неравенства (3) следует, что

$$\sigma_1(t + \Delta t)\ldots\sigma_j(t + \Delta t) \leq \beta_1 \ldots \beta_j \sigma_1(t)\ldots\sigma_j(t), \tag{10}$$

где β_k – сингулярные значения матрицы $I + A(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

Напомним, что β_k^2 – это собственное значение матрицы

$$\begin{aligned}&\big(I + A(t)\Delta t + o(\Delta t)\big)^*\big(I + A(t)\Delta t + o(\Delta t)\big) = \\ &= I + \big(A(t)^* + A(t)\big)\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

Таким образом, $\beta_k^2 = 1 + 2\lambda_k(t)\Delta t + o(\Delta t)$ и, следовательно,

$$\beta_k = 1 + \lambda_k(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда и из (10) следует неравенство

$$\sigma_1(t+\Delta t)\ldots\sigma_j(t+\Delta t) \leq \left(1+\Delta t\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(t)+o(\Delta t)\right)\sigma_1(t)\ldots\sigma_j(t). \tag{11}$$

Из неравенства (11) вытекает соотношение

$$\frac{d}{dt}\left[\sigma_1(t)\dots\sigma_j(t)\right] \le \left(\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(t)\right)\left[\sigma_1(t)\dots\sigma_j(t)\right]. \tag{12}$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (12), получим неравенство (9).

Заметим, что приведенное здесь доказательство неравенства (9) более естественно и гораздо проще, чем доказательства, приведенные в [9, 10].

Доказательство теоремы 2. Введем обозначение

$$H(t,q) = \frac{\partial x(t,q)}{\partial q}\,.$$

Подставляя решение $x(t,q)$ в уравнение (4) и дифференцируя обе части по q, получим

$$\frac{dH(t,q)}{dt} = J(t,x(t,q))H(t,q).$$

Для сингулярных значений $\sigma_1(t) \ge \dots \ge \sigma_n(t)$ матрицы $H(t,q)$ по лемме имеем неравенство

$$\sigma_1\dots\sigma_k \le \exp\left(\int_0^t(\lambda_1+\dots+\lambda_k)\,d\tau\right)$$

для любого $k=1,\dots,n$. Отсюда и из равенства

$$\sigma_1\dots\sigma_j\sigma_{j+1}^s = (\sigma_1\dots\sigma_j)^{1-s}(\sigma_1\dots\sigma_{j+1})^s$$

получим оценку

$$\sigma_1\dots\sigma_j\sigma_{j+1}^s \le \exp\left(\int_0^t(\lambda_1+\dots+\lambda_j+s\lambda_{j+1})\,d\tau\right). \tag{13}$$

Положим

$$p(x) = \big(\exp v(x)\big)^{1/(j+s)}$$

и умножим обе части неравенства (13) на выражение

$$\left(\frac{p(x(t,q))}{p(q)}\right)^{j+s} = \exp\left[v(x(t,q)-v(q)\right] = \exp\left(\int_0^t \dot v(x(\tau,q))\,d\tau\right).$$

В результате получим неравенство

$$\left(\frac{p(x(t,q))}{p(q)}\right)^{j+s} \sigma_1 \ldots \sigma_j \sigma_{j+1}^s \le$$

$$\le \exp\left(\int\limits_0^t (\lambda_1 + \cdots + \lambda_j + s\lambda_{j+1} + \dot{v}(x,\tau,q))\, d\tau\right).$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{gathered}\alpha_1(t,q)\ldots\alpha_j(t,q)\alpha_{j+1}(t,q)^s \le \exp\left(\int\limits_0^t \big(\lambda_1(\tau, x(\tau,q)) + \cdots + \right.\\ \left. + \lambda_j(\tau, x(\tau,q)) + s\lambda_{j+1}(\tau, x(\tau,q)) + \dot{v}(x(\tau,q))\big)\, d\tau\right),\end{gathered} \tag{14}$$

где $\alpha_k(t,q)$ – сингулярные числа матрицы

$$\frac{p(x(t,q))}{p(q)}\, H(t,q).$$

Из оценки (14) и условия (5) теоремы 2 следует существование положительного числа ε такого, что выполнено неравенство

$$\alpha_1(T,q)\ldots\alpha_j(T,q)\alpha_{j+1}(T,q)^s \le \exp(-\varepsilon)$$

для всех $q \in K$.

Таким образом, здесь выполнены условия теоремы 1 с $F = G_T$,

$$T_q F = T_q G_T = H(T,q),$$

и, следовательно, выполнена оценка (6). Теорема 2 доказана.

Применим теперь теоремы 1 и 2 к конкретным динамическим системам, конструируя функции Ляпунова $p(x)$ (в дискретном случае) и $v(x)$ (для динамических систем вида (4)).

После публикаций результатов, аналогичных сформулированным здесь теоремам 1 и 2 [14], началось конструирование ляпуновских функций для оценок размерности инвариантных множеств динамических систем [15–20, 9, 10]. Здесь мы, в основном следуя этим работам, продемонстрируем построение ляпуновских функций для наиболее известных динамических систем с хаотическим поведением: для отображения Хенона, систем Лоренца и Рёсслера.

Рассмотрим отображение Хенона $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &x\to a+by-x^2,\\ &y\to x, \end{aligned} \tag{15}$$

где $a>0$, $b\in(0,1)$ – параметры отображения.

Сделав замену

$$x\to x,\quad y\to y\sqrt{b}\,,$$

перейдем от отображения (15) к отображению F_1:

$$\begin{aligned} &x\to a+\sqrt{b}\ y-x^2,\\ &y\to\sqrt{b}\ x. \end{aligned} \tag{16}$$

Будем здесь рассматривать инвариантные множества K отображения (16): $F_1K=K$, содержащие стационарные точки этого отображения:

$$x_+=\frac{1}{2}\ \left[b-1+\sqrt{(b-1)^2+4a}\ \right],$$

$$x_-=\frac{1}{2}\ \left[b-1-\sqrt{(b-1)^2+4a}\ \right].$$

Теорема 3. *Для отображения F_1 справедливо равенство*

$$\dim_L K=1+\frac{1}{1-\ln b/\ln\alpha_1(x_-)}\,,$$

где

$$\alpha_1(x_-)=\sqrt{x_-^2+b}-x_-.$$

Доказательство. Матрица Якоби T_xF_1 отображения F_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b}\\ \sqrt{b} & 0\end{pmatrix}.$$

Покажем, что сингулярными значениями этой матрицы являются величины

$$\begin{aligned} &\alpha_1(x)=\sqrt{x^2+b}+|x|,\\ &\alpha_2(x)=\sqrt{x^2+b}-|x|=\frac{b}{\alpha_1(x)}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\alpha_1(x)^2 = 2x^2 + b + 2|x|\sqrt{x^2+b}\ ,$$
$$\alpha_2(x)^2 = 2x^2 + b - 2|x|\sqrt{x^2+b}\ .$$

Из этих равенств ясно, что $\alpha_k(x)^2$ являются нулями полинома

$$\lambda^2 - (4x^2 + 2b)\lambda + b^2,$$

который является характеристическим полиномом матрицы

$$\begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказаны формулы (17).

Из теоремы 1 следует, что если существуют число $s \in [0,1)$ и непрерывно дифференцируемая положительная на K функция $p(\xi)$,

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

такие, что выполнено неравенство

$$\sup_{\xi\in K} \alpha_1(x)\alpha_2(x)^s \frac{p(F_1(\xi))}{p(\xi)} < 1, \tag{18}$$

то

$$\dim_L K \le 1 + s.$$

Положим

$$p(\xi) = e^{\gamma(1-s)(x+\sqrt{b}\ y)},$$

где γ – положительный варьируемый параметр.

Легко видеть, что выполнено соотношение

$$\frac{p(F_1(\xi))}{p(\xi)} = e^{\gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)}.$$

Отсюда следует, что после логарифмирования условие (18) принимает вид

$$\sup_K \big[\ln\alpha_1(x) + s\ln\alpha_2(x) + \gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)\big] =$$
$$= \sup_K \big[(1-s)\ln\alpha_1(x) + s\ln b + \gamma(1-s)(a+(b-1)x-x^2)\big] < 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$s \ln b + (1-s)\varphi(x) < 0, \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty),$$

где

$$\varphi(x) = \ln\left[\sqrt{x^2+b} + |x|\right] + \gamma(a + (b-1)x - x^2).$$

Из неравенств $\gamma > 0$, $b-1 < 0$ следует оценка

$$\varphi(-|x|) \ge \varphi(|x|).$$

Поэтому достаточно рассмотреть экстремальные точки функции $\varphi(x)$ при $x \in (-\infty, 0]$. Ясно, что на этом множестве

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+b}} + \gamma\big[(b-1) - 2x\big], \quad \varphi''(x) < 0.$$

Выбрав

$$\gamma = \frac{1}{(b-1-2x_-)\sqrt{x_-^2+b}}\,,$$

получим, что $\varphi'(x_-) = 0$ и, следовательно, при таком выборе γ выполнено неравенство

$$\varphi(x) \le \left(\sqrt{x_-^2+b} + |x_-|\right) = \ln \alpha_1(x_-).$$

Таким образом, неравенство (18) выполнено для всех s, удовлетворяющих условию

$$s > \frac{\ln \alpha_1(x_-)}{\ln \alpha_1(x_-) - \ln b}\,. \tag{19}$$

Следовательно, выполнена оценка

$$\dim_L K \le 1 + s$$

для всех s, удовлетворяющих неравенству (19). Переходя к пределу, получим неравенство

$$\dim_L K \le 1 + \frac{1}{1 - \ln b/\ln \alpha_1(x_-)}\,. \tag{20}$$

Заметим, что точка $x = x_-$, $y = \sqrt{b}\; x_-$ является неподвижной для отображения F_1. При этом

$$\alpha_1(x_-)\alpha_2(x_-)^s = 1,$$

где
$$s = \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}\,.$$
Отсюда следует, что локальная ляпуновская размерность этой стационарной точки равна
$$1 + \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}\,. \tag{21}$$

Из соотношений (20) и (21) следует утверждение теоремы 3.

Обсудим полученный здесь результат.

Варьируемый ляпуновский множитель $p(\xi)$ позволил здесь вычислить ляпуновскую размерность любого инвариантного множества K, содержащего точку $x = x_-$, $y = \sqrt{b}\ x_-$. Без этого множителя (точнее, при $p(\xi) \equiv 1$) приходилось прибегать к локализации инвариантных множеств, чтобы получить лишь верхние оценки ляпуновской размерности [12, 22].

Оказалось, что для системы Лоренца во многих случаях имеется аналогичная ситуация. Введение функций Ляпунова позволяет и для этой системы провести точное вычисление ляпуновской размерности инвариантных множеств.

Рассмотрим систему Лоренца
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{22}$$
где r, b, σ – положительные числа.

Предположим, что выполнены неравенства $r > 1$,
$$b \geq 2, \quad \sigma + 1 \geq b. \tag{23}$$

Заметим, что странные аттракторы системы (22) были обнаружены путем компьютерных экспериментов для параметров $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 4$, $\sigma = 16$, $r = 40$ [3–6].

В предположении (23) систему (22) линейной заменой
$$x \to ax, \quad y \to \frac{a(b-1)}{\sigma}\, x + y, \quad z \to z,$$
где
$$a = \frac{\sigma}{\sqrt{2\sigma + (b-1)(\sigma - b)}}\,,$$

можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (b-\sigma-1)x + \frac{\sigma}{a}\,y,\\
\dot{y} &= \frac{\sigma}{a}\,x - by - axz, \qquad (24)\\
\dot{z} &= -bz + \frac{a^2(b-1)}{\sigma}\,x^2 + axy.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим оператор сдвига по траектория системы (24) G_T, где T — произвольное положительное число. Пусть K – инвариантное множество относительно этого оператора G_T. Будем предполагать, что множество K содержит стационарную точку $x = y = z = 0$.

Дадим здесь формулу для ляпуновской размерности $\dim_L K$ множества K относительно последовательности отображений G_T^i.

Теорема 4. *Пусть выполнены неравенства* (23) *и*

$$r\sigma^2(4-b) + 2\sigma(b-1)(2\sigma-3b) > b(b-1)^2. \qquad (25)$$

Тогда

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(\sigma+b+1)}{\sigma+1+\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}\,. \qquad (26)$$

Доказательство. Матрица Якоби правой части системы (24) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} (b-\sigma-1) & \sigma/a & 0\\ (\sigma/a) - az & -b & -ax\\ \dfrac{2a^2(b-1)}{\sigma}\,x + ay & ax & -b \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристический полином матрицы

$$\frac{1}{2}\,(J^* + J) = \begin{pmatrix} (b-\sigma-1) & \dfrac{\sigma}{a} - \dfrac{a}{2}\,z & \dfrac{a^2(b-1)}{\sigma}\,x + ay\\ \dfrac{\sigma}{a} - \dfrac{a}{2}\,z & -b & 0\\ \dfrac{a^2(b-1)}{\sigma}\,x + \dfrac{a}{2}\,y & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$(\lambda+b)\Biggl\{\left[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+b(\sigma+1-b)-\left(\frac{\sigma}{a}-\frac{az}{2}\right)^2\right]-$$

$$-\left[\frac{a^2(b-1)}{\sigma}\,x+\frac{ay}{2}\right]^2\Biggr\}.$$

Отсюда следует, что собственными значениями матрицы $(J^*+J)/2$ являются величины

$$\lambda_2(x,y,z)=-b,$$

$$\lambda_{1,3}(x,y,z)=-\frac{\sigma+1}{2}\pm\frac{1}{2}\Biggl((\sigma+1-2b)^2+$$

$$+\left(\frac{2\sigma}{a}-az\right)^2+\left(\frac{2a^2(b-1)}{\sigma}\,x+ay\right)^2\Biggr)^{1/2}.$$

Из соотношений (23) легко видеть, что $\lambda_1(x,y,z)\geq\lambda_2(x,y,z)\geq\lambda_3(x,y,z)$.

Введем в рассмотрение функцию ляпуновского типа

$$v(x,y,z)=\frac{1}{2}\,a\theta^2(1-s)\left(\gamma_1x^2+\gamma_2\left((y^2+z^2+\frac{2a(b-1)}{\sigma}\,xy\right)+\gamma_3z\right),$$

где $s\in(0,1)$,

$$\theta^2=\left(2\sqrt{(\sigma+1-2b)^2+\left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2}\right)^{-1},$$

$$\gamma_3=-\frac{4\sigma}{ab}\,,\quad \gamma_2=\frac{a}{2},$$

$$\gamma_1=-\frac{1}{2\sigma}\left[2\gamma_2a^2\,\frac{(r\sigma-b^2+1)}{\sigma}+\gamma_3a^2+4\,\frac{a^3(b-1)}{\sigma}\right].$$

Рассмотрим выражение

$$2\bigl[\lambda_1(x,y,z)+\lambda_2(x,y,z)+s\lambda_3(x,y,z)+\dot v(x,y,z)\bigr]=$$
$$=-(\sigma+1+2b)-s(\sigma+1)+(1-s)\varphi(x,y,z),$$

где

$$\varphi(x,y,z)=\left((\sigma+1-2b)^2+\left(\frac{2\sigma}{a}-az\right)^2+\left(\frac{2a^2(b-1)}{\sigma}\,x+ay\right)^2\right)^{1/2}+$$
$$+\theta^2\left\{\left(2a\gamma_1(b-\sigma-1)+2\gamma_2 a(b-1)+\gamma_3 a^3\frac{b-1}{\sigma}\right)x^2-2a\gamma_2 y^2-\right.$$
$$\left.-2a\gamma_2 bz^2+\left(2\sigma\gamma_1+2\gamma_2\left(a^2\frac{r\sigma-b^2+1}{\sigma}\right)+\gamma_3 a^2\right)xy-\gamma_3 abz\right\}.$$

Используя очевидное неравенство

$$\sqrt{u}\le\frac{1}{4\theta^2}+\theta^2 u,$$

получим оценку

$$\varphi(x,y,z)\le\frac{1}{4\theta^2}+\theta^2\left\{(\sigma+1-2b)^2+\left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2+\right.$$
$$+\left[2a\gamma_1(b-\sigma-1)+2\gamma_2 a(b-1)+\gamma_3 a^3\frac{b-1}{\sigma}+\frac{4a^4(b-1)^2}{\sigma^2}\right]x^2+$$
$$+[a^2-2a\gamma_2]y^2+[a^2-2\gamma_2 ab]z^2+\left[2\gamma_1\sigma+2\gamma_2 a^2\frac{r\sigma-b^2+1}{\sigma}+\right.$$
$$\left.+\gamma_3 a^2+4a^3\frac{b-1}{\sigma}\right\}xy-[\gamma_3 ab+4\sigma]z\bigg\}.$$

Заметим, что параметры γ_1, γ_2 и γ_3 выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi(x,y,z)\le\frac{1}{4\theta^2}+\theta^2\left\{(\sigma+1-2b)^2+\left(\frac{2\sigma}{a}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left[2a\gamma_1(b-\sigma-1)+2\gamma_2 a(b-1)+\gamma_3\frac{a^3(b-1)}{\sigma}+\frac{4a^4(b-1)^2}{\sigma^2}\right]x^2\right\}.$$

Легко доказать, что из условия (25) при определенных выше параметрах γ_1, γ_2, γ_3 имеем неравенство

$$2a\gamma_1(b-\sigma-1)+2\gamma_2 a(b-1)+\gamma_3\frac{a^3(b-1)}{\sigma}+\frac{4a^4(b-1)^2}{\sigma^2}\le 0.$$

Таким образом, при всех x, y, z

$$\varphi(x,y,z) \le \sqrt{4r\sigma + (\sigma-1)^2}.$$

Отсюда следует, что для любого числа

$$s < s_0 = \frac{\sqrt{4r\sigma + (\sigma-1)^2} - 2b - \sigma - 1}{\sqrt{4r\sigma + (\sigma-1)^2} + \sigma + 1}$$

существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при всех x, y, z выполнена оценка

$$\lambda_1(x,y,z) + \lambda_2(x,y,z) + s\lambda_3(x,y,z) + \dot{v}(x,y,z) < -\varepsilon.$$

Устремив s к s_0 справа и используя теорему 2, получим оценку

$$\dim_L K \le 3 - \frac{2(\sigma+b+1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}\,. \qquad (27)$$

Легко видеть, что локальная ляпуновская размерность стационарной точки $x = y = z = 0$ системы (24) равна

$$3 - \frac{2(\sigma+b+1)}{\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}\,. \qquad (28)$$

Из соотношений (27) и (28) следует формула (26).

Относительно утверждений теоремы 3 и 4 сделаем следующее замечание.

Легко видеть, что величина $\alpha_1(x_-)$ является также собственным значением матрицы Якоби отображения Хенона в стационарной точке $x = x_-$, $y = y_-$.

Если обратиться к формуле (26), то легко видеть, что $\sigma+b+1$ является следом матрицы Якоби правой части системы (22) и число

$$\sigma + 1 + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}$$

является собственным значением матрицы Якоби правой части системы (22) в точке $x = y = z = 0$.

Таким образом, величины

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{1 - \ln b / \ln \alpha_1(x_-)}$$

и

$$\beta_2 = 3 - \frac{2(\sigma+b+1)}{\sigma+1+\sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}$$

инвариантны относительно линейных невырожденных преобразований в фазовом пространстве систем Хенона и Лоренца. Поэтому оценки

$$\dim_H K \le \dim_F K \le \beta_j$$

инвариантны относительно линейных неособых преобразований.

Рассмотрим систему Рёсслера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x, \\ \dot{z} &= -bz + a(y - y^2), \end{aligned} \tag{29}$$

где a и b – положительные числа.

Теорема 5. *Для инвариантного множества K системы (29) справедлива оценка*

$$\dim_L K \le 3 - \frac{2b}{b+\sqrt{(a+2b)^2+b^2+1}}\,. \tag{30}$$

Доказательство. Матрица Якоби правой части системы (29) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a(1-2y) & -b \end{pmatrix}.$$

Поэтому характеристический полином симметризованной матрицы

$$\frac{1}{2}(J+J^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & a(1-2y)/2 \\ -1/2 & a(1-2y)/2 & -b \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\lambda^3 + b\lambda^2 - \frac{1+a^2(1-2y)}{4}\,\lambda = 0.$$

Поэтому собственные значения $\lambda_j(x,y,z)$ матрицы $(J^*+J)/2$ имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[-b+\sqrt{b^2+1+a^2(1-2y)^2}\right],$$

$$\lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left[-b-\sqrt{b^2+1+a^2(1-2y)^2}\right].$$

Ясно, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ для всех y.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+s\lambda_3+\dot v = \frac{1}{2}\big[&-(1+s)b+\\ &+(1-s)(b^2+1+a^2(1-2y)^2)^{1/2}+2\dot v\big],\end{aligned} \tag{31}$$

где $s\in[0,1)$.

Выберем функцию ляпуновского типа v следующим образом:

$$v=\frac{1}{2}(1-s)æ(z-bx).$$

Здесь æ – варьируемый параметр. В этом случае выражение (31) примет вид

$$\lambda_1+\lambda_2+s\lambda_3+\dot v = \frac{1}{2}\big[-(1+s)b+(1-s)\varphi(y,æ)\big],$$

где

$$\varphi(y,æ)=\sqrt{b^2+1+a^2(1-2y)^2}+æ\big[(a+b)y-ay^2\big].$$

Ясно, что для любого числа $\theta\neq 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\varphi(y,æ) &\le \theta^2\big[b^2+1+a^2(1-2y)^2\big]+\frac{1}{4\theta^2}+\\ &+æ\big[(a+b)y-ay^2\big]=\theta^2(a^2+b^2+1)+\frac{1}{4\theta^2}-\\ &-(æa-4\theta^2a^2)y^2-\big[4\theta^2a^2-æ(a+b)\big]y.\end{aligned}$$

Если выбрать варьируемые параметры так, чтобы $\text{æ}a > 4\theta^2 a^2$, то получается неравенство

$$\varphi(y, \text{æ}) \leq \theta^2(a^2 + b^2 + 1) + \frac{1}{4\theta^2} + \frac{[4\theta^2 a^2 - \text{æ}(a+b)]^2}{4(\text{æ}a - 4\theta^2 a^2)}\,.$$

Отсюда следует, что при

$$\text{æ} = 4\theta^2 a\,\frac{a+2b}{a+b}\,, \quad \theta^2 = \frac{1}{2\sqrt{(a+2b)^2 + b^2 + a}}$$

справедлива оценка

$$\varphi(y, \text{æ}) \leq \sqrt{(a+b)^2 + b^2 + 1}.$$

Таким образом, для любого положительного s, удовлетворяющего неравенству

$$s < s_0 = 1 - \frac{2b}{b + \sqrt{(a+2b)^2 + b^2 + 1}},$$

существует число $\varepsilon > 0$, для которого справедлива оценка

$$\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 + \dot{v} \leq -\varepsilon$$

для всех x, y, z.

Используя теорему 2 и переходя к пределу: $s \to s_0$, получим оценку (30).

Отметим, что без использования ляпуновских функций (т.е. полагая, что $v \equiv$цонст) для системы (29) невозможно получить нетривиальные оценки ляпуновской размерности, основываясь на условии

$$\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_2 < 0.$$

Здесь ясно, что при $s < 1$ и при $y \to \infty$ имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + s\lambda_3 \to +\infty.$$

Заметим также, что в отличие от систем Хенона и Лоренца здесь получена лишь верхняя оценка для ляпуновской размерности. Точное вычисление ляпуновской размерности для рёсслеровских систем является в настоящее время нерешенной задачей.

Заметим, что в настоящее время развит частотный метод оценки ляпуновской размерности, основанный на использовании функций Ляпунова вида “квадратичная форма”. Этот подход изложен в статье [23].

Литература

1. K. Kuratowski, *Topology.* New York, Academic press, 1966.
2. W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory.* Princeton University Press, 1941.
3. Я. Г. Синай, Л. Н. Шильников, *Странные аттракторы,.* Математика. Новое в зарубежной науке. Т. 22, Мир, М. (1981).
4. H. G. Schuster, *Deterministic Chaos.* Physik-Verlag, Weinheim (1984).
5. В. С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах.* М., Наука (1990).
6. Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания.* М., Наука (1987).
7. Я. Б. Песин, *Характеристики размерностного типа для инвариантных множеств динамических сисем.* — Успехи мат. наук **43**, № 4 (1988), 95–128.
8. A. Douady, J. Oesterle, *Dimension de Hausdorff des attracteurs.* — C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. **290** no. 24 (1980), 1135–1138.
9. G. A. Leonov, I. M. Burkin, A. I. Shepeljavyj, *Frequency Methods in Oscillaton Theory.* Dordrecht, Kluwer, 1996.
10. G. A. Leonov, D. V. Ponomarenko, V. B. Smirnova, *Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications.* — World Scientific. Singapure (1996).
11. V. A. Boichenko, A. Franz, G. A. Leonov, V. Reitmann, *Hausdorff and Fractal Dimension Estimates for Invariant Sets of Non-Injective Maps.* — J. Anal. and Appl. **17** no. 1 (1998).
12. Hunt B. R., *Maximum Local Lyapunov Dimension Bounds the Box Dimension of Chaotic Attractors.* — Nonlinearity **9** no. 4 (1996).
13. Ю. С. Ильяшенко, Ли Вейгу, *Нелокальные бифуркации.* М., МЦНМО-Ро (1999).
14. Г. А. Леонов, *Об оценках хаусдорфовой размерности аттракторов.* — Вестник Ленингр. ун-та, Сер. 1. Вып. 3 (1991), 42–44.
15. Г. А. Леонов, *Об одном способе исследования глобальной устойчивости нелинейных систем.* — Вестник Ленингр. ун-та. Сер. 1. Вып. 4 (1991), 11–14.
16. G. A. Leonov, V. A. Boichenko, *Lyapunov's direct method in the estimation of the Hausdorff dimension of attractors.* — Acta Appl. Math. **26** (1992), 1–60.
17. Г. А. Леонов, *Построение специальной внешней меры Каратеодори для оценки хаусдорфовой размерности аттракторов.* — Вестник Петербург. ун-та. Сер. 1. Вып. 4 (1995), 24–30.
18. Г. А. Леонов, *Верхние оценки хаусдорфовой размерности аттракторов.* — Вестник Петербург. ун-та. Сер. 1. Вып. 1 (1998), 19–22.
19. В. А. Бойченко, Г. А. Леонов, *Об оценках размерности аттракторов отображения Хенона.* — Вестник Петербург. ун-та. (в печати).
20. G. A. Leonov, S. A. Ljashko, *Surprising Property of Lyapunov Dimension for Invariant Sets of Dynamical Systems.* — Preprint. Technische Universitat. Dresden (2000).
21. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука (1988).

22. G. A. Leonov, *Lyapunov Exponents and Problems of Linearization. From Stability to Chaos*. St. Petersburg University Press, 1997.
23. Г. А. Леонов, *Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца*. — Прикл. мат. и мех.. в печати.

Leonov G. A. Lyapunov functions in the estimation of dimensions of attractors of dynamical systems.

We discuss the relation of the Lyapunov dimension to the topological, Hausdorff and fractal dimensions of attractors. For Henon and Lorentz systems we obtain formulae for the Lyapunov dimenison of attractors.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило дата 12 ноября 1999 г.