Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 266, 2000 г.

П. В. Ягодовский

ОДНОРОДНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

В работе [2] введена конструкция линейной деформации дискретных групп как специальной деформации их групповых алгебр, результатом которой являются групповые алгебры многозначных групп (о многозначных группах см. [1, 4, 5]). Настоящий доклад освещает вкратце основные результаты по линейной деформации, которые подробно будут изложены в готовящейся к печати статье [3], а также новые результаты, не вошедшие в нее.

Определение 1. *Множество S ц отображением $\mu : S\times S \to (S)^n$, (где $(S)^n$ – n-я симметрическая степень S) называется n-значной группой, $n \in \mathbb{N}$, если выполняются следующие условия.*

(1) *ассоциативность:* $\forall x, y, z \in A$

$$(\mu)^n(x, \mu(y, z)) = (\mu)^n(\mu(x, y), z).$$

Здесь под $(\mu)^n(\mu(x, y), z)$ подразумевается

$$(\mu(t_1, z), \ldots, \mu(t_n, z)) \in (A)^{n^2}, \quad \text{где} \quad \mu(x, y) = (t_1, \ldots, t_n).$$

Правая часть равенства понимается аналогично. Требуется совпадение получившихся элементов $(A)^{n^2}$.

(2) *существование двусторонней единицы:* $\exists e \in A$ $\forall x \in A$ $\mu(e, x) = \mu(x, e) = (x, \ldots, x)$.

(3) *существование двустороннего обратного:* $\forall x \in A$ $\exists x'$ $C^e_{x,x'} > 0$ *и* $C^e_{x',x} > 0$. *Здесь и далее $C^z_{x,y}$ означает кратность элемента z в $\mu(x, y)$.*

Отображение μ называется *произведением.*

n-Группа называется *коммутативной,* если $\forall x, y \in A$ $\mu(x, y) = \mu(y, x)$.

Определение 2. *Алгебра A с фиксированным базисом, элементы которого отождествляются с элементами n-группы S, и структурными константами $c^z_{x,y} = \frac{1}{n}C^z_{x,y}$ называется групповой алгеброй n-группы S.*

Рассмотрим *пространство структурных констант N-мерных алгебр с единицей* $V = \mathbb{R}^{N(N-1)^2}$ с координатами $c_{i,j}^k$ $(i, j = 2 \dots N,$ $k = 1, \dots N)$. Определим *многообразие M_{ass}^N ассоциативных алгебр размерности N с единицей и фиксированным базисом* как поверхность в V, соответствующую наборам структурных констант $c_{i,j}^k$, отвечающих ассоциативным алгебрам. Групповым алгебрам многозначных групп соответствуют точки на этом многообразии.

Определение 3. *Алгебра A называется линейной деформацией алгебры B, если прямая, соединяющая соответствующие им точки в пространстве структурных констант V, целиком лежит на поверхности M_{ass}^N. Многозначную группу S будем называть линейной деформацией n-группы C, если ее групповая алгебра является линейной деформацией групповой алгебры n-группы C.*

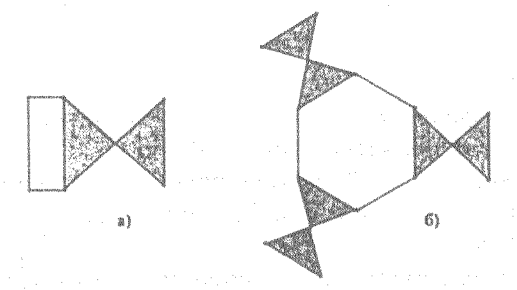

Рис. 1

Для каждой группы G можно рассмотреть совокупность прямых, лежащих на поверхности $M_{ass}^{|G|}$, которые определяют ее деформации в другие многозначные группы. Эта совокупность распадается на несколько плоскостей деформаций различных размерностей в пространстве V, проходящих через точку, соответствующую алгебре $\mathbb{R}(G)$. Опишем получившиеся конфигурации плоскостей для 1-групп $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ с помощью специальных клеточных диаграмм. Сопоставим каждой плоскости клетку на единицу меньшей размерности. Если две плоскости l_1 и l_2 пересекаются по плоскости l_3, то клетка, отвечающая l_3, входит в границу клеток, соответствующих l_1 и l_2. На рисунке представлены получившиеся диаграммы для $\mathbb{Z}_4$ (а) и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (б). Диаграмма для $\mathbb{Z}_3$ представляет собой одну двумерную клетку.

Отметим, что прямая, являющаяся пересечением двух трехмерных плоскостей деформации группы $\mathbb{Z}_4$ (на диаграмме ей соответствует общая точка двух треугольников), соответствует деформации, переводящей $\mathbb{Z}_4$ в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Аналогично, три прямые деформации группы $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, которые являются пересечением трехмерных плоскостей, отвечают деформациям $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}_4$, результаты которых отличаются порядком элементов (в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ можно тремя способами выбрать элемент, который в $\mathbb{Z}_4$ будет иметь порядок 2).

Пусть G – дискретная группа в обычном смысле, умножение элементов которой ниже обозначается точкой. Оказывается, что *умножение в произвольной линейной деформации группы G может быть записано в следующем виде* (тут элементы $i, j \in G$ рассматриваются как элементы линейной деформации группы G):

$$i * j = \sum_{r \in G} L^r(i,j)(r \cdot i \cdot j),$$

где $L(i,j) = \sum_{r \in G} L^r(i,j)$ – 2-коцикл группы G стандартной B-резольвенты ее групповой алгебры $\mathbb{R}(G)$ с коэффициентами в $\mathbb{R}(G)$, рассматриваемой как $\mathbb{R}(G)$-модуль с действием ad.

В случае, когда G – абелева группа, вместо коцикла L можно рассматривать набор коциклов $\{L^r\}$ с коэффициентами в рациональных числах.

Для абелевых групп G рассмотрим специальный класс деформаций, которым соответствуют коциклы вида $L(i,j) = (1 - L^r(i,j))e - L^r(i,j)r$ для некоторого $r \in G$. Такие деформации будем называть *однородными*.

Согласно [3], структурный коцикл однородных деформаций L^r принимает только одно ненулевое значение и, следовательно, из уравнения на коцикл

$$L(i,j) + L(i \cdot j, k) = L(i, j \cdot k) + L(j,k) \tag{1}$$

имеем

$$(L(i, i^{-1}) = 0) \Rightarrow (\forall j \quad L(i,j) = L(j,i) = 0).$$

Отсюда сразу вытекает следующая

Лемма 1. (1) *$L(i, i^{-1}) = L(i^{-1}, i)$;*

(2) *$(L(i, i^{-1}) = 0) \Rightarrow (\forall j, k \quad L(j,k) = L(j \cdot i, k) = L(j, k \cdot i))$.*

Следствие 1. *Если коцикл L и элемент $r \in G$ задают на группе G однородную деформацию и существует такой элемент $s \in G$, что $L(s, s^{-1}) = 0$, то коцикл L имеет вид $L = p^*L'$, для некоторого 2-коцикла L' группы $G/\langle s\rangle$ и естественной проекции p на фактор-группу.*

Нетрудно проверить, что в этом случае данные L' и $p(r)$ задают однородную деформацию группы.

У $\mathbb{Z}_l$ есть каноническая однородная деформация $\mathbb{Z}[t]/\langle t^l - (1-h) - ht\rangle$ (h – параметр деформации). Пусть L_l и r – данные, задающие эту деформацию. Тогда справедлива основная

Теорема 1. *Чтобы 2-коцикл L и элемент r задавали однородную деформацию конечной абелевой группы G, необходимо и достаточно, чтобы $\exists l$ и $\exists p : G \to \mathbb{Z}_l$, такие что $L = p^*L_l$ и либо $p(r) = t$ либо $L(t) = 1_{\mathbb{Z}_l}$.*

В [3] доказана эта теорема в случае, когда G – конечная циклическая группа, а также показано, что уже для группы $\mathbb{Z}$ это описание охватывает не все однородные деформации. Реально, в доказательстве теоремы от G требуется, чтобы для нее выполнялась теорема о разложении в прямую сумму циклических, чтобы порядки ее элементов были ограничены в совокупности и ее вторая группа когомологий с коэффициентами в $\mathbb{R}$ была тривиальной. Нам понадобятся следующие предложения.

Предложение 1 (см. [3]). *Произвольная последовательность $\{L(1,i)\}$, $i \in \mathbb{Z}_n$ однозначно задает коцикл $L \in Z^2(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R})$ по следующим формулам:*

$$L(p,q) = \sum_{s=0}^{p-1}(L(1, s+q \bmod n) - L(1,s)), \quad p > 0. \tag{2}$$

Предложение 2. *Любой 2-коцикл прямой суммы двух конечных циклических групп $\langle a\rangle \otimes \langle b\rangle$ полностью определяется своими значениями на парах элементов (c,d), где $c, d \in \langle a\rangle \cup \langle b\rangle$. При этом справедлива формула* $(\forall k, l, m, n)$:

$$\begin{aligned} &L(a^k \cdot b^l, a^m \cdot b^n) = \\ &\quad = L(a^k, a^m) + L(b^l, b^n) + L(a^{k+m}, b^{l+n}) - L(a^m, b^n) - L(a^k, b^l). \end{aligned}$$

Доказательствопредложения 2 носит чисто технический характер. •

Доказательство теоремы. Рассмотрим подгруппу H группы G, порожденную элементами s такими, что $L(s, s^{-1}) = 0$. Тогда, согласно следствию, коцикл L индуцирован некоторым коциклом на G/H с помощью естественной проекции. Если мы докажем, что эта факторгруппа будет циклической, то, используя теорему из [3] об однородных деформациях конечных циклических групп, сразу получим утверждение теоремы. Но легко видеть, что цикличность G/H следует из следующей леммы.

Лемма 2. $\forall a, b \in G/H \ (\deg(a) = \deg(b)) \Rightarrow (\langle a \rangle = \langle b \rangle)$

Схема доказательства леммы. Без ограничения общности можно считать, что порядок a и b есть простое число $p > 2$ (случай $p = 2$ тривиален). Из описания однородных деформаций конечных циклических групп, можно выбрать элементы $a_0 \in \langle a \rangle$, $b_0 \in \langle b \rangle$, такие что $L(a_0^k, a_0) = L(b_0^k, b_0) = 1 - \delta_{k,p}$. Ниже вместо a_0 будем писать просто a. Пусть f_i таково, что $(i+1)f_i \equiv 1 \pmod p$, и $b_i = (a_0^i \cdot b_0)^{f_i}$. Используя предложение 2, получим $\sum_{k=1}^{p} L(b_i^k, b_i) = p - 1 - pL(a_0^{if_i}, b_0^{f_i}) = p - 1$. Таким образом, $L(b_i^k, b_i^l) = L(a_0^k, a_0^l)$ и, следовательно, $L(a^{(m-1)k} \cdot b_0^k, a^{(m-1)l} \cdot b_0^l) = L(a^{mk}, a^{ml})$. Предположим, что подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ не совпадают, т. е. $b_{-1} = (a^{-1}b_0)^h \neq 0$. Тогда можно выбрать степень h так, чтобы выполнялось соотношение $L(b_{-1}^k, b_{-1}^l) = L(a^k, a^l)$. Тогда

$$L(a^{2k}, a^{2l}) = L((a \cdot b_{-1})^k, (a \cdot b_{-1})^l) = \\ = L(a^{(1-h)k} \cdot b_0^{hk}, a^{(1-h)l} \cdot b_0^{hl}) = L(a^k, a^l).$$

Но, как известно, коцикл, задающий однородную деформацию конечной циклической группы $\mathbb{Z}_f$, который не обнуляется ни на какой подгруппе, есть L_f (у нас $f = p^2$). Для L_{p^2} соотношение $L(a^{2k}, a^{2l}) = L(a^k, a^l)$ выполняется не для всех пар k и l, что и приводит к противоречию. •

Таким образом, теорема доказана. •

Литература

1. В. М. Бухштабер, Е. Г. Рисс, *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа.* — Успехи мат. наук. № 4 (1996), 149–150.

2. П. В. Ягодовский, *Деформация многозначных групп.* — Успехи мат. наук. № 3 (1997), 179–180.
3. П. В. Ягодовский, *Линейная деформация дискретных групп и конструкции многозначных групп.* — Изв. РАН, Сер. мат.. готовится к печати.
4. V. M Buchshtaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras.* — Transf. Groups **2** no. 4 (1997), 325–349.
5. V. M Buchshtaber, E. G. Rees, *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms.* in: Lie groups and Lie Algebras. Netherlands, Kluwer Acad. Publ., 1998, pp. 85–107.

Yagodovskii P. V. Homogeneous deformations of discrete groups.

Linear deformation of discrete groups is a special deformation of their group algebras resulting in group algebras of many-valued groups. We present main results on the linear deformation.

Московский
государственный университет

Поступило 10 октября 1999 г.