Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

С. Ю. Оревков, В. М. Харламов

ПОРЯДОК РОСТА ЧИСЛА КЛАССОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ПРИ ВОЗРАСТАНИИ СТЕПЕНИ

Что мы знаем о лисе? Ничего! И то — не все.
Б. Заходер. *Мохнатая азбука*

Введение

Плоские алгебраические кривые и проективные алгебраические гиперповерхности составляют предмет 16-й проблемы Гильберта. Они естественным образом объединяются в семейства – пространства однородных многочленов. Эти пространства нумеруются числом $n+1 \geqslant 2$ однородных переменных и степенью $d \geqslant 1$ многочленов, и являются проективными пространствами P^N, где $N = N(n,d) - 1$, $N(n,d) = \binom{n+d}{d}$ – число коэффициентов у общего однородного многочлена степени d от $n+1$ переменной. Такому пространству естественно сопоставить универсальную гиперповерхность $\Gamma \subset P^N \times P^n = \{(p,x) \,|\, p(x) = 0\}$, являющуюся неособым многообразием, и проекцию $\mathrm{pr} : \Gamma \to P^N$. Множество критических значений $D \subset P^N$ проекции pr называется *дискриминантной* гиперповерхностью: $p \in D$ тогда и только тогда, когда гиперповерхность $p = 0$ особа в P^n, и семейство $\Gamma^0 = \mathrm{pr}^{-1}(P^N \setminus D) \to P^N \setminus D$, индуцированное над $P^N \setminus D$, является деформацией: $\mathrm{pr}\,|_{\Gamma^0}$ есть собственная субмерсия.

Пространство комплексных точек многообразия $P^N \setminus D$ связно, из чего следует, что над $\mathbf{C}$ все неособые гиперповерхности одинаковой степени (и одинаковой размерности) диффеоморфны. Над $\mathbf{R}$ ситуация совершенно иная: начиная с $d \geqslant 2$, $P^N_{\mathbf{R}} \setminus D_{\mathbf{R}}$ несвязно (здесь и далее через $X_{\mathbf{R}}$ обозначается множество вещественных точек многообразия X). По традиции, *жесткой изотопией* или *вещественной деформацией* мы будем называть непрерывный путь в $P^N_{\mathbf{R}} \setminus D_{\mathbf{R}}$; соответственно, две вещественные гиперповерхности *жестко изотопны* или *вещественно деформационно эквивалентны*, если они соединены жесткой изотопией. Простейшим инвариантом жесткой изотопии является топологический тип вещественной части гиперповерхности. С его помощью легко доказывается вышеупомянутая несвязность для любой размерности и степени $\geqslant 2$.

Уместно заметить, что над $\mathbf{R}$ определение дискриминанта D можно понимать двумя разными способами: $p \in D$, если $p = 0$ имеет вещественную особую точку, или $p \in D$, если $p = 0$ имеет комплексную особую точку. Мы предпочитаем второе, более общепринятое, определение, которое эквивалентно тому, чтобы рассматривать вещественный дискриминант как множество вещественных точек $D_{\mathbf{R}} \subset P^N_{\mathbf{R}}$ комплексного дискриминанта (и которое дает дискриминант определенный над $\mathbf{Z}$). Фактически, для наших целей (см. ниже) это безразлично: дополнение к другому дискриминанту содержится в $P^N_{\mathbf{R}} \setminus D_{\mathbf{R}}$, причем вложение индуцирует взаимно-однозначное соответствие между компонентами связности, поскольку разность двух дискриминантов имеет размерность $\leqslant N - 2$.

Гильберт в 16-й проблеме спрашивает о "числе, форме и расположении ветвей" неособой вещественной алгебраической гиперповерхности данной размерности и степени (в действительности, он упоминал только плоские кривые и поверхности в трехмерном пространстве). Этот вопрос более широко можно понимать как вопрос об изучении деформационной эквивалентности и деформационных инвариантах.

Пусть $I(n, d)$ – число изотопических типов пар $(P^n_{\mathbf{R}}, X_{\mathbf{R}})$, где $X_{\mathbf{R}}$ – неособая гиперповерхность в $P^n_{\mathbf{R}}$ степени d, и пусть $D(n, d)$ – число деформационных классов (жестких изотопических классов). Ясно, что $I(n, d) \leqslant D(n, d) < \infty$. Далее мы будем часто сокращать $I(2, d)$ и $D(2, d)$ до I_d и D_d. (Заметим, что при $n = 2$ изотопность равносильна эквивалентности при гомеоморфизме $P^2_{\mathbf{R}}$, и изотопические классы легко кодировать, см. ниже.)

Числа (и соответствующие классы) $I(n, d)$ и $D(n, d)$ известны при некоторых значениях (n, d):

$$I(1, d) = D(1, d) = [\frac{d}{2}] + 1, \quad I(n, 1) = D(n, 1) = 1,$$

$$I(n, 2) = D(n, 2) = n,$$

и[1]

d:	1	2	3	4		5	6	7	8
$I(2,d)$:	1	2	2	6		8	56	121	$\geqslant 2500$
$I(3,d)$:	1	3	5	111	$\geqslant 3000$				
$D(2,d)-I(2,d)$:	0	0	0	0		1	8	$\geqslant 570$	
$D(3,d)-I(3,d)$:	0	0	0	55					

Для бо́льших степеней и размерностей известно очень немного. Насколько мы знаем, даже асимптотическое поведение величин $I(n,d)$ и $D(n,d)$ никогда систематически не изучалось, и в настоящей статье мы попытались сформулировать основные вопросы и дать некоторые ответы, касающиеся асимптотики с точностью до слабой экспоненциальной эквивалентности (см. определение ниже). Чуть глубже удалось продвинуться в случае плоских кривых, где, в частности, мы даем асимптотику для $I(2,d)$ и для числа изотопических классов максимальных кривых, реализуемых T-кривыми, и показываем, что ни одно из известных ограничений не является асимптотически значимым.

Обозначения. Помимо обычного понятия *эквивалентности* последовательностей ($a_m \sim b_m$, если $\lim_{m\to\infty} a_m/b_m = 1$), мы будем часто пользоваться *слабой эквивалентностью*

$$a_m \asymp b_m, \qquad \text{если} \quad a_m = O(b_m) \ \text{ и } \ b_m = O(a_m),$$

а также *экспоненциальной эквивалентностью* ($a_m \underset{e}{\sim} b_m$, если $\log a_m \sim \log b_m$) и *экспоненциальной слабой эквивалентностью* ($a_m \underset{e}{\asymp} b_m$, если $\log a_m \asymp \log b_m$).

Пример. $m! \underset{e}{\asymp} m^m$ (по формуле Стирлинга); $(m^2)^{m^2} \underset{e}{\asymp} m^{m^2}$.

Множество вещественных точек $A_{\mathbf{R}}$ вещественной неособой плоской кривой $A \subset P^2$ либо пусто, либо представляет собой компактное неособое одномерное подмногообразие в $P^2_{\mathbf{R}}$. Любое

[1]Оценку $I(3,5) \geqslant 3000$ недавно анонсировал Б. Шевалье (частное сообщение).

компактное неособое одномерное подмногообразие C в $P^2_{\mathbf{R}}$ состоит из конечного числа непересекающихся вложенных окружностей. Мы назовем $\mathbf{Z}/2$-степенью кривой C реализуемый ей элемент группы $H_1(P^2_{\mathbf{R}};\mathbf{Z}/2)=\mathbf{Z}/2$. Если он равен нулю, все окружности двусторонние. В противном случае кривая имеет одну и только одну одностороннюю компоненту. В алгебраическом случае (когда $C=A_{\mathbf{R}}$) кривая реализует нуль тогда и только тогда, когда ее степень четна.

Двусторонние окружности называются *овалами*. Любой овал делит $P^2_{\mathbf{R}}$ на две части: внутреннюю, гомеоморфную диску, и внешнюю, гомеоморфную листу Мёбиуса. Таким образом, возникает естественный частичный порядок (структура дерева): $a>b$ тогда и только тогда, когда b лежит внутри a. Этот порядок и $\mathbf{Z}/2$-степень однозначно определяют кривую с точностью до изотопии.

Следуя традиции, набор непересекающихся вложенных окружностей, рассматриваемых с точностью до изотопии в $P^2_{\mathbf{R}}$, мы будем называть *вещественной схемой* (расположения овалов). Любая вещественная схема реализуема алгебраической кривой. Вещественная схема называется *схемой степени* d если она реализуема неособой кривой степени d.

Мы будем представлять вещественную схему корневым деревом с $l+1$ вершиной, где l – число овалов (корень – это дополнительный, максимальный, элемент; мы вводим его для лучшего соответствия с терминологией, установившейся в комбинаторике деревьев), а также вложенными скобками. В дальнейших обозначениях мы следуем ставшему общепринятым правилу, согласно которому через $\langle 1\langle A\rangle\rangle$ обозначается схема $\langle A\rangle$ с одним дополнительным овалом, охватывающим $\langle A\rangle$, и через $\langle A\sqcup B\rangle$ – несвязная сумма схем $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$. (Мы будем опускать $\mathbf{Z}/2$-степень, так как это нигде не будет вести к неправильному пониманию.)

Заметим, что в алгебраическом случае по неравенству Харнака число овалов не превосходит $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$, если d четно, и $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$, если d нечетно. Вещественные схемы с максимальным числом овалов называются *M-схемами*, и соответствующие кривые называются *M-кривыми*. Они существуют для любой степени.

Благодарности. Мы благодарны И. Итенбергу, М. Лифшицу, Е. Шустину и А. Вершику, с которыми мы обсуждали этот круг задач. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке программы “Arc en Ciel 2000”.

1. Вещественные плоские кривые

1.1 Кривые с точностью до изотопии. Следующее утверждение описывает грубую асимптотику числа кривых, рассматриваемых с точностью до изотопии.

Предложение 1. $I_d \underset{e}{\asymp} \exp(d^2)$.

Доказательство. *Оценка сверху.* В силу неравенства Харнака, число овалов ограничено величиной $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$. Следовательно, I_d не превосходит числа корневых деревьев с $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+2$ вершинами. Известно (см., например, [18]), что число корневых деревьев с n вершинами ограничено величиной C^n для некоторой константы C. (Точное значение константы см. в [13]; первые несколько знаков указаны в п. 1.4 ниже).

Оценка снизу. Методом склеивания карт (методом Виро) мы индуктивно для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ построим семейство $\mathcal{C}_k$ попарно неизотопных неособых кривых степени d_k, где

$$d_0 = 6, \qquad d_{k+1} = 2d_k + 6, \tag{1}$$

таким образом, что множество вещественных точек $c_{\mathbf{R}}$ каждой кривой c из семейства $\mathcal{C}_k$ содержится в аффинной плоскости $\mathbf{R}^2$.

В качестве C_0 выберем по представителю из каждого изотопического класса кривых степени $d_0 = 6$ (их можно выбрать в $\mathbf{R}^2$, поскольку известно, что все классы реализуемы возмущением трех подходящих эллипсов).

После того, как семейство $\mathcal{C}_k$ построено, для каждой кривой $c \in C_k$ рассмотрим кривую, являющуюся объединением некоторой окружности, лежащей в положительном квадранте, и образа $f(c)$ кривой c при аффинно-линейном преобразовании плоскости, таком, что $f(c_{\mathbf{R}})$ отображается внутрь окружности. Обозначим через C'_k множество получившихся кривых степени d_k+2. Затем для каждой неупорядоченной четверки $c'_1, \dots, c'_4 \in C'_k$ построим кривую методом Виро, разбивая треугольник $\Delta = [(0,0), (0, 2d_k + 6), (2d_k+6, 0)]$ на четыре треугольника со стороной d_k+2, отделенных один от другого двумя полосками ширины 1 и одной полоской ширины 2 (три из этих четырех треугольников имеют 2 стороны и одну вершину на $\partial\Delta$; полоски нужны, чтобы склеить

между собой соседние карты). Пусть $N_k = \operatorname{Card} C_k$. Из построения видно, что
$$N_{k+1} \geqslant N_k^4/24. \tag{2}$$
Из соотношений (1) и (2) индукцией получаем
$$d_k = 2^k \cdot (d_0+6) - 6, \qquad \log N_k \geqslant 4^k \cdot \big(\log N_0 - \frac{\log 24}{3}\big) + \frac{\log 24}{3}. \quad \bullet$$

1.2 Кривые с точностью до деформации. Следующее предложение дает первое представление о росте числа кривых, рассматриваемых с точностью до жесткой изотопии.

Предложение 2. *Существуют константы c_1, c_2 такие, что при любом d*
$$c_1 d^2 \leqslant \log D_d \leqslant c_2 d^2 \log d.$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из предложения 1. По двойственности Лефшеца–Пуанкаре, для того чтобы доказать верхнюю оценку, достаточно дать ту же оценку для суммарного числа Бетти множества вещественных точек $D_{\mathbf{R}}$ дискриминантной гиперповерхности особых кривых степени d. Такая оценка вытекает, например, из неравенства Тома–Смита: действительно, степень h дискриминантной гиперповерхности равна $3(d-1)^2$, и старший член этой оценки (полиномиальной по h и экспоненциальной по N) есть h^N, где $N = N(2,d) - 1 = \binom{d+2}{d} - 1$ (см. [15]). $\bullet$

Назовем T-кривой степени d (вещественную, неособую) плоскую кривую, полученную методом Виро из некоторой выпуклой триангуляции треугольника $[(0,0),(0,d),(d,0)]$ на примитивные (т.е. площади $\frac{1}{2}$) треугольники с целочисленными вершинами (см. [17, 9, 6]). Обозначим через D_d^T число деформационных классов, реализуемых T-кривыми степени d.

Предложение 3. *Существует константа $c > 0$ такая, что $\log D_d^T \leqslant cd^2$ при любом d.*

Доказательство. Из описания вторичного многогранника, данного в [5], следует, что выпуклая триангуляция (выпуклого) многоугольника на примитивные целочисленные треугольники однозначно задается кратностями вершин триангуляции. В наших триангуляциях общее число вершин равно $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$, а число ребер равно $\frac{3}{2}d(d+1)$. Значит, число выпуклых триангуляций ограничено сверху количеством разбиений числа $3d(d+1)-(d+1)(d+2)+3$ на $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ целых положительных слагаемых, что равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{2d^2}{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)-1} \underset{e}{\sim} c^{\frac{1}{2}d^2}, \qquad \text{где} \quad c=\frac{4^4}{3^3}.$$

Выбор знаков вершин меняет только окончательную константу c. •

1.3 M-кривые. Цель этого пункта – найти степень роста числа M-схем, реализуемых T-кривыми.

Заметим, что как и I_d, число всех попарно неизотопных T-кривых степени d слабо экспоненциально эквивалентно $\exp(d^2)$ (надо немного модифицировать построение из доказательства нижней оценки предложения 1). Комбинируя это с верхней оценкой из предложения 3, получаем, что число жестких изотопических типов степени d, реализуемых T-кривыми, тоже слабо экспоненциально эквивалентно $\exp(d^2)$.

Предложение 4 (см. [9]). *Если M-схема степени d реализуема T-кривой, то она удовлетворяет следующему условию:*

(*) *Число овалов O, для которых существуют овалы O' и O'' такие, что $O''<O'<O$, не превосходит $\frac{3}{2}m$.* •

Предложение 5. *Пусть T_d^* – число различных M-схем степени d, удовлетворяющих условию (*) и имеющих не более $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ овалов. Тогда $T_d^* \underset{e}{\asymp} \exp(d^{3/2})$.*

Доказательство. Обозначим через $P(m)$ множество всех неупорядоченных разбиений числа m, т.е. $P(m)=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\mid \lambda_1\geqslant\dots\geqslant\lambda_k>0,\ \lambda_1+\dots+\lambda_k=m\}$, и пусть $p(m)=\operatorname{Card}P(m)$. Известно, что $p(m)\underset{e}{\asymp}\exp(\sqrt{m})$ (см. [1]). Для $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in P(m)$, обозначим через $S(\lambda)$ вещественную схему расположения овалов $1\langle\lambda_1-1\rangle\sqcup\ldots\sqcup 1\langle\lambda_k-1\rangle$.

Оценка снизу. Для каждого упорядоченного набора $(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(k)})\in P(d)^k$, где $k=[3d/2]$, схема $S_1\sqcup 1\langle S_2\sqcup 1\langle\ldots\sqcup 1\langle S_k\rangle\ldots\rangle$, где $S_j=S(\lambda^{(j)})$, удовлетворяет условию (*). Значит, $T_d^*\geqslant p(d)^k\underset{e}{\asymp}\exp(d\sqrt{d})$.

Оценка сверху. Пусть S – вещественная M-схема степени d, удовлетворяющая условию (*). Обозначим через S^* ее подсхему, состоящую из овалов, являющихся внешними овалами гнезд глубины $\geqslant 3$ (по условию (*)), мы имеем $\operatorname{Card} S^* \leqslant \frac{3d}{2}$). Пусть $T(S^*)$ – корневое дерево, отвечающее подсхеме S^*.

В каждом классе изоморфных корневых деревьев выберем представителя и фиксируем (произвольным образом) нумерацию его вершин. Пусть $v_1, \dots, v_k$ $(k \leqslant \frac{3d}{2})$ – овалы из S^*, занумерованные в соответствии с выбранным порядком вершин дерева $T(S^*)$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k$, рассмотрим все овалы из $S \setminus S^*$, лежащие внутри v_j и не отделенные от v_j другими овалами из S^*. Эти овалы образуют вещественную подсхему вида $S(\lambda^{(j)})$ для некоторого разбиения $\lambda^{(j)} \in P(m_j)$, причем $m_1 + \dots + m_k = l(d) - k$, где $l(d) \sim d^2/2$ – число овалов в M-схеме. Таким образом,

$$T_d^* \leqslant \sum_{k=1}^{[3d/2]} T_k \sum_{m_1+\dots+m_k=l(d)-k} p(m_1)\dots p(m_k),$$

где T_k – число корневых деревьев с k вершинами. Для некоторой константы a имеем $\log p(m_j) < a\sqrt{m_j}$. Следовательно, по неравенству Коши–Буняковского можно равномерно оценить каждое слагаемое во внутренней сумме:

$$\log\big(p(m_1)\dots p(m_k)\big) < a\sum\sqrt{m_j} \leqslant$$
$$\leqslant a\sqrt{m_1+\dots+m_k}\sqrt{k} < a\sqrt{l(d)\cdot 3d/2},$$

при этом число слагаемых равно $\binom{l(d)}{k} < \binom{d^2}{3d/2} \underset{e}{\asymp} d^d$, откуда

$$T_d^* < (3d/2)\, T_d \binom{d^2}{3d/2} \exp(bd^{3/2}) \underset{e}{\asymp} \exp(d^{3/2}). \quad \bullet$$

Обозначим через I_d^{TM} число M-схем степени d, реализуемых T-кривыми.

Предложение 6. $I_d^{TM} \underset{e}{\asymp} \exp(d^{3/2})$.

Доказательство. *Оценка сверху.* Следует из предложений 4 и 5.

Оценка снизу. Пусть d – положительное целое число. Положим $k = [\frac{1}{6}d] - 1$ и обозначим треугольник $[(0,0),(d,0),(0,d)]$ через $\Delta_d \subset \mathbf{R}^2$. Для каждого набора разбиений $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1})$, $\lambda_j \in P(2(k-j))$, мы построим методом Хааса [6] M-кривую.

Рассмотрим в Δ_m следующие точки:

$$A_j = (5j, 0), \quad j = 0, \dots, k+1;$$
$$B_0 = (0, d), \quad B_j = (5j+1, 6(k-j)-2), \quad j \geqslant 1;$$
$$C_j = (6k-j, 0), \quad D_j = (5j+1, 0),$$
$$E_j = (5j+2, 6(k-j)-4), \quad j = 0, \dots, k.$$

Разрежем Δ_d непересекающимися двузвенными ломаными

$$A_jB_jC_j \ (j = 1, \dots, k) \qquad \text{и} \qquad D_jE_jA_{j+1} \ (j = 0, \dots, k).$$

Теперь разрежем каждый треугольник $D_jE_jA_{j+1}$ $(j = 0, \dots, k-1)$ следующим образом. Пусть $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \dots)$. Положим $s_j^{(\nu)} = \lambda_j^{(1)} + \dots + \lambda_j^{(\nu)}$, $y_j^{(\nu)} = 2 + 2 \cdot [3s_j^{(\nu)}/2]$ и $E_j^{(\nu)} = (5j+2, y_j^{(\nu)})$. Разрежем каждый треугольник $D_jE_jA_{j+1}$ на области $Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}, \dots$ двузвенными ломаными $D_jE_j^{(1)}A_{j+1}$, $D_jE_j^{(2)}A_{j+1}, \dots$. Тогда во внутренности отрезка, высекаемого областью $Z_j^{(\nu)}$ из прямой $x = 5j+3$, лежит $\lambda_j^{(\nu)}$ целочисленных точек с четной y-координатой (всего на отрезке, высекаемом треугольником $D_jE_jA_{j+1}$ из прямой $x = 5j+3$, имеется ровно $2(k-j)$ точек с четной y-координатой).

В итоге мы разрезали Δ_d на $k+s+1$ многоугольников, где s – суммарное число членов разбиений λ_1, λ_2, ... Несложно проверить, что любая сторона любого из многоугольников не содержит других целых точек кроме концов, и один из концов лежит на стороне треугольника Δ_d. Следуя [6], эти многоугольники мы будем называть *зонами*. Присвоим каждой зоне знак так, чтобы знаки смежных зон были противоположными. Затем, продолжим разбиение на зоны до выпуклой триангуляции и зададим распределение знаков $\delta : \Delta_d \cap \mathbf{Z}^2 \to \{\pm 1\}$, полагая $\delta(x, y) = (-1)^{xy}\zeta^y$, где ζ – знак той зоны, в которой лежит точка (x, y) (поскольку все целые точки на границах зон имеют четные y-координаты, это определение согласовано на пересечениях зон).

По теореме Хааса [6] соответствующая T-кривая является M-кривой, и несложно проверить, что ее вещественная схема имеет вид

$$a \sqcup 1\langle a_0 \sqcup S_0 \sqcup 1\langle a_1 \sqcup S_1 \sqcup 1\langle \quad \dots \quad \sqcup 1\langle a_{k-1} \sqcup S_{k-1} \sqcup 1\langle 1\rangle\rangle \dots\rangle\rangle\rangle$$

для некоторых целых чисел a, a_0, a_1, ... , где $S_j = 1\langle\lambda_j^{(1)}\rangle \sqcup 1\langle\lambda_j^{(2)}\rangle \sqcup \dots$ для $\lambda_j = (\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \dots)$. Гнездо глубины $k+1$ соответствует ломаным $A_jB_jC_j$, а подсхемы S_j – разбиениям треугольников $D_jE_jA_{j+1}$. При этом гнезда $1\langle\lambda_j^{(1)}\rangle$, $1\langle\lambda_j^{(3)}\rangle$, ... лежат выше оси $y=0$, а гнезда $1\langle\lambda_j^{(2)}\rangle$, $1\langle\lambda_j^{(4)}\rangle$, ... – ниже.

Таким образом, для каждого d мы построили

$$\prod_{j=1}^{k} p(2j) \underset{e}{\asymp} \exp\Big(\sum_{j=1}^{k}\sqrt{j}\Big) \underset{e}{\asymp} \exp(d^{\frac{3}{2}})$$

различных M-схем. •

1.4 Коэффициент при d^2 в асимптотике числа вещественных схем. В предложении 1 мы использовали в качестве верхней оценки для I_d число корневых деревьев. Согласно результату Оттера [13] (см. также [8; 9.5]), для T_n – числа корневых деревьев с n вершинами – имеет место экспоненциальная эквивалентность

$$T_n \underset{e}{\sim} C^n, \qquad C = 2.95576. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\log I_d \leqslant Ad^2 + o(d^2), \qquad A = (\log C)/2. \tag{4}$$

Оказывается, никакие из известных ограничений на расположения овалов не позволяют уменьшить коэффициент A в оценке (4). Результаты этого пункта служат не для уточнения верхней оценки для I_d (что является одной из главных целей статьи), а наоборот, для того чтобы показать, что нечто бесполезно для этой цели. По этой причине мы не приводим подробных доказательств.

Единственными асимптотически значимыми из известных ограничений могли бы быть ограничения, получаемые из теоремы Безу (например, отсутствие гнезд глубже чем $d/2$). Остальные известные ограничения (неравенства Петровского, Арнольда и т.д.) вносят в (4) поправки порядка $O(1)$ или $O(\log d)$.

Чтобы придать утверждению о неулучшаемости оценки (4) точный смысл, мы формализуем понятие ограничения на вещественную схему, полученное из теоремы Безу. Будем говорить, что *вещественная схема S удовлетворяет теореме Безу для степени d*, если для любой тройки целых положительных чисел (k, d', c), $d' < d$, удовлетворяющей условию

(**) *через любые k точек на $P^2_{\mathbf{R}}$ в общем положении можно провести вещественную кривую степени d', имеющую не более c компонент связности* и для произвольного выбора k точек найдутся c гладко вложенных в $P^2_{\mathbf{R}}$ окружностей, проходящих через выбранные точки, которые пересекают S не более чем в dd' точках.

Замечание. Из доказательства неравенства Харнака, данного самим Харнаком [7], вытекает, что любая вещественная схема, удовлетворяющая теореме Безу для степени d, имеет не более $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ компонент связности.

Обозначим через B_d число различных схем, удовлетворяющих теореме Безу для степени d.

Предложение 7. $\log B_d \sim Ad^2$, *где A – константа из (3) и (4).*

Доказательство непосредственно следует из лемм 8 и 9 ниже.

Определение. *Гнездом* называется последовательность непересекающихся овалов $v_1, \dots, v_p$ в $P^2_{\mathbf{R}}$ таких, что $v_1 > \dots > v_p$. Число овалов в гнезде называется *глубиной* гнезда. Максимальная глубина гнезда вещественной схемы (или корневого дерева) называется *глубиной* схемы (дерева) S.

Тройка чисел (k, d', c), где $d' < d$, удовлетворяет условию (**) только если (предположительно, если и только если) $k \leqslant \frac{1}{2}d'(d'+3)$ и $k \leqslant 3d' + c - 2$, см. [3]. Пользуясь этим, легко доказать следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть α – фиксированное число в интервале $0 < \alpha < \frac{1}{6}$. Пусть d – достаточно большое целое число. Предположим, что некоторая вещественная схема S имеет глубину $< [\alpha d]$. Тогда S удовлетворяет теореме Безу для степени d.* $\bullet$

Обозначим через $T_n^{[h]}$ число корневых деревьев глубины $\leqslant h$ с n вершинами.

Лемма 9. *Пусть h_n – последовательность, такая что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{h_n} = 0. \qquad \text{\textit{Тогда}}\ \ T_n^{[h_n]} \underset{e}{\sim} T_n \underset{e}{\sim} C^n.$$

Доказательство. Занумеруем произвольным образом вершины каждого дерева. Возьмем корневое дерево T глубины $> h$ с n вершинами. Выберем самую дальнюю от корня вершину v. Если она не единственна, выберем ту, у которой минимален номер. Рассмотрим ветвь глубины $h-1$, содержащую v (по определению, *ветвь* дерева – это одна из компонент, получающихся при удалении ребра). Отрезая эту ветвь, получаем новое корневое дерево. Если его глубина по-прежнему $> h$, итерируем этот процесс. Поскольку каждый раз мы отрезаем $\geqslant h$ вершин, число итераций не превосходит n/h. В результате мы получим $\leqslant n/h$ корневых деревьев глубины $\leqslant h-1$. Присоединяя их все к новому общему корню, получим корневое дерево глубины $\leqslant h$ с $n+1$ вершиной. Чтобы однозначно восстановить T, достаточно указать концы отрезков, удаленных на каждом шагу. Таким образом, $T_n \leqslant T_{n+1}^{[h]} \cdot n^{\frac{n}{h}}$. $\bullet$

Замечания. 1. Наше доказательство предложения 1 дает нижнюю оценку

$$I_d \geqslant C_6^{d^2}, \quad C_6 = 1.02081 \qquad (d_0 = 6,\ N_0 = 56)$$

$$I_d \geqslant C_8^{d^2}, \quad C_8 = 1.03511 \qquad (d_0 = 8,\ N_0 \geqslant 2500).$$

Как мы видим, обе константы C_6 и C_8 очень далеки от C.

2. Числа $T_n^{[h]}$ можно вычислить по рекуррентной формуле для производящих функций [14] (см. также [8; 3.1]):

$$T^{[h+1]}(x) = x \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{[h]}(x^k)}{k}\Big), \qquad \text{где} \quad T^{[h]}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{[h]} x^n$$

3. При доказательстве предложения 7 мы воспользовались оценкой $\log B_d < \log T_n^{[a\sqrt{n}]} = \log T_n - O(\sqrt{n}\log n)$, где $n = l(d) \sim \frac{1}{2}d^2$. Численный эксперимент (с использованием вышеприведенного рекуррентного соотношения) позволяет предположить, что в действительности имеет место более сильная оценка $\log T_n^{[a\sqrt{n}]} = \log T_n - O(\log n)$.

2. Обобщения

Некоторые из приведенных выше результатов легко распространяются на гиперповерхности в неособых алгебраических многообразиях любой размерности. Чтобы сформулировать эти обобщения, введем дополнительные обозначения. Для очень обильного дивизора L на неособом многообразии X размерности d обозначим через $I(n, dL)$, соответственно через $D(n, dL)$, число вещественных неособых гиперповерхностей в линейной системе $|dL|$, рассматриваемых с точностью до изотопии, соответственно с точностью до деформационной эквивалентности. Как и в случае проективных гиперповерхностей, $D(n, dL)$ – число компонент связности дополнения к соответствующему дискриминанту $\Delta(dL) \subset |dL|$ линейной системы $|dL|$. Назовем систему *общей*, если общие точки дискриминанта – гиперповерхности $H \in |dL|$ с невырожденной двойной точкой, являющейся единственной особой точкой. Поскольку для достаточно большого d проективное вложение многообразия X при помощи линейной системы dL не содержит линейных подпространств, система $|dL|$ общая при большом d (см. [4]).

2.1 Гиперповерхности с точностью до изотопии. Нижняя оценка из предложения 1 обобщается на гиперповерхности в любом торическом многообразии любой размерности.

Предложение 10. *Для любого обильного дивизора L на торическом многообразии X размерности n существует константа $c = c(L, X)$ такая, что $I(n, dL) \geqslant c\exp(d^n)$ при любом d.*

Доказательство по сути то же, что и у нижней оценки предложения 1.

2.2 Гиперповерхности с точностью до деформации. Верхняя оценка из предложения 2 легко обобщается на очень обильные дивизоры на неособых алгебраических многообразиях любой размерности. Вместе с очевидным неравенством $I(n, dL) \leqslant D(n, dL)$ это дает наилучшую известную нам верхнюю оценку на $I(n, dL)$.

Предложение 11. *Если L – обильный дивизор на неособом алгебраическом многообразии размерности n, то существует константа c'_n такая, что*

$$\log I(n, dL) \leqslant \log D(n, dL) \leqslant c'_n d^n \log d.$$

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 2, достаточно вычислить старшие члены полиномиальных разложений степени дискриминанта и размерности линейной системы. Первое считается интегрированием эйлеровой характеристики по пучку Лефшеца: это дает $a = (n+1)d^n L^n$. Второе считается по формуле Римана–Роха: это дает $b = \frac{1}{n!}d^n L^n$. Итак, остается применить неравенство Тома–Смита, которое дает a^b в качестве старшего члена оценки. $\bullet$

Замечание. Есть еще два подхода к получению верхних границ для I и D. Первый заключается в том, чтобы найти алгоритм распознавания топологического или C^∞ типа гиперповерхности и оценить число классов через сложность этого алгоритма. К сожалению, нам неизвестны алгоритмы, дающие оценку лучшую, чем оценка из предложения 10. Другой подход мог бы быть применен к гиперповерхностям на торических многообразиях и он заключается в изучении вторичного многогранника Гельфанда–Капранова–Зелевинского, который совпадает с многогранником Ньютона дискриминанта. Ко второму подходу относится содержание следующего пункта.

2.3 Число T-гиперповерхностей. Обозначим через $D'(n, dL)$ число деформационных классов T-гиперповерхностей в $|dL|$ на данном торическом многообразии размерности n.

Предложение 12. *Существует константа $c = c(n, L)$ такая, что* $\log D'(n, dL) \leqslant cd^n$.

Доказательство похоже, на доказательство предложения 3.

2.4 Многогранники Ньютона и дискриминанты. Рассмотрим для простоты случай гиперповерхностей в проективном пространстве размерности n. Выше в нескольких доказательствах встречалась дискриминантная гиперповерхность $\Delta(d) \subset P^N$ и ее многогранник Ньютона $Q(d) \subset \mathbf{R}^n$. Числа Бетти гиперповерхности $\Delta(d)$ ограничивают числа Бетти дополнения $P^N_{\mathbf{R}} \setminus \Delta(d)_{\mathbf{R}}$. Вершины многогранника $Q(d)$ взаимно-однозначно соответствуют выпуклым целочисленным триангуляциям симплекса $\{(i_1, \ldots, i_n) | i_k \geqslant 0, \sum i_k \leqslant d\}$ (см. [5]). В приведенных выше доказательствах при оценке чисел Бетти мы используем только степень дискриминанта $\Delta(d)$, а при оценке числа выпуклых триангуляций (и значит, числа $D^T(n, d)$ деформационных классов T-гиперповерхностей) – описание координат вершин многогранника $Q(d)$, данное Гельфандом–Капрановым–Зелевинским.

Несомненно, эти два объекта, $\Delta(d)$ и $Q(d)$, содержат еще много информации, которую только предстоит извлечь. Например, $\Delta(d)$ – очень особое многообразие, что в наших доказательствах не принималось во внимание. Можно было бы надеяться получить более сильные оценки на суммарное число Бетти, оценивая его через количество критических значений дискриминантных многочленов, что эквивалентно оцениванию объема многогранника

$Q(d)$. К сожалению, как показано в [12], это оценок не улучшает. Таким образом, требуется более тонкий анализ топологии дискриминанта $\Delta(d)$.

Уместно упомянуть в этой связи родственную задачу о нахождении оценок на количество целочисленных триангуляций. Выше мы используем наблюдение, что число выпуклых целочисленных триангуляций растет как $\exp(cd^n)$. Невыпуклые триангуляции некоторым образом связаны с целыми точками в $Q(d)$, и естественно предположить, что число невыпуклых триангуляций тоже растет как $\exp(cd^n)$, возможно, с другой константой c. В настоящее время этот результат доказан только для $n = 2$, причем без привлечения $Q(d)$, см. [11].

Еще один естественный вопрос: *Сколько (асимптотически) выпуклых триангуляций среди всех целочисленных триангуляций?* Ответ неизвестен даже при $n = 2$. Как мы уже упоминали, обе величины $\underset{e}{\asymp} \exp(d^2)$, но совпадают ли коэффициенты при d^2? В качестве нижней оценки для числа N_d всех целочисленных триангуляций квадрата $d \times d$ можно взять $(N_{k,m}^{1/km})^{d^2}$, где $N_{k,m}$ – число целочисленных триангуляций прямоугольника $k \times m$ при некоторых фиксированных k, m (если k и m фиксированы, то $N_{k,m}$ можно сосчитать явно). Во всех случаях, в которых мы вычислили $N_{k,m}$, эта оценка была намного меньше, чем верхняя оценка $(4^4/3^3)^{d^2}$ на число выпуклых триангуляций, доставляемая доказательством предложения 3.

Возможно, оценка $4^4/3^3$ улучшаема следующим образом. Для ее нахождения мы оценивали число вершин вторичного многогранника через число всех целых точек в содержащем его симплексе. Можно ожидать лучшие оценки на число вершин многогранника, когда все его вершины целочисленны (ср. с [2, 10, 16]).

Литература

1. Г. Эндрюс, *Теория разбиений.* М, Мир, 1976.
2. В. И. Арнольд, *Статистика целочисленных выпуклых многоугольников.* — Функц. анал. и прилож. **14**, № 2 (1980), 1–3.
3. А. Дегтярев, В. Харламов, *Топологические свойства вещественных алгебраических многообразий: направление Рохлина.* — Успехи мат. наук. в печати.
4. Ph. Griffiths, J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry.* — Ann. Sci. Ec. Norm. **12** (1979), 355–342.

5. I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinskii, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants.* Boston, Birkhäuser, 1994.
6. B. Haas, *Real algebraic curves and combinatorial constructions.* Ph.D. Thesis, 1997.
7. A. Harnack, *Über die Vielfaltigkeit der ebenen algebraischen Kurven.* — Math. Ann. **10** (1876), 189–199.
8. Ф. Харари, Э. Палмер, *Перечисление графов.* М., Мир, 1977.
9. I. Itenberg, *Counter-examples to Ragsdale conjecture and T-curves.* in: Cont. Math. 182. Proceedings, Michigan 1993. 1995, pp. 55–72.
10. С. В. Конягин, К. А. Севастьянов, *Оценка через объем для числа вершин выпуклого многогранника, вершины которого имеют целочисленные координаты.* — Функц. анал. и прилож. **18**, № 1 (1984), 13–15.
11. S. Yu. Orevkov, *Asymptotic number of triangulations with vertices in Z^2.* — J. of Comb. Theory, Ser. A **86** (1999), 200–203.
12. С. Ю. Оревков, *Объем многогранника Ньютона дискриминанта.* — Успехи мат. наук **54**, № 5 (1999), 165–166.
13. R. Otter, *The number of trees.* — Ann. Math. **49** (1948), 583–599.
14. G. Polya, *Kombinatirische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen.* — Acta Math. **68** (1937), 145–254.
15. R. Thom, *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles.* — Symp. in honour of Marston Morse (1965), 255–265.
16. I. Barany, A. Vershik., *On the number of convex lattice polytopes.* — GAFA **2** no. 4 (1992), 1–12.
17. O. Ya. Viro, *Gluing of plane real algebraic curves and construction of curves of degree 6 and 7.* in: Topology (Leningrad, 1982). Lect. Notes in Math., vol. 1060, Springer, 1984.
18. В. Б. Алексеев, *Дерево.* — В кн.: в кн.: Математическая энциклопедия. М., Советская энциклопедия, 1983.

Orevkov S. Yu., Kharlamov V. M. The growth rate of the number of classes of real plane algebraic curves with the growth of the degree.

The work presents some results on the asymptotics of the number of real plane algebraic curves as the degree grows. In particular, we obtain the asymptotics of the number of curves considered up to the isotopy and rigid isotopy, as well as the number of isotopic classes of maximal curves realizable by T-curves. Some results are generalized onto hypersurfaces in non-singular algebraic varieties of arbitrary dimension.

МИ РАН им. В.А. Стеклова
Университет им. Поля Сабатье (Тулуза)
ИРМА (ЦНРС)
и университет им. Луи Пастера (Страсбург)

Поступило 10 октября 1999 г.