Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

А. А. Павлов

НОРМИРОВАННЫЕ ГРУППЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Введение

Классическая процедура Гротендика позволяет в чисто алгебраической ситуации строить группы (симметризации) по заданным абелевым полугруппам. Однако в некоторых задачах некоммутативной геометрии естественным образом возникают полугруппы, которые дополнительно обладают как достаточно хорошей топологической, так и более богатой алгебраической (похожей на модульную) структурами. Абстрактному изучению полугрупп такого типа (которые мы назвали нормированными полугруппами) и их симметризаций посвящена первая часть настоящей работы.

Далее мы подробно рассматриваем наиболее интересный для нас пример: абелеву полугруппу $\mathcal{N}(A)$ (здесь A – алгебра фон Неймана). Определение этой полугруппы основывается на понятии стабильной эквивалентности между нормальными элементами W^*-алгебр, обобщающем понятие стабильной эквивалентности проекторов. Говоря нестрого, симметризации этих полугрупп можно рассматривать как K-теорию, но только построенную не по множеству проекторов, как обычно, а по множеству нормальных элементов W^*-алгебр.

Краткий обзор результатов настоящей статьи содержится в работе [2].

Автор приносит благодарность профессору Е. В. Троицкому за постоянное внимание к работе, а также к.ф.-м.н. В. М. Мануйлову и профессору А. С. Мищенко за полезные обсуждения.

Также автор признателен организаторам мемориальной конференции В. А. Рохлина за возможность представить на ней данные результаты.

Работа выполнена при поддержке INTAS (проект 96-1099) и РФФИ (проект 99-01-01202).

2. Нормированные полугруппы

Пусть N – абелева полугруппа и пусть задано действие $\mathbb{C} \times N \longrightarrow N$, $(\lambda, a) \longrightarrow \lambda a$, удовлетворяющее условиям:

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, a \in N), \tag{1}$$

$$\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, a_1, a_2 \in N), \tag{2}$$

$$1a = a,\ 0a = 0 \quad (a \in N). \tag{3}$$

Тогда N называется *модулем* над $\mathbb{C}$. Нормой на модуле N называется отображение $\|.\| : N \longrightarrow [0, +\infty)$, такое что:

$$\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\| \quad (a, b \in N), \tag{4}$$

$$\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\| \quad (\lambda \in \mathbb{C}, a \in N), \tag{5}$$

$$\|a\| = 0 \iff a = 0. \tag{6}$$

Полугруппа N с заданными на ней структурой $\mathbb{C}$-модуля и нормой называется *нормированной* (абелевой) *полугруппой*.

Пусть N – нормированная полугруппа. Для каждой точки $a \in N$ определим шар с центром в a радиуса r $(r > 0)$ как множество $O_r(a) = \{a + b : b \in N, \|b\| < r\}$. Пусть $\Gamma = \{O_r(a) : a \in N, r > 0\}$ и пусть τ есть семейство, состоящее из пустого множества и из всевозможных сумм множеств из Γ.

Лемма 1. *Система множеств τ задает топологию с базой Γ на множестве N.*

Доказательство. Пусть $a_0 \in N$, $O_1, O_2 \in \Gamma$. Надо проверить, что если $a_0 \in O_1 \cap O_2$, то найдется некоторое $O \in \Gamma$, такое что $a_0 \in O \subset O_1 \cap O_2$. Пусть $O_1 = O_{r_1}(a_1)$, $O_2 = O_{r_2}(a_2)$ $(r_i > 0,\ a_i \in N,\ i = 1, 2)$. Тогда $a_0 = a_i + b_i$ для некоторых $b_i \in N$, $\|b_i\| < r_i$ $(i = 1, 2)$. Далее, $r_1 - \|b_1\| = \alpha_1 > 0$ и $r_2 - \|b_2\| = \alpha_2 > 0$. Положим $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ и выберем $\varepsilon < \alpha/2$. Пусть $O = O_\varepsilon(a_0)$. Возьмем любой $b \in N$, $\|b\| < \varepsilon$. Тогда $a_0 + b = a_i + (b_i + b)$, причем $\|b_i + b\| \leqslant \|b_i\| + \|b\| \leqslant r_i - \alpha + \|b\| < r_i$ $(i = 1, 2)$. Таким образом, $a_0 + b \in O_1 \cap O_2$. •

Назовем топологию τ *равномерной топологией* на N.

Лемма 2. *(N, τ) является топологической полугруппой.*

Доказательство. Требуется проверить непрерывность отображения $N \times N \rightarrow N$, $(a, b) \longrightarrow a + b$. Пусть $a, b \in N$ и пусть $O = O_r(a + b)$ $(r > 0)$. Положим $O_1 = O_{r_1}(a)$ и $O_2 = O_{r_2}(b)$, где

$r_1, r_2 < r/2$. Возьмем любые $a' \in O_1$, $b' \in O_2$. Тогда $a' = a + c_1$, $\|c_1\| < r_1$ и $b' = b + c_2$, $\|c_2\| < r_2$. Поэтому $a' + b' = a + b + (c_1 + c_2)$, причем $\|c_1 + c_2\| \leqslant \|c_1\| + \|c_2\| < r$, то есть $a' + b' \in O$. •

Теперь мы хотим подробнее остановиться на рассмотрении наиболее интересного для нас класса нормированных абелевых полугрупп, выделяемого следующим дополнительным условием на норму:

$$\|a + b\| \geqslant \max\{\|a\|, \|b\|\} \quad (a, b \in N, \|a\| \neq \|b\|). \tag{7}$$

Назовем точку $a \in N$ *локальным минимумом* относительно множества $\Phi \subset N$, если $a \in \Phi$ и $\|a\| \leqslant \|b\|$ для любого $b \in \Phi$. Точка $a \in N$ называется *сильным локальным минимумом*, если эта точка есть локальный минимум относительно шара $O_{\|a\|}(a)$.

Предложение 3. *Нормированная абелева полугруппа удовлетворяет условию* (7) *тогда и только тогда, когда каждая точка этой полугруппы является сильным локальным минимумом.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (7) и пусть $a \in N$. Возьмем любой элемент $b \in O_{\|a\|}(a)$. Тогда $b = a + c$, $\|c\| < \|a\|$. Поэтому $\|b\| = \|a + c\| \geqslant \max\{\|a\|, \|c\|\} = \|a\|$. Таким образом, a есть точка сильного локального минимума. Чтобы доказать обратное утверждение, возьмем любые $a, b \in N$, $\|a\| \neq \|b\|$. Можно считать, что $\|b\| < \|a\|$. Тогда $a + b \in O_{\|a\|}(a)$ и $\|a + b\| \geqslant \|a\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$. •

Пример 4. Пусть $N = \mathbb{R}_+ \oplus \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ – это множество неотрицательных вещественных чисел. Относительно $\mathbb{C}$-действия: $(\lambda, (t_1, t_2)) \longrightarrow (|\lambda| t_1, |\lambda| t_2)$ и нормы: $\|(t_1, t_2)\| = t_1 + t_2$ $(t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+)$ полугруппа Н является нормированной полугруппой, для которой, очевидно, выполняется условие (7).

С другой стороны, для произвольной точки $(u_1, u_2) \in N$ окрестность $O_r((u_1, u_2))$ представляет собой треугольник $T_r = \{(t_1, t_2) : t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, t_1 + t_2 < r\}$ $(r > 0)$, параллельно сдвинутый на вектор (u_1, u_2). В частности, из этого описания непосредственно видно, что каждая точка полугруппы N является сильным локальным минимумом.

3. Симметризации нормированных полугрупп

Пусть H – абелева группа, на которой заданы действие $\mathbb{C} \times H \longrightarrow H$, $(\lambda, a) \longrightarrow \lambda a$, удовлетворяющее условиям (1)–(3), и отображение $\|.\| : H \longrightarrow [0,+\infty)$, для которого выполнены аксиомы (4)–(6), а также аксиома

$$\|-a\| = \|a\| \quad (a \in H). \tag{8}$$

Тогда H называется *нормированной* (абелевой) *группой*. Легко видеть, что формула $\rho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\|$ задает инвариантную (относительно сдвигов) метрику на H.

На протяжении этого параграфа мы будем предполагать, что N является абелевой полугруппой с сокращением (то есть условие $a + c = b + c$ влечет равенство $a = b$ для всех $a, b, c \in N$).

Рассмотрим симметризацию $G = S(N)$ абелева моноида N. Мы будем записывать элементы группы G в виде: $g = \langle(a, b)\rangle$ $(a, b \in N)$, где $\langle(a,b)\rangle = \{(a_0, b_0) \in N \times N : (a_0, b_0) \sim (a, b)\}$. (Напомним, что $(a_0, b_0) \sim (a, b) \iff a_0 + b = a + b_0$). Как легко видеть, стандартный гомоморфизм $s : N \longrightarrow G$, $a \longrightarrow \langle(a, 0)\rangle$ инъективен.

Пусть N является модулем над $\mathbb{C}$. Тогда формула $\lambda\langle(a, b)\rangle = \langle(\lambda a, \lambda b)\rangle$ $(\lambda \in \mathbb{C},\ a, b \in N)$ задает корректное продолжение этого действия с N на G. Выполнение аксиом (1)–(3) проверяется непосредственно.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда N – нормированная абелева полугруппа. Для каждого $g = \langle(a, b)\rangle \in G$ положим

$$\|g\| = \inf\{\|(a_0, b_0)\| : (a_0, b_0) \sim (a, b)\}, \tag{9}$$

где $\|(a_0, b_0)\| = \max\{\|a_0\|, \|b_0\|\}$.

Теорема 5. *Отображение $G \longrightarrow [0,+\infty)$, $g \longrightarrow \|g\|$, задаваемое формулой* (9), *удовлетворяет аксиомам* (4), (5), (8) *из определения нормы.*

Доказательство. Предположим, что найдутся $g_1, g_2 \in G$, такие что $\|g_1 + g_2\| - (\|g_1\| + \|g_2\|) \geqslant \alpha > 0$. Выберем тогда пары элементов $(a_1, b_1) \in g_1$ и $(a_2, b_2) \in g_2$, такие что $\|(a_1, b_1)\| = \|g_1\| + \varepsilon_1$, $\|(a_2, b_2)\| = \|g_2\| + \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \alpha$. Тогда $\|g_1 + g_2\| \leqslant \|(a_1 + a_2, b_1 + b_2)\| = \|(a_1, b_1) + (a_2, b_2)\| \leqslant \|(a_1, b_1)\| + \|(a_2, b_2)\| = \|g_1\| + \varepsilon_1 + \|g_2\| + \varepsilon_2 < \|g_1\| + \|g_2\| + \alpha$. Полученное противоречие завершает доказательство формулы (4).

Далее, заметим, что $\|0\| = \|(0, 0)\| = 0$. Поэтому формулу (5) можно проверять в предположении, что $\lambda \neq 0$. Пусть $(a_0, b_0) \sim (\lambda a, \lambda b)$, то есть $a_0 + \lambda b = \lambda a + b_0$. Положим $a' = (1/\lambda)a_0$, $b' = (1/\lambda)b_0$. Тогда $\lambda(a' + b) = \lambda(b' + a)$. Следовательно, $(a', b') \sim (a, b)$, причем

$a_0 = \lambda a'$, $b_0 = \lambda b'$. Таким образом, мы доказали, что $\langle(\lambda a, \lambda b)\rangle = \{(\lambda a', \lambda b') : (a', b') \sim (a, b)\}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|\lambda g\| = \|\langle(\lambda a, \lambda b)\rangle\| &= \inf\{\|(\lambda a', \lambda b')\| : (a', b') \sim (a, b)\} = \\ &= = \inf\{\max(\|\lambda a'\|, \|\lambda b'\|) : (a', b') \sim (a, b)\} = \\ &= = \inf\{|\lambda| \max(\|a'\|, \|b'\|) : (a', b') \sim (a, b)\} = |\lambda|\|g\|.\end{aligned}$$

Наконец, как легко видеть, $-g = \{(b, a) : (a, b) \in g\}$ для всех $g \in G$. Следовательно, $\| - g\| = \inf\{\max(\|b\|, \|a\|) : (a, b) \in g\} = \|g\|$. •

Теорема 6. *Пусть τ – равномерная топология на N. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Преднорма* (9) *на G удовлетворяет аксиоме точности* (6).
(ii) *Топологическое пространство (N, τ) хаусдорфово.*

Доказательство. Пусть (N, τ) – хаусдорфово топологическое пространство и пусть $g = \langle(a, b)\rangle \neq 0$ $(a, b \in N)$, то есть $a \neq b$. Тогда найдутся непересекающиеся шары $O_\varepsilon(a)$ и $O_\varepsilon(b)$ $(\varepsilon > 0)$. Поэтому $\max(\|a'\|, \|b'\|) \geqslant \varepsilon$ для любой пары $(a', b') \in N \times N$, такой что $a + b' = b + a'$. Следовательно, $\|g\| = \inf\{\max(\|a'\|, \|b'\|) : a + b' = b + a'\} \geqslant \varepsilon > 0$.

Предположим теперь, что преднорма (9) на G точна, и пусть $a, b \in N$, такие что $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) \neq \emptyset$ для всех $\varepsilon > 0$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементы $a'_\varepsilon, b'_\varepsilon \in N$, такие что $\max(\|a'_\varepsilon\|, \|b'_\varepsilon\|) < \varepsilon$ и $a + b'_\varepsilon = b + a'_\varepsilon$. Поэтому $\|\langle(a, b)\rangle\| = 0$, то есть $a = b$. •

Предложение 7. *Пусть нормированная полугруппа N удовлетворяет условию* (7). *Тогда ограничение преднормы* (9) *с G на N совпадает с исходной нормой на полугруппе.*

Доказательство. Для каждого $a \in N$ требуется проверить, что $\|a\| = \|\langle(a, 0)\rangle\|$. Пусть $(a_0, b_0) \sim (a, 0)$, то есть $a_0 = a + b_0$. Если $\|a\| \neq \|b_0\|$, то $\|a_0\| = \|a + b_0\| \geqslant \max(\|a\|, \|b_0\|)$ в силу условия (7). Поэтому $\max(\|a_0\|, \|b_0\|) \geqslant \|a\|$. Однако, последнее неравенство также имеет место и при условии, что $\|a\| = \|b_0\|$. Действительно, в этом случае $\max(\|a_0\|, \|b_0\|) \geqslant \|b_0\| = \|a\|$. Следовательно, $\|\langle(a, 0)\rangle\| \geqslant \|a\|$. Выполнение обратного неравенства очевидно. •

4. Определение полугруппы $\mathcal{N}(A)$

Пусть A – алгебра фон Неймана, $M_r(A)$ – алгебра матриц $r \times r$ с элементами из A, $M_\infty(A)$ – индуктивный предел последовательности $\{M_r(A)\}_{r=1}^{\infty}$ и $M_\infty(A)_n$ – множество нормальных элементов в $M_\infty(A)$. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ семейство всех борелевских подмножеств комплексной плоскости. Для $a \in M_\infty(A)_n$ и $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ через $P_a(E)$ мы будем обозначать спектральный проектор элемента a на множество E. Заметим, что $P_a(E) \in M_\infty(A)_n$, так как алгебры фон Неймана замкнуты относительно борелевского исчисления. Как обычно, $\mathrm{sp}(a)$ обозначает спектр элемента a. Наконец, для обозначения стабильной эквивалентности (см. [1]) проекторов $p, q \in M_\infty(A)$ будет использоваться запись $p \simeq q$.

Назовем борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$ *допустимым*, если нуль не принадлежит замыканию этого множества.

Определение 8. Мы говорим, что элементы $a, b \in M_\infty(A)_n$ эквивалентны, и пишем $a \simeq b$, тогда и только тогда, когда $P_a(E) \simeq P_b(E)$ для всех допустимых борелевских подмножеств $E \subset \mathbb{C}$.

На проекторах это отношение эквивалентности совпадает с обычной стабильной эквивалентностью. Легко видеть, что $a \oplus 0_m \simeq a$, где 0_m – нулевая $m \times m$-матрица и $a \in M_\infty(A)_n$. Пусть $\mathcal{N}(A) = M_\infty(A)_n/\simeq$. Обозначим через $[a]$ класс эквивалентности элемента $a \in M_\infty(A)_n$. В силу формулы $P_{a\oplus b}(E) = P_a(E) \oplus P_b(E)$ ($a, b \in M_\infty(A)_n$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$), операция прямой суммы корректно продолжается с множества $M_\infty(A)_n$ на семейство факторклассов $\mathcal{N}(A)$ и наделяет это семейство структурой абелевой полугруппы (с сокращением).

Определение 9. Для произвольной алгебры фон Неймана A определим группу $N_0(A)$ как симметризацию абелева моноида $\mathcal{N}(A)$.

После всего сказанного очевидно, что $K_0(A)$ содержится в качестве подгруппы в группе $N_0(A)$.

5. Структура нормированной полугруппы на $\mathcal{N}(A)$

Прежде чем переходить к основной теме этого параграфа заметим, что $\|a \oplus b\| = \max(\|a\|, \|b\|)$ для всех $a, b \in M_\infty(A)_n$, так как норма произвольного нормального элемента из $M_\infty(A)$ совпадает со спектральным радиусом этого элемента. В частности, $\|a \oplus b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ ($a, b \in M_\infty(A)_n$).

Теорема 10. *$\mathcal{N}(A)$ является нормированной абелевой полугруппой относительно $\mathbb{C}$-действия*

$$\mathbb{C} \times \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{N}(A), \quad (\lambda, [a]) \longrightarrow [\lambda a]$$

и нормы

$$\|[a]\| = \inf\{\|c\| : c \simeq a, c \in M_\infty(A)_n\}, \quad [a] \in \mathcal{N}(A).$$

Доказательство. Пусть $a \in M_\infty(A)_n$ и $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Как легко видеть, $P_{\lambda a}(E) = P_a(E/\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$), где $E/\lambda = \{\mu/\lambda : \mu \in E\}$. Следовательно, если $a \simeq b$, то $\lambda a \simeq \lambda b$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in M_\infty(A)_n$. Таким образом, отображение $\mathbb{C} \times \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{N}(A)$, $(\lambda, [a]) \longrightarrow [\lambda a]$ корректно определено. Выполнение условий (1)–(3) для этого отображения очевидно.

Перейдем теперь к проверке аксиом нормы. Предположим, что $\|[a] + [b]\| - (\|[a]\| + \|[b]\|) \geqslant \alpha > 0$ для некоторых $[a], [b] \in \mathcal{N}(A)$. Выберем элементы $a' \in [a]$ и $b' \in [b]$, такие что $\|a'\| = \|[a]\| + \varepsilon_1$, $\|b'\| = \|[b]\| + \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \alpha$. Тогда $\|[a] + [b]\| = \|[a \oplus b]\| \leqslant \|a' \oplus b'\| \leqslant \|a'\| + \|b'\| = \|[a]\| + \varepsilon_1 + \|[b]\| + \varepsilon_2 < \|[a]\| + \|[b]\| + \alpha$ (мы учли замечание, приведенное в начале параграфа). Полученное противоречие завершает доказательство свойства (4).

Легко видеть, что $[\lambda a] = \{\lambda c : c \simeq a\}$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in M_\infty(A)_n$. Поэтому

$$\|\lambda[a]\| = \|[\lambda a]\| = \inf\{\|\lambda c\| : c \simeq a\} = |\lambda| \inf\{\|c\| : c \simeq a\} = |\lambda| \|[a]\|.$$

Проверим теперь аксиому точности. Пусть $[a] \in \mathcal{N}(A)$, $[a] \neq 0$. Тогда найдется допустимое борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$, такое что $P_a(E) \not\simeq 0$. Расстояние $\rho(E, 0) = r_0$ от E до нуля положительно. Далее, для любого $b \in [a]$ имеем: $P_b(E) \simeq P_a(E) \not\simeq 0$. В частности, $P_b(E) \neq 0$. Следовательно, $E \cap \mathrm{sp}(b) \neq \emptyset$. Поэтому $\|b\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(b)\} \geqslant r_0$ для всех $b \in [a]$, то есть $\|[a]\| \geqslant r_0 > 0$. •

Пусть τ – равномерная топология на $\mathcal{N}(A)$.

Теорема 11. *Топологическое пространство $(\mathcal{N}(A), \tau)$ хаусдорфово.*

Доказательство. Допустим, найдутся $[a], [b] \in \mathcal{N}(A)$, такие что $[a] \neq [b]$ и $O_\varepsilon([a]) \cap O_\varepsilon([b]) \neq \emptyset$ для всех $\varepsilon > 0$. Фиксируем некоторое допустимое борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$, для которого $P_a(E) \not\simeq$

$P_b(E)$, и обозначим через r_0 (положительное) расстояние от E до нуля. Пусть $\varepsilon < r_0$. Выберем элементы $[a_\varepsilon], [b_\varepsilon] \in \mathcal{N}(A)$, такие что $\max(\|[a_\varepsilon]\|, \|[b_\varepsilon]\|) < \varepsilon$ и $a \oplus a_\varepsilon \simeq b \oplus b_\varepsilon$. Тогда для любых $a' \in [a_\varepsilon]$, $b' \in [b_\varepsilon]$ имеем: $P_{a'}(E) \not\simeq P_{b'}(E)$. В частности, можно считать, что $P_{a'}(E) \not\simeq 0$. Следовательно, $E \cap \mathrm{sp}(a') \neq \emptyset$. Поэтому $\|a'\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(a')\} \geqslant r_0 > \varepsilon$ для всех $a' \in [a_\varepsilon]$, то есть $\|[a_\varepsilon]\| > \varepsilon$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. •

Теперь установим, что полугруппа $\mathcal{N}(A)$ удовлетворяет условию (7). Для этого нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Итак, пусть $a \in M_\infty(A)_n$ и пусть $O \subset \mathrm{sp}(a)$ – открытое (в индуцированной топологии) множество. Возьмем точку $\lambda_0 \notin O$. Для каждого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ положим

$$Q(E) = \begin{cases} P_a(E \setminus O), & \text{если } \lambda_0 \notin E; \\ P_a(E \setminus O) + P_a(O), & \text{если } \lambda_0 \in E. \end{cases} \tag{10}$$

Лемма 12. *Семейство самосопряженных проекторов $Q(E)$, задаваемое формулой* (10), *является проекторозначной мерой на компакте $X = (\mathrm{sp}(a) \setminus O) \cup \{\lambda_0\}$.*

Доказательство. Требуется проверить (см. [4, п. VII.3]) выполнение двух свойств: (a) $Q(X) = \mathrm{Id}$ и (b) если $E = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i$, $E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, то $Q(E) = s\text{-}\lim_n(\sum_{i=0}^{n} Q(E_i))$ (здесь s-lim обозначает предел в сильной операторной топологии).

Для доказательства свойства (a) требуется рассмотреть два случая. Пусть сначала $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(a)$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q(\mathrm{sp}(a) \setminus O) = P_a(\mathrm{sp}(a) \setminus O) + P_a(O) = \\ &= P_a(\mathrm{sp}(a) \setminus O \sqcup O) = P_a(\mathrm{sp}(a)) = \mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

Если $\lambda_0 \notin \mathrm{sp}(a)$, то $P_a(\{\lambda_0\}) = 0$ и мы можем написать:

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q(\mathrm{sp}(a) \setminus O \sqcup \{\lambda_0\}) = P_a(\mathrm{sp}(a) \setminus O \sqcup \{\lambda_0\}) + P_a(O) = \\ &= P_a(\mathrm{sp}(a) \setminus O) + P_a(\{\lambda_0\}) + P_a(O) = P_a(\mathrm{sp}(a)) = \mathrm{Id}\,. \end{aligned}$$

Свойство (b) проверим только для случая, когда $\lambda_0 \in E$ (другая возможность рассматривается аналогично). Итак, можем считать, что $\lambda_0 \in E_0$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i) &= P_a(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} E_i \setminus O) + P_a(O) = \\ &= s\text{-}\lim_n (\sum_{i=0}^{n} P_a(E_i \setminus O)) + P_a(O) = \\ &= s\text{-}\lim_n (P_a(E_0 \setminus O) + P_a(O) + \sum_{i=1}^{n} P_a(E_i \setminus O)) = \\ &= s\text{-}\lim_n (Q(E_0) + \sum_{i=1}^{n} Q(E_i)) = s\text{-}\lim_n (\sum_{i=0}^{n} Q(E_i)). \quad \bullet \end{aligned}$$

Назовем борелевское множество $E_0 \subset \mathbb{C}$ *строго стабильно тривиальным* (относительно нормального элемента $a \in M_\infty(A)$), если $P_a(E) \simeq 0$ для любого борелевского подмножества $E \subset E_0$.

Лемма 13. *Пусть $a \in M_\infty(A)_n$ и пусть $O \subset \mathrm{sp}(a)$ – открытое (в индуцированной топологии) строго стабильно тривиальное (относительно элемента* a) *множество. Пусть, кроме того, задана некоторая точка $\lambda_0 \notin O$. Тогда существует элемент $b \in M_\infty(A)_n$, такой что $b \simeq a$ и $\mathrm{sp}(b) = (\mathrm{sp}(a) \setminus O) \cup \{\lambda_0\}$.*

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, формула (10) задает проекторозначную меру $Q(E)$ на компакте $X = (\mathrm{sp}(a) \setminus O) \cup \{\lambda_0\}$. Этой мере однозначно соответствует нормальный элемент $b = \int_X \lambda dQ$, причем $\mathrm{sp}(b) = X$. Рассмотрим произвольное допустимое борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$. Учитывая, что $P_a(E \cap O) \simeq 0$ и $P_a(O) \simeq 0$, разберем два возможных случая: (a) допустим $\lambda_0 \notin E$, тогда $P_b(E) \equiv Q(E) = P_a(E \setminus O) \simeq P_a(E \setminus O) + P_a(E \cap O) = P_a((E \setminus O) \sqcup (E \cap O)) = P_a(E)$; ($b$) пусть теперь $\lambda_0 \in E$, тогда $P_b(E) \equiv Q(E) = P_a(E \setminus O) + P_a(O) \simeq P_a(E \setminus O) \simeq P_a(E \setminus O) + P_a(E \cap O) = P_a(E)$. Таким образом, элементы a и b эквивалентны. $\bullet$

Теорема 14. *Нормированная полугруппа $\mathcal{N}(A)$ удовлетворяет условию* (7).

Доказательство. Допустим, найдутся элементы $[a], [b] \in \mathcal{N}(A)$, такие что $\|[a]\| \neq \|[b]\|$ и

$$\max(\|[a]\|, \|[b]\|) - \|[a \oplus b]\| = \alpha > 0. \tag{11}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\|[a]\| - \|[b]\| = \beta > 0$. Далее требуется разобрать два случая.

(i) Пусть $\|[b]\| < \|[a \oplus b]\|$. Возьмем $\varepsilon < \alpha/2$ и фиксируем $c \in [a \oplus b]$, такой что $\|c\| - \|[a \oplus b]\| < \varepsilon$. Тогда для любого элемента $a' \in [a]$ имеем:

$$\|a'\| \geqslant \|[a]\| = \|[a \oplus b]\| + \alpha > \|c\| - \varepsilon + \alpha > \|c\| + \alpha/2. \qquad (12)$$

Мы получим искомое противоречие с условием (11), если найдем элемент $a' \in [a]$, для которого неравенство (12) не выполняется.

Возьмем $b' \simeq b$, такой что $\|b'\| - \|[b]\| < (\beta - \alpha)/2$. Далее, для каждого $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$ с условием $|\lambda| > \|c\|$ найдется окрестность $O(\lambda) \subset \mathrm{sp}(a)$, $0 \notin O(\lambda)$, такая что $O(\lambda) \cap \mathrm{sp}(c) = \emptyset$. Кроме того, $O(\lambda) \cap \mathrm{sp}(b') = \emptyset$ в силу выбора элемента b'. Таким образом, для произвольного борелевского подмножества $E \subset O(\lambda)$ имеем: $P_c(E) \simeq P_a(E) \oplus P_{b'}(E)$ и $P_c(E) = P_{b'}(E) = 0$. Следовательно, $P_a(E) \simeq 0$. Другими словами, $O(\lambda)$ является строго стабильно тривиальным (относительно a) множеством. По лемме 13 найдется элемент $a' \simeq a$, такой что $\mathrm{sp}(a') = (\mathrm{sp}(a) \setminus O(\lambda)) \cup \{0\}$. Повторяя эту конструкцию для всех точек $\lambda \in \mathrm{sp}(a)$, для которых $|\lambda| > \|c\|$, можем считать, что $\mathrm{sp}(a') \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \|c\|\}$. Следовательно, $\|a'\| \leqslant \|c\|$ и неравенство (12) для элемента $a' \in [a]$ не выполнено.

(ii) Второй случай, когда $\|[a \oplus b]\| \leqslant \|[b]\|$, разбирается аналогично. Мы ограничимся лишь общей схемой доказательства. Возьмем $\varepsilon < \beta/2$ и фиксируем $b' \in [b]$, такой что $\|b'\| - \|[b]\| < \varepsilon$. Тогда для любого элемента $a' \in [a]$ должна выполняться оценка $\|a'\| \geqslant \|b'\| + \beta/2$. Далее, как уже было показано, находим элемент $a' \simeq a$, такой что $\|a'\| \leqslant \|b'\|$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\bullet$

Заметим, что результаты этого параграфа позволяют нам, в частности, определить структуру метрического пространства на симметризации $N_0(A)$ абелева моноида $\mathcal{N}(A)$.

6. Заключительные замечания

Скажем теперь несколько слов о возможных применениях групп $N_0(A)$. Для того чтобы определить $\mathbb{C} \otimes K_0(A)$-значные числа Лефшеца (первого типа) для унитарного эндоморфизма $W*$-эллиптического комплекса (см. [5, 8, 6, 7]), обычно предполагается, что этот эндоморфизм есть элемент представления некоторой компактной группы. Группы $N_0(A)$ как расширения $\mathbb{C}\otimes K_0(A)$-групп естественно возникают при попытке рассмотрения произвольных унитарных эндоморфизмов $W*$-эллиптических комплексов. При этом оказывается возможным определить (обобщенные) числа Лефшеца для таких эндоморфизмов со значениями в группе $N_0(A)$.

Кроме того, имеется тесная связь между группами $N_0(A)$ и операторной K-теорией (см. [3]).

Литература

1. Мерфи Дж., *C^*-алгебры и теория операторов.*. М., Факториал, 1997.
2. Павлов А. А., *Симметризации нормированных полугрупп.* — В кн.: XXI конференция молодых ученых (МГУ), сб. мат.. М., 1999, в печати.
3. Павлов А. А., *Функтор N_0 над категорией алгебр фон Неймана и его связь с операторной K-теорией.* — Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех. (2000), в печати.
4. Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.* М., Мир, 1979.
5. Соловьев Ю. П., Троицкий Е. В., *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.* М., Факториал, 1996.
6. Troitsky E. V., *Lefschetz numbers of C^*-complexes.* — Lect. Notes Math. **1474** (1991), 193–206.
7. Troitsky E. V., *Orthogonal complements and endomorphisms of Hilbert modules and C^*-elliptic complexes.* — in: Novikov Conjectures, Index Theorems and Ridgidity, Vol. 2. London Math. Soc. Lect. Notes Series **227** (1995), 309–331.
8. Троицкий Е. В., Франк М., *Числа Лефшеца и геометрия операторов в W^*-модулях.* — Функц. анал. и его прилож. **30**, № 4 (1996), 45–57.

Pavlov A. A. Normed groups and their applications in noncommutative differential geometry.

Our work is devoted to abstract study of so-called normed semi-groups, i.e., semi-groups having both rich topological and rich algebraic structure, which arise in some problems of non-commutative geometry. We consider in details the most interesting example, namely, an Abel semi-group $\mathcal{N}(A)$, where A is a von Neumann algebra. The definition of this semi-group is based on the notion of stable equivalence of normal elements of W^*-algebras which generalizes the notion of stable equivalence of projectors.

Московский государственный университет

Поступило 11 ноября 1999 г.