Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

Е. В. Троицкий

ИЗОМОРФИЗМ ТОМА В "ДВАЖДЫ" ЭКВИВАРИАНТНОЙ K-ТЕОРИИ C^*-РАССЛОЕНИЙ

Рациональный вариант теоремы об индексе для C^*-эллиптических операторов [1, 2] получил многочисленные применения в дифференциальной топологии (применение к доказательству гипотезы Новикова), дифференциальной геометрии (кривизна спинорных многообразий), теории эллиптических операторов со случайными и периодическими коэффициентами и т. д. Затем было получено эквивариантное обобщение этой теоремы [4] и эквивариантное обобщение, учитывающее элементы конечного порядка [5], также нашедшие свои применения (см., напр. [11, 3]). В этих теоремах компактная группа Ли G действовала на тотальном пространстве расслоения на A-модули, но не на самой алгебре A. Для ряда же приложений, наиболее классическим из которых является вычисление эквивариантного индекса семейства эллиптических операторов, необходимо, чтобы группа действовала на A, причем согласованно с действием на тотальном пространстве. Решению этой задачи была посвящена работа [12]. В настоящей работе мы даем простое доказательство теоремы об изоморфизме Тома в соответствующей $\mathbf{K}_G(\ ,A)$-теории. Этот изоморфизм необходим, в частности, для доказательства указанной теоремы об индексе.

Автор выражает глубокую благодарность В. М. Мануйлову и А. С. Мищенко за полезные обсуждения и искреннюю признательность организаторам замечательной мемориальной конференции В. А. Рохлина за возможность представить на ней настоящие результаты.

1. Основные определения

Пусть G – компактная группа Ли, непрерывно действующая инволютивными автоморфизмами на C^*-алгебре A. Если A обла-

Работа частично поддержана грантом РФФИ N 99-01-01201 и грантом ИНТАС N 96-1099.

дает единицей, то считаем единицу инвариантной. Тогда $g \in G$ переводит самосопряженные элементы в самосопряженные, а положительные – в положительные.

Замечание 1.1. При этом если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $ga \geqslant gb$. Действительно, $a - b = c^*c \geqslant 0$. Тогда $ga - gb = g(c)^*g(c) \geqslant 0$.

Под GGA–модулем M мы будем подразумевать A-модуль с $\mathbb{C}$-линейным действием G, удовлетворяющим

$$g(m \cdot a) = g(m) \cdot g(a), \qquad m \in M, \qquad a \in A$$

(ср. [10]).

Для паракомпактного пространства X обозначим через $\mathrm{Vect}(X; A)$ категорию локально тривиальных расслоений $p : E \to X$ со слоем $M = p^{-1}(x) \in \mathcal{P}(A)$ и структурной группой $\mathrm{Aut}_A M$. Такие расслоения мы будем называть A-расслоениями. Указанная категория является банаховой в смысле Каруби [8, 9]. Пусть G – компактная группа Ли, непрерывно действующая на X и на алгебре A.

Далее, A-расслоение $p : E \to X$ будем называть *GGA-расслоением*, если на E задана структура G-пространства, причем для любых элементов $g \in G$, $e \in E$, $x \in X$ выполнены условия

1. $gp(e) = pg(e)$;
2. $g : p^{-1}(x) \to p^{-1}(gx)$ является GGA-линейным отображением (т. е. $g(e \cdot a) = g(e) \cdot g(a)$).

Образуем банахову категорию $\mathbf{Vect}_G(X; A)$, объектами которой являются GGA-расслоения, а морфизмами – те морфизмы категории $\mathrm{Vect}(X; A)$, которые коммутируют с действием группы G.

Множество всех непрерывных сечений $s : X \to E$ некоторого GGA-расслоения E над компактным пространством X в равномерной топологии образует банахов A-модуль $\Gamma(E)$. Группа G сильно непрерывно действует на $\Gamma(E)$ по правилу $(gs)(x) = gs(g^{-1}x)$, где $g \in G$, $s \in \Gamma(E)$, $x \in X$. Заметим, что этот модуль будет GGA–модулем над алгеброй непрерывных A-значных функций на X:

$$\begin{aligned} g(s \cdot a)(x) &= g((s \cdot a)(g^{-1}x)) = g(s(g^{-1}x) \cdot a(g^{-1}x)) = \\ &= g(s(g^{-1}x)) \cdot g(a(g^{-1}x)) = g(s)(x) \cdot g(a)(x) = \\ &= (g(s) \cdot g(a))(x). \end{aligned}$$

Следуя общей схеме [8], определим K-группы для компактного G-пространства X, полагая

$$\mathbf{K}_G^{p,q}(X,A) = K^{p,q}(\mathbf{Vect}_G(X,A)),$$
$$\mathbf{K}_G^{n}(X,A) = K^{n}(\mathbf{Vect}_G(X,A)),$$
$$\mathbf{K}_G(X,A) = K^{0,0}(\mathbf{Vect}_G(X,A)).$$

Подробности применения указанной схемы построения K-теории в данной ситуации, в частности, реализацию элементов комплексами, можно найти в [12].

2. Гомоморфизм Тома

Пусть X – G-пространство, $p : F \to X$ – комплексное расслоение над X, а $s : X \to F$ – инвариантное сечение. Обозначим через $\Lambda^i(F)$ комплексное G-расслоение i-векторов над X. Определим над X комплекс $\Lambda(F,s)$ длины $n = \dim F$:

$$\Lambda(F,s) = (0 \to \Lambda^0(F) \xrightarrow{\alpha^0} \Lambda^1(F) \xrightarrow{\alpha^1} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} \Lambda^n(F) \to 0),$$

где $\alpha^k(v_x) = s(x) \wedge v_x$ для $v_x \in \Lambda^k(F)_x$.

Лемма 2.1 [7].

1. $(\Lambda(F,s),\alpha)$ *действительно является комплексом.*
2. $\operatorname{supp}(\Lambda(F,s)) = \{x \in X | s(x) = 0\}$ *и если это множество компактно, то определен элемент* $[\Lambda(F,s)] \in K_G(X)$. •

Пусть $\pi : p^*F \to F$ – расслоение с тотальным пространством

$$p^*F = \{(f_1,f_2) \in F \times F : |: p(f_1) = p(f_2)\}, \qquad \pi(f_1,f_2) = f_1.$$

Векторное расслоение (p^*F,π,F) имеет каноническое сечение

$$s_F : F \to p^*F, \qquad s_F(f) = (f,f).$$

Носитель s_F равен X. Таким образом, если X – компакт, то определен элемент $[\Lambda(p^*F,s_F)] = \lambda_F \in K_G(X)$. Далее, если $a \in \mathbf{K}_G(X;A)$, $b \in K_G(F)$, то обозначим через $a \cdot b$ элемент $p^*(a) \otimes b \in \mathbf{K}_G(F;A)$.

Определение 2.2. Если база векторного расслоения компактна, *гомоморфизмом Тома* называется отображение

$$\varphi : \mathbf{K}_G(X;A) \to \mathbf{K}_G(F;A), \qquad \varphi(a) = a \cdot \lambda_F.$$

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Гомоморфизм Тома φ является морфизмом $R(G)$-модулей.* $\bullet$

Пусть $i : X \hookrightarrow F$ – вложение нулевого сечения F. Оно индуцирует гомоморфизмы

$$i^* : \mathbf{K}_G(F;A) \to \mathbf{K}_G(X;A), \qquad i^*\varphi : K_G(X;A) \to K_G(X;A).$$

Предложение 2.4. *Если X компактно, то определена последовательность*

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 F \xrightarrow{0} \Lambda^1 F \xrightarrow{0} \Lambda^2 F \longrightarrow \ldots \xrightarrow{0} \Lambda^n F \longrightarrow 0,$$

задающая элемент $K_G(X)$. При этом для любого элемента $a \in \mathbf{K}_G(X;A)$

$$i^*\varphi(a) = a \cdot [0 \longrightarrow \Lambda^0 F \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} \Lambda^n F \longrightarrow 0] = a \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \Lambda^i F.$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathbf{K}_G(X;A)$ задается комплексом

$$a = [(\mathcal{E}, \alpha)] = [0 \longrightarrow E^k \xrightarrow{\alpha^k} \ldots \xrightarrow{\alpha^1} E^0 \longrightarrow 0].$$

Тогда

$$\varphi(a) = a \cdot \lambda_F = [(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha) \otimes \Lambda(p^*F, s_F)],$$

поэтому

$$i^*\varphi(a) = [(i^*p^*\mathcal{E}, i^*p^*\alpha)] \otimes [i^*\Lambda(p^*F, s_F)].$$

Осталось заметить, что поскольку $pi = 1$, то $(i^*p^*\mathcal{E}, i^*p^*\alpha) = (\mathcal{E}, \alpha) = a$, а ограничение комплекса $\Lambda(p^*F, s_F)$ на X равно

$$[0 \longrightarrow \Lambda^0 F \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{0} \Lambda^n F \longrightarrow 0]. \qquad \bullet$$

Перейдем к случаю локально компактного пространства X. Комплекс $\Lambda(p^*F, s_F)$ не имеет компактного носителя и не определяет элемента $\lambda_F \in K_G(F)$. Однако, если $a = [(\mathcal{E}, \alpha)] \in \mathbf{K}_G(X;A)$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\{(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha) \otimes \Lambda(p^*F, s_F)\} \subset& \\ \subset \operatorname{supp}(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha) \cap \operatorname{supp}\Lambda(p^*F, s_F) \subset& \\ \subset \operatorname{supp}(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha) \cap X = \operatorname{supp}(\mathcal{E}, \alpha).& \end{aligned}$$

Таким образом, комплекс $(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha)\otimes\Lambda(p^*F, s_F)$ имеет компактный носитель. Получаем гомоморфизм $R(G)$-модулей

$$\varphi : \mathbf{K}_G(X;A) \to \mathbf{K}_G(F;A), \qquad \varphi(a) = [(p^*\mathcal{E}, p^*\alpha) \otimes \Lambda(p^*F, s_F)].$$

Так же как и в компактном случае,

$$i^*\varphi(a) = a\,[0 \to \Lambda^0 F \xrightarrow{0} \Lambda^1 F \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \Lambda^n F \to 0].$$

Переходя по периодичности Ботта к K^1 (см. [12]), определим *гомоморфизм Тома* в общем случае:

$$\varphi = \varphi_A^F : \mathbf{K}_G^*(X;A) \to \mathbf{K}_G^*(F;A).$$

Пусть теперь E и F – два комплексных G-расслоения над X. Тогда определено произведение

$$\mu : K_G(E) \otimes K_G(F) \to K_G(E \times F).$$

Так как вложение $E \oplus F \to E \times F$ индуцирует гомоморфизм

$$K_G(E \times F) \to K_G(E \oplus F),$$

то мы получаем умножение $\cdot : K_G(E) \otimes K_G(F) \to K_G(E \oplus F)$.

Теорема 2.5. 1. [7] *В случае компактного* X

$$\lambda_E \cdot \lambda_F = \lambda_{E\oplus F}.$$

2. *В общем случае* $\varphi_A^E \cdot \varphi_{\mathbb{C}}^F = \varphi_{\mathbb{C}}^E \cdot \varphi_A^F = \varphi_A^{E\oplus F}$, *равенства справедливы в том смысле, что если, например,* $ab \in \mathbf{K}_G(X;A)$, *где* $a \in K_G(X)$, $b \in \mathbf{K}_G(X;A)$, *то* $\varphi_{\mathbb{C}}^E(a)\cdot\varphi_A^F(b) = \varphi_A^{E\oplus F}(ab)$.

3. [7] *Пусть* F_1 *и* F_2 *– два комплексных расслоения над* X, *а* s_1 *и* s_2 *– их сечения. Тогда*

$$\Lambda(F_1 \oplus F_2, s_1 \oplus s_2) = \Lambda(F_1, s_1) \otimes \Lambda(F_2, s_2).$$

Доказательство пункта 2 непосредственно следует из пункта 1 и определения гомоморфизма Тома. Доказательство пп. 1, 3 см. в [7]. •

Предложение 2.6. *Рассмотрим $E\oplus F$ как расслоение над X и как расслоение над E. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^*_G(X;A) & \xrightarrow{\varphi^E} & \mathbf{K}^*_G(E;A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_1^{E\oplus F}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_2^{E\oplus F}} \\ \mathbf{K}^*_G(E\oplus F;A) & = & \mathbf{K}^*_G(E\oplus F;A) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим проекции

$$p: E\to X,\quad q: F\to X,\quad r: E\oplus F\to X,\quad t: E\oplus F\to E.$$

Пусть $x\in K_G(X;A)$. Тогда $\varphi^E(x) = p^*(x)\,\Lambda(p^*E, s_E)$,

$$\varphi_2^{E\oplus F}\varphi^E(x) = t^*\Big(p^*(x)\Lambda(p^*E,s_E)\Big)\,\Lambda\Big(t^*(E\oplus F), s_{E\oplus F}\Big),$$
$$t^*p^*(x) = r^*(x),\qquad t^*\Lambda(p^*E,s_E) = \Lambda(r^*E, t^*s_E)$$

и $\Lambda(t^*(E\oplus F), s_{E\oplus F}) = \Lambda(r^*F, t^*s_F)$. Поскольку $t^*s_E + t^*s_F = s_{E\oplus F}$, то в силу пункта 3 теоремы 2.5 (мы для краткости отождествляем элементы К-групп и их представителей)

$$\varphi_2^{E\oplus F}\varphi^E(x) = r^*(x)\Lambda(r^*E, t^*s_E)\Lambda(r^*F, t^*s_F) =$$
$$= r^*(x)\Lambda(r^*(E\oplus F), s_{E\oplus F}) = \varphi_1^{E\oplus F}(x). \qquad \bullet$$

3. Основная теорема

Теорема 3.1. *Если X – многообразие, то φ_A является изоморфизмом.*

Доказательство. Прежде всего, разберем случай тривиального расслоения $X\times V$, где V – комплексное конечномерное G-пространство.

Обозначим через 1 тривиальный 1-мерный G-модуль, так что проективное пространство $P(V\oplus 1)$ является компактификацией V и мы имеем естественный гомоморфизм

$$j: \mathbf{K}_G(V;A)\to \mathbf{K}_G(P(V\oplus 1);A),$$
$$j: \mathbf{K}_G(V\times X;A)\to \mathbf{K}_G(P(V\oplus 1)\times X;A).$$

Пусть X компактно. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \mathbf{K}_G(P(V\oplus 1)\times X; A)$. Рассмотрим аналитический индекс соответствующего семейства операторов Дольбо над $P(V\oplus 1)$ с коэффициентами в x (ср. [6]), т. е. оператора над C^*-алгеброй $C(X)\otimes A$ (см. [5, 12]). Это элемент $\mathbf{K}_G(X; A)$. С использованием композиции с j (ср. [6, стр. 123]) получаем семейство отображений $\alpha = \alpha_{X,A} : \mathbf{K}_G(V\times X; A) \to \mathbf{K}_G(X; A)$, удовлетворяющих следующим свойствам:

(a1) α функториально относительно G-морфизмов X и A;

(a2) коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_G(V\times X; B)\otimes \mathbf{K}_G(X; A) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(V\times X; B\otimes A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{X,B}\otimes 1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{X,B\otimes A}} \\ \mathbf{K}_G(X; B)\otimes \mathbf{K}_G(X; A) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(X; B\otimes A), \end{array}$$

в частности, α – морфизм $K_G(X)$-модулей;

(a3) $\alpha_{pt,\mathbb{C}}(\lambda_V^*) = 1 \in R(G)$.

Фактически, переводя пространство параметров в коэффициенты:

$$\mathbf{K}_G(P(V\oplus 1)\times X; B) \cong \mathbf{K}_G(P(V\oplus 1); C(X)\otimes B),$$

получаем, что все сводится к случаю $X = pt$, а (a2) примет вид

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_G(V; B)\otimes \mathbf{K}_G(pt; A) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(V; B\otimes D) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{pt,B}\otimes 1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{pt,B\otimes D}} \\ \mathbf{K}_G(pt; B)\otimes \mathbf{K}_G(pt; D) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(pt; B\otimes D), \end{array} \qquad (1)$$

а функториальность (a1) сведется к функториальности по отношению к алгебре коэффициентов. Стандартным образом при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(V; A) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(V; A^+) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(V; \mathbb{C}) \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(pt; A) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(pt; A^+) & \longrightarrow & \mathbf{K}_G(pt; \mathbb{C}) \end{array}$$

α распространяется на неунитальный (в частности, некомпактный) случай. При этом диаграмма (1) по-прежнему коммутативна. Нам понадобятся следующие два частных случая ее. При

$B = C_0(X) \otimes A$, $D = C_0(V)$ получаем для $x \in \mathbf{K}_G(V \times X; A)$, $y \in K_G(V)$

$$\alpha_{X \times V, A}(x \otimes y) = \alpha_{X,A}(x) \otimes y \in \mathbf{K}_G(X \times V; A). \qquad (2)$$

При $D = C_0(X) \otimes A$, $B = C_0(W)$ получаем для $y' \in \mathbf{K}_G(W \times X; A)$, $x' \in K_G(V)$

$$\alpha_{W \times X, A}(x' \otimes y') = \alpha_{pt,\mathbb{C}}(x') \otimes y' \in \mathbf{K}_G(W \times X; A). \qquad (3)$$

Пусть $x \in \mathbf{K}_G(X; A)$, тогда по (3) с $W = 0$ и (a2)

$$\alpha(\lambda_V^* x) = \alpha(\lambda_V^*)x = x. \qquad (4)$$

Пусть $y \in \mathbf{K}_G(V \times X; A) = \mathbf{K}_G(V; C_0(X) \otimes A)$, тогда по (2) и (3) с $W = V$

$$\alpha(y) \otimes \lambda_V^* = \alpha(y \otimes \lambda_V^*) = \alpha(\lambda_V^* \otimes \widetilde{y}) = \alpha(\lambda_V^*)\widetilde{y} = \widetilde{y} \in \mathbf{K}_G(X \times V; A), \quad (5)$$

где через $\widetilde{y} \in \mathbf{K}_G(X \times V; A)$ обозначен элемент, полученный из y при помощи отображения $X \times V \to V \times X$, $(x, v) \mapsto (-v, x)$ (так что $V \times X \times V \to V \times X \times V$, $(u, x, v) \mapsto (-v, x, u)$ гомотопно тождественному). Применив к обеим частям (5) изоморфизм $\mathbf{K}_G(X \times V; A) \to \mathbf{K}_G(V \times X; A)$, получим, что $\varphi\alpha$ – некоторый изоморфизм. Но по (4) $\alpha\varphi = \mathrm{Id}$, так что α – двусторонний обратный, а неизвестный автоморфизм является тождественным.

Переход к случаю общего комплексного H-расслоения $E \to Y$ осуществим аналогично [6, стр. 124]. Именно, рассмотрим $G = U(n) \times H$ и главное G-расслоение X, с которым ассоциировано E, $Y = X/U(n)$, так что

$$\mathbf{K}_G(X; A) \cong \mathbf{K}_H(Y; A),$$
$$\mathbf{K}_G(V \times X; A) \cong \mathbf{K}_H((V \times X)/U(n); A) \cong \mathbf{K}_H(E; A).$$

Поскольку отождествления коммутируют с умножением на λ_V^*, то получаем требуемый результат. (По-другому можно было бы вложить расслоение в тривиальное и воспользоваться транзитивностью гомоморфизма Тома). •

Литература

1. А. С. Мищенко, *Теория эллиптических операторов над C^*-алгебрами.* — Докл. Акад. Наук СССР **239**, № 6 (1978).

2. А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, № 4 (1979), 881–859.
3. Ю. П. Соловьев, Е. В. Троицкий, *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии.* М., Факториал, 1996.
4. Е. В. Троицкий, *Эквивариантный индекс C^*-эллиптических операторов.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **50**, № 4 (1986), 849–865.
5. Е. В. Троицкий, *Точная формула для индекса эквивариантного C^*-эллиптического оператора.* — Труды МИ РАН им. В. А. Стеклова (Топология и ее приложения) **193** (1992), 178–182.
6. M. F. Atiyah, *Bott periodicity and the index of elliptic operators.* — Quart. J. Math. Oxford **19** (1968), 113–140.
7. T. Friedrich, *Vorlesungen über K-Theorie.* Leipzig, Teubner, 1987.
8. M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie.* — Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4e sér **1** no. 2 (1968), 161–270.
9. M. Karoubi, *Éspaces classifiants en K-théorie.* — Trans. Amer. Math. Soc. **147** no. 1 (1970), 74–115.
10. G. G. Kasparov, *Hilbert C^*-modules: theorems of Stinespring and Voiculescu.* — J. Oper. Theory **4** (1980), 133–150.
11. J. Rosenberg, S. Weinberger, *Higher G-signatures for Lipschitz manifolds.* — K-Theory **7** (1993), 101–132.
12. E. V. Troitsky, *Actions of compact groups, C^*-index theorem, and families.* — e-print http://xxx.lanl.gov/math.OA/9904002, April 01, 1999.

Troit-skii E. V. Thom isomorphism in the “twice” equivariant K-theory of C^*-fibrations.

A theorem on the Thom isomorphism for the K-theory of fibrations whose fiber is a projective module over a C^*-algebra is proved in the situation where a compact Lie group acts on the algebra and on the total space as well.

Московский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии
119 899 Москва Россия
troitsky@mech.math.msu.su

Поступило 10 октября 1999 г.