Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

П. М. Ахметьев, С. А. Мелихов

ОБ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Бесконечность только мгновенная есть
противоречие, нестерпимое для ума
Вл. С. Соловьев "Смысл любви"

§1. Введение.

Напомним, что под *вложением* понимается отображение, являющееся гомеоморфизмом на свой образ, а под *изотопией* – гомотопия в классе гомеоморфизмов, тождественная при нулевом значении параметра. Непрерывное отображение f компактного пространства X в многообразие без края Q *дискретно реализуемо* [29], если для каждого $\varepsilon > 0$ оно ε-аппроксимируемо вложением, и *изотопически реализуемо* [15], если существует псевдоизотопия $H_t\colon Q \to Q$, $t \in I = [0,1]$ (т.е. изотопия с параметром $t \in [0,1)$, продолжающаяся до непрерывного отображения при $t \to 1$ [4]), переводящая в f некоторое вложение g (т.е. $H_1 \circ g = f$).

Очевидно, изотопическая реализуемость влечет дискретную; верно ли обратное? Этот вопрос, поставленный Е. В. Щепиным в 1993 г., называется *Проблемой изотопической реализации.* Для отображений произвольных компактов он решается очевидно отрицательно (см [27]), поэтому естественно предполагать (и всюду далее мы будем это делать), что X – компактный n-мерный полиэдр, а также (в целях удобства) что Q – ориентируемое кусочно-линейное m-мерное многообразие без края. В такой постановке Проблема была отрицательно решена вторым автором в работе [27], примеры 1.3, 1.9. Однако в настоящей работе мы будем понимать Проблему изотопической реализации в более широком смысле: как узнать по данному дискретно реализуемому отображению $f\colon X \to Q$, будет ли оно реализуемо изотопически?

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00009).

Проблему можно также сформулировать в гладкой и кусочно-линейной категориях, заменив все использованные в данных выше определениях термины, кроме "непрерывного отображения", на их DIFF- и PL-аналоги; в гладком случае это было сделано в [1, 3]. Впрочем, как дискретная, так и изотопическая реализуемость непрерывного отображения из n-мерного компактного DIFF-многообразия (соотв. полиэдра) в m-мерное DIFF- (PL)-многообразие без края в гладком (кусочно-линейном) смысле эквивалентна обыкновенной при условии $m > \frac{3(n+1)}{2}$ $(m \geqslant n+3)$ [27].

Следует заметить, что дискретная реализуемость влечет изотопическую при $m \geqslant 2n+2$ (в силу равномерной локальной связности пространства PL вложений, выполненной по общему положению, см. [17]) и для отображений замкнутого многообразия на себя (в силу локальной стягиваемости группы гомеоморфизмов [11, 20]). Для отображений $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ дискретная реализуемость не влечет изотопическую как в кусочно-линейном и гладком [5, 30], так и в топологическом [27, 1.3] случаях. В то же время вопрос об эквивалентности дискретной и изотопической реализуемости для отображений в коразмерности $\geqslant 3$, т.е. при отсутствии феномена заузленности как результата некоммутативности фундаментальной группы, изначально рассматривавшийся как основная составляющая Проблемы, до недавнего времени оставался открытым (и решается лишь примером [27, 1.9]).

Оказалось, что для достаточно "хороших" отображений, в частности, для композиции $X^n \xrightarrow{pl} Y \hookrightarrow Q^m$ кусочно-линейного отображения и топологического вложения, $m - n \geqslant 3$, понятия дискретной и изотопической реализуемости эквивалентны [27]. Кроме того, любое отображение $X^n \to Q^{2n+1}$ изотопически реализуется при $n > 1$ [27] (дискретная реализуемость здесь выполнена по общему положению).

С другой стороны, при отсутствии каких-либо ограничений на отображение вопрос об эквивалентности дискретной и изотопической реализуемости становится крайне сложным уже для отображений $S^n \to S^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^m$, $m \leqslant 2n$, где i обозначает стандартное включение. Доказано лишь, что отображения $S^n \to S^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{2n}$ изотопически реализуются при $n = 4k+1 \geqslant 9$ (в то время как дискретно они реализуются при всех $n \neq 1, 2, 3, 7$) [1].

Определение. *Пусть* $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ *– непрерывное отображение,* $m \geqslant n+3$ *(для упрощения технической стороны во введении мы ограничимся этим случаем). Рассмотрим конфигурационное сингулярное множество* f*, т.е. компакт*

$$\Sigma = \Sigma(f) = \{(x,y) \in S^n \times S^n \mid f(x) = f(y)\},$$

вложенный в $S^n \times S^n$ *эквивариантно относительно перестановки сомножителей* $t\colon (x,y) \leftrightarrow (y,x)$*. Для случая, когда* f *– вложение,* Σ *есть диагональ* Δ*, когда* f *– погружение,* Σ *содержит* Δ *в качестве компоненты связности, когда* f *– почти-вложение,* Σ*, напротив, содержится в малой окрестности* Δ*, а когда* f *кусочно-линейно,* Σ *есть* t*-эквивариантный подполиэдр* $S^n \times S^n$*. Определено отображение моментов*

$$\tilde f\colon S^n \times S^n \setminus \Sigma \to S^{m-1}, \quad (x,y) \mapsto \tfrac{f(x)-f(y)}{||f(x)-f(y)||},$$

эквивариантное относительно t *и антиподальной инволюции* $s\colon z \leftrightarrow -z$ *на сфере* S^{m-1}*. Определим элемент*[1]

$$o(\tilde f) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Sigma)$$

[1]Напомним, что группа $H^k_{(t,s)\text{-eq}}(X;\pi_p(Y))$ *эквивариантных симплициальных* k*-мерных когомологий* (возможно, некомпактного) полиэдра X со свободной кусочно-линейной инволюцией t с коэффициентами в p-мерной гомотопической группе пространства Y со свободной непрерывной инволюцией s определяется так же, как и в не-эквивариантном случае, с тем отличием, что все построения производятся в некоторой эквивариантной триангуляции X, а вместо коцепей рассматриваются лишь *эквивариантные коцепи*, то есть такие коцепи c, что $c \circ t_* = s_* \circ c$. Здесь s_* – индуцированная инволюцией s инволюция на группе $\pi_p(Y)$, а t_* – инволюция на группе цепей, задаваемая инволюцией t по формуле $t_*(\sum_i g_i \sigma_i^l) = \sum_i g_i t(\sigma_i^l)$ (ориентация на симплексе $t(\sigma_i^l)$ в правой части задается изначально зафиксированной ориентацией симплекса σ_i^l с помощью отображения t и может не совпадать с изначально зафиксированной ориентацией симплекса $t(\sigma_i^l)$). Эквивалентным образом, $H^k_{(t,s)\text{-eq}}(X;\pi_p(Y))$ можно определить как $H^k(X/t, \mathcal{F}_{s_*})$ – когомологии факторпространства X по действию инволюции t с коэффициентами в локально постоянном пучке $\mathcal{F}_{s_*}$ со слоями, состоящими из групп $\pi_p(Y)$, и действием группы $\pi_1(X/t)$ на слоях, задаваемым по формуле $\alpha \mapsto (s_*)^{\delta_*(\alpha)}$, где $\delta_*\colon \pi_1(X/t) \to \mathbb{Z}/2$ – гомоморфизм из точной последовательности расслоения $X \to X/t$ (т.е. двулистного накрытия). В случае, когда инволюции t и s ясны из контекста, они будут опускаться, а в случае, когда s – антиподальная инволюция на $Y = S^{m-1}$ (т.е. коэффициентами являются целые числа $\mathbb{Z}$ с инволюцией $1 \mapsto (-1)^m$), коэффициенты $\pi_{m-1}(S^{m-1})$ будут также опускаться.

как первое препятствие $d(\tilde f,\tilde i)$ *к эквивариантной гомотопии (см.* [14, VI:13]*; по поводу эквивариантного случая см.* [18, §2; §4]*) отображений* $\tilde f$ *и* $\tilde i|_{S^n\times S^n\setminus\Sigma(f)}$, *где* $i\colon S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ *– стандартное включение.*[2] *Заметим, что* $o(\tilde f)=d(\tilde f,\tilde i)$ *не меняется при изменении отображений* $\tilde f$, $\tilde i$ *на эквивариантно гомотопные (см.* [14, рассуждения в начале §7.5]*). В частности, поскольку мы предположили, что* $m\geqslant n+3$, *вместо* i *можно было бы рассмотреть любое другое PL вложение* $j\colon S^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n$, *так как, согласно* [31], *оно изотопно* i, *и следовательно,* $\tilde j$ *эквивариантно гомотопно* $\tilde i$.

Для любого $\varepsilon>0$ *обозначим через* N_ε *эквивариантную замкнутую окрестность калибра* ε *компакта* $\Sigma\subset S^n\times S^n$, *являющуюся многообразием с краем.*[3] *Для отображения* $\tilde f|_{S^n\times S^n\setminus N_\varepsilon}$ *аналогичным образом определяется элемент*

$$o_\varepsilon(\tilde f)\in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n\times S^n\setminus N_\varepsilon).$$

В случае, когда f *кусочно-линейно, легко выбрать такое* $\varepsilon_0>0$, *что* $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *препятствия* $o_\varepsilon(\tilde f)$ *и* $o(\tilde f)$ *совпадают.*

Замечание. К определению препятствия $o_\varepsilon(\tilde f)$ имеется также другой подход, следующий идее ван Кампена [24] (см. также [8, 28, 25]). Зададимся произвольной ε-аппроксимацией $f'\colon S^n\to\mathbb{R}^m$

---

[2] Приведем некоторые подробности. Зафиксировав некоторую (бесконечную) эквивариантную триангуляцию T открытого многообразия $S^n\times S^n\setminus\Sigma$, с помощью симплициальной аппроксимации (по поводу эквивариантного случая см. [23]) и общего положения построим на $(m-2)$-мерном остове T некоторую эквивариантную гомотопию h_t между $\tilde f$ и $\tilde i$. Степени отображений, доставляемых ограничениями $\tilde f|_\sigma$, $\tilde i|_\sigma$ и $\tilde h_t|_{\partial\sigma}$ на каждый $(m-1)$-мерный симплекс σ триангуляции T, образуют эквивариантную коцепь $\alpha\in C^{m-1}_{\mathrm{eq}}(T)$. Как и в не-эквивариантном случае, легко проверяется, что α является коциклом, класс эквивариантных когомологий которого не зависит от выбора эквивариантной гомотопии h_t и эквивариантной триангуляции T и является полным препятствием $d(\tilde f,\tilde i)$ к построению эквивариантной гомотопии между $\tilde f$ и $\tilde i$ на $(m-1)$-мерном остове T.

[3] Точнее, обозначим через Σ_ε замкнутую эквивариантную окрестность компакта Σ, состоящую из таких пар $(a,b)\in S^n\times S^n$, что $||f(a)-f(b)||\leqslant\varepsilon$. Рассмотрим d-кратное барицентрическое измельчение $T_{(d)}$ некоторой фиксированной эквивариантной триангуляции пары $(S^n\times S^n,\Delta)$, достаточно мелкое для того, чтобы $N(\Sigma_\varepsilon,T_{(d)})$ – объединение всех симплексов $T_{(d)}$, пересекающих Σ_ε, – содержалось бы в $\operatorname{Int}\Sigma_{2\varepsilon}$ (для определенности будем считать, что для $T_{(d-1)}$ это условие не выполнено). Положим $N_\varepsilon=N(\Sigma_\varepsilon,T_{(d)})$, тогда N_ε является эквивариантным компактным подмногообразием $S^n\times S^n$, причем $N_\varepsilon\subset\operatorname{Int}N_{2\varepsilon}$ и $\bigcap\{N_\varepsilon\mid\varepsilon=\frac12,\frac14,\frac18,\dots\}=\Sigma$.

отображения f, являющейся PL отображением общего положения, в частности, вкладывающей каждый симплекс некоторой достаточно мелкой триангуляции T сферы S^n. Зафиксировав ориентации на $\mathbb{R}^m$ и на всех симплексах T, определим препятствие

$$\vartheta_\varepsilon(f) \in H^m_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta, \overline{S^n \times S^n \setminus N_\varepsilon})$$

как класс коцикла, принимающего на клетке $\sigma \times \tau$ (где σ, τ – различные k-симплекс и $(m-k)$-симплекс T), значение, равное алгебраическому числу пересечений симплексов $f'(\sigma)$ и $f'(\tau)$. Легко видеть, что класс $\vartheta_\varepsilon(f)$ есть не что иное, как образ класса $o_\varepsilon(\tilde{f})$ при гомоморфизме

$$\delta^* \colon H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus N_\varepsilon) \to H^m_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta, \overline{S^n \times S^n \setminus N_\varepsilon})$$

из точной последовательности пары, являющемся изоморфизмом ввиду того, что $H^k_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta) = 0$ при $k > n$.

Теорема 1. *Пусть* $f \colon S^n \to \mathbb{R}^m$ *– непрерывное отображение,* $m > \frac{3(n+1)}{2}$.

а) f *дискретно реализуемо в том и только в том случае, если* $o_\varepsilon(\tilde{f}) = 0$ *для* $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$.

б) f *изотопически реализуемо в том и только в том случае, если* $o(\tilde{f}) = 0$.

Замечание. В условиях теоремы 1 необходимость очевидно выполнена без размерностных ограничений, т.к. $H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta) = 0$ (если f – вложение, $\Sigma(f) = \Delta$). Условие п. а) эквивалентно тому, что $\forall \varepsilon > 0$ (или для $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$) в некоторой триангуляции многообразия $S^n \times S^n \setminus \Sigma$ существует коцепь α, кограница которой $\delta\alpha = o(\tilde{f}) + \gamma$, где γ – коцикл с носителем в N_ε.

Замечание. Наряду с $o(\tilde{f})$ определены также два частичных препятствия

$$o^!(\tilde{f}) \in H^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma),$$
$$\widehat{o}(\tilde{f}) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Sigma).$$

Они выражаются через полное препятствие $o(\tilde{f})$ следующим образом. Препятствие $o^!(\tilde{f})$ получается из $o(\tilde{f})$ посредством забывания эквивариантной структуры forg: $H^{m-1}_{\mathrm{eq}} \to H^{m-1}$, а препятствие $\widehat{o}(\tilde{f})$ есть образ $o^!(\tilde{f})$ при гомоморфизме симметризации symm: $H^{m-1} \to H^{m-1}_{\mathrm{eq}}$, индуцированном гомоморфизмом $s \mapsto$

$s + s \circ t_*$ коцепных комлексов. Заметим, что композиция

$$H_{\mathrm{eq}}^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma) \xrightarrow{\mathrm{forg}} H^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma) \xrightarrow{\mathrm{symm}} H_{\mathrm{eq}}^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma) \quad (*)$$

индуцирована умножением коэффициентов на 2, так что $\widehat{o}(\tilde{f}) = 2o(\tilde{f})$. Смысл введенных препятствий состоит в том, что каждое из них можно определить без использования конструкции препятствия $o(\tilde{f})$, более простым способом. Препятствие $o^!(\tilde{f})$ определяется как $\tilde{f}^*(\xi)$, образ фундаментального класса $\xi \in H^{m-1}(S^{m-1})$, индуцированный отображением моментов (без учета инволюций). Препятствие $\widehat{o}(\tilde{f})$ определяется как $\tilde{f}_{\mathrm{eq}}^*(\xi_{\mathrm{eq}})$, образ образующей из группы $H_{\mathrm{eq}}^{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{Z}$, индуцированный отображением моментов. Аналогично можно определить частичные препятствия $o^!_\varepsilon(\tilde{f})$, $\widehat{o}_\varepsilon(\tilde{f})$ к дискретной реализуемости f. Из существования не реализуемого дискретно отображения

$$S^n \to \mathbb{R}^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad n = 2k+1 > 1$$

(ограничение которого на множество двойных точек является нетривиальным двулистным накрытием над S^1), следует, что все эти препятствия и в самом деле не полны.[4] Препятствия $o^!_\varepsilon(\tilde{f})$, $\widehat{o}_\varepsilon(\tilde{f})$ и $\widehat{o}(\tilde{f})$ в дальнейшем нигде не используются.

Пример. Построим отображение $\mu_p^n \colon S^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 3$, $p \geqslant 2$, которое реализуется дискретно, но при $p \neq 2$ не реализуется изотопически в силу $o^!(\mu_p^n) \neq 0$. Этот пример получен модификацией примера 1.9 из работы [27].

---

[4] Такое отличие от не-эквивариантного случая, в котором характеристический класс отображения $F \colon X \to S^{m-1}$ (т.е. первое препятствие к гомотопии с постоянным отображением) в точности равен (см. [13, VI:17.1]) обратному образу фундаментального класса ξ, можно объяснить следующим образом. Постоянное отображение $\mathrm{const} \colon X \to S^{m-1}$ может быть пропущено через произвольное отображение $F \colon X \to S^{m-1}$ (т.е. представлено в виде композиции $\mathrm{const}_{S^{m-1}} \circ F$, что и позволяет выразить различающую $d(F, \mathrm{const})$ через $d(\mathrm{id}_{S^{m-1}}, \mathrm{const}_{S^{m-1}}) = \xi$), в то время как для эквивариантного аналога I постоянного отображения последнее свойство не имеет места, какое бы $I \colon (X, t) \to (S^{m-1}, s)$ мы ни выбрали (s – антиподальная инволюция). Лучшее, чего можно добиться в нашем случае, это свойство пропускаемости через произвольное отображение $G \colon (X, t) \to (S^{m-1}, \mathrm{id})$ для композиции $J \circ I = \mathrm{const}$ с отображением $J \colon (S^{m-1}, s) \to (S^{m-1}, \mathrm{id})$ степени 2, переводящим экватор $S^{m-2} \subset S^{m-1}$ в точку. Но в случае $X = S^n \times S^n \setminus \Sigma$ различающая $d(J \circ \tilde{f}, J \circ \tilde{i})$ и есть определенное выше частичное препятствие $\widehat{o}(\tilde{f}) \in 2H_{\mathrm{eq}}^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma)$.

Напомним конструкцию p-адического соленоида, вложенного в полноторие размерности n (см. также [18, гл. VII, упр. D]). Пусть $T_1 \supset T_2 \supset \dots$ – бесконечная последовательность вложенных полноторий $T_k \cong S^1 \times B^{n-1}$, диаметры B^{n-1}-сечений которых стремятся к 0, такая что включение $T_k \subset T_{k-1}$ индуцирует гомоморфизм $H_1(T_k) \to H_1(T_{k-1})$ умножения на натуральное число $p > 1$. Тогда p-адический соленоид Σ_p есть пересечение $\bigcap T_k$. Для дальнейшего построения нам понадобятся вспомогательные полнотория $T'_k = h_k^{-1}(S^1 \times \frac{1}{2}B^{n-1})$ – окрестности средних линий полноторий $T_k \underset{h_k}{\cong} S^1 \times B^{n-1}$, целиком содержащие в себе полнотория T_{k+1}.

Рассмотрим последовательность вложенных сфер $g_k \colon S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $k \geqslant 1$, где k-я сфера $g_k(S^{n-1})$ есть стандартная сфера радиуса $\frac{3}{2^{k+1}}$ с центром в точке $(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}, 0, \dots, 0)$. Заметим, что сфера с номером k касается сферы с номером $k+1$ внутренним образом в точке $x_k = (\frac{(-1)^k}{2^k}, 0, \dots, 0)$, диаметрально противоположной в k-й сфере точке x_{k-1} ее касания с $(k-1)$-й сферой. Будем считать, что базисную точку $b \in S^{n-1}$ вложение g_k переводит как раз в x_k, а диаметрально противоположную ей $-b$ – в x_{k-1}.

Определим последовательность отображений

$$f_k \colon T_1 \to \bigcup_{l=1}^{k} g_l(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n \setminus 0$$

посредством следующей конструкции. Зададим $f_1 \colon T_1 \to g_1(S^{n-1})$ как композицию $f_1 = g_1 \circ \rho \circ \pi \circ h_1$, где $\pi \colon S^1 \times B^{n-1} \to B^{n-1}$ – проекция (отображающая вспомогательный полноторий в шар $\frac{1}{2}B^{n-1}$), а $\rho\colon B^{n-1} \to S^{n-1}$ – отображение диска на сферу со степенью 1, переводящее шар $\frac{1}{2}B^{n-1}$ в базисную точку b и отображающее ∂B^{n-1} в диаметрально противоположную $-b$. Отображение f_k положим на $T_1 \setminus T_k$ равным f_{k-1}, а внутри T_k определим по аналогии с f_1, т.е. $f_k|_{T_k} = g_k \circ \rho \circ \pi \circ h_k$. Таким образом, предельное отображение $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ переводит каждое полноторие T_l без вспомогательного T'_l в сферу $g_l(S^{n-1})$, а каждое вспомогательное T'_l без следующего T_{l+1} – в точку x_l, так что соленоид Σ_p попадает в начало координат.

Теперь определим искомое отображение $\mu_p^n \colon S^n \to \mathbb{R}^{2n}$. Для этого рассмотрим T_1 как подмногообразие $S^1 \times B^{n-1}$ в сфере

$S^n = S^1 \times B^{n-1} \cup B^1 \times S^{n-1}$ и маленький шар $B^n \subset S^n \setminus T_1$. На T_1 положим $\mu_p^n(x) = (f(x), (r \circ f(x)) * \sigma(x))$, где $r\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ – функция расстояния до начала координат, $\sigma\colon S^n \setminus a \to \mathbb{R}^n$ – стереографическая проекция из некоторой точки $a \in B^n$. На $S^n \setminus (T_1 \cup B^n)$ положим $\mu_p^n(x) = (\varphi(x) * x_0, \sigma(x))$, где $\varphi\colon S^n \to [0,1]$ – произвольная непрерывная функция, такая что $\varphi(B^n) = 0$ и $\varphi(T_1) = 1$. Наконец, взяв произвольный гомеоморфизм $\tau\colon S^n \to S^n$, неподвижный на сфере ∂B^n и переводящий точку $a \in B^n$ в диаметрально противоположную $-a \notin B^n$, продолжим μ_p^n на B^n по формуле $\mu_p^n(x) = (0, \sigma \circ \tau(x))$.

Так определенное отображение μ_p^n переводит в начало координат соленоид $\Sigma_p \subset T_1$ и точку $a \in B^n$, а на множестве $S^n \setminus (\Sigma_p \cup a)$ является вложением. Действительно, если для двух различных точек $x, y \in T_1$ выполнено $f(x) \neq f(y)$, то и $\mu_p^n(x) \neq \mu_p^n(y)$, а если $f(x) = f(y)$, то $r(f(x)) = r(f(y)) = r \neq 0$ и, тем самым, $r * \sigma(x) \neq r * \sigma(y)$. Отображение μ_p^n дискретно реализуемо: заменяя в его определении предельное отображение f на отображения f_k, получим определение последовательности вложений, сходящейся к μ_p^n.

Проверка нетривиальности препятствия $o^!(\mu_p^n)$**.** В конфигурационном пространстве $S^n \times S^n \setminus \Delta$ нас будет интересовать лишь полнотorie $T_1 \times B^n$, содержащее компоненту связности $\Sigma_p \times a$ конфигурационного сингулярного множества Σ. Пусть $B^n = B_1 \subset B_2 \subset \dots$ – последовательность вложенных в B^n шаров, пересечение которых $\bigcap B_k$ состоит из единственной точки a. Предположим, что на $S^n \times S^n \setminus \Sigma$ выбрана такая (бесконечная) триангуляция T, что продырявленные полнотория $U_k = T_k \times B_k \setminus \Sigma_p \times a$, а также меридиональное сечение $V = (p \times B^{n-1}) \times B_1 \setminus \Sigma_p \times a$ первого из них являются подкомплексами. Обозначим через V_k полиэдр $V \cap U_k$ – несвязное объединение p^{k-1} сечений V_{kl}, $l = 1, \dots, p^{k-1}$, продырявленного полнотория U_k, а через W_{kl} – сечение $V_{kl} \setminus V_{k+1}$, гомеоморфное шару B^{2n-1} с p удаленными $(2n-1)$-дисками.

Рассмотрими коцикл $\beta \in Z^{2n-1}(T)$, индуцированный отображением μ_p^n и тем самым представляющий класс $o^!(\mu_p^n)$. Из построения можно считать, что сумма значений b_{kl} коцикла β на симплексах шара с дырами W_{kl} равна 1, а значения β на симплексах тора ∂U_k равны нулю. Предположим, что существует коцепь $\alpha \in C^{2n-2}(T)$ ц кограницей $\delta\alpha = \beta$. Обозначим сумму ее значений на симплексах сферы ∂V_{kl} через a_{kl}. Поскольку $\beta|_{\partial U_k} = 0$, значение a_{kl} одинаково для всех l; обозначим это значение через a_k. Теперь из условий $\delta\alpha = \beta$, $b_{kl} = 1$ получаем рекуррентное соотношение $a_k - pa_{k+1} = 1$.

Однако целочисленного решения представленной бесконечной системы не существует. В самом деле, сложив первые k уравнений с коэффициентами $1, p, \dots, p^{k-1}$, получим равенство $a_1 - p^k a_{k+1} = 1 + p + \dots + p^{k-1}$, которое не может удовлетворяться при всех k в силу следующего простого арифметического соображения:

Утверждение. *Пусть $p \geqslant 3$ – натуральное число. Для произвольного целого a_1 найдется такое натуральное k, что $a_1 \not\equiv \frac{p^k-1}{p-1} \bmod p^k$.* $\square$

Замечание. Отметим, что возникновением непреодолимого арифметического препятствия мы в первую очередь обязаны тому факту, что для сравнения a_1 и a_{k+1} нам пришлось домножить последнее на p^{k-1}, возрастающее с ростом k, другими словами, образ индуцированного включением гомоморфизма

$$i_1^k \colon H^{2n-2}(U_1 \setminus U_k) \to H^{2n-2}(\partial U_1)$$

есть идеал $p^{k-1}\mathbb{Z}$, уменьшающийся с ростом k. Понятно, что такая ситуация накладывает существенные ограничения на пару $(S^n \times S^n, \Sigma(f))$, где f есть отображение, реализуемое дискретно, но не изотопически, например, Σ не может быть подполиэдром или ручным канторовым множеством в $S^n \times S^n$. Более точно это ограничение характеризуется нижеследующей теоремой 2.

Предположим, что отображение $f \colon X \to Q$ дискретно реализуется. Скажем, что f *непрерывно реализуемо,* если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ так что любое вложение, δ-близкое к f, переводится в f некоторой ε-псевдоизотопией. Вопрос [27, Pre-limit IR Problem]: когда дискретная реализуемость влечет непрерывную, в случае TOP вложения, аппроксимируемого PL вложениями, развивает проблему Келдыш о реализации дико вложенных полиэдров псевдоизотопией подполиэдров [4], а в общем случае – проблему изотопической реализации. Примеры [27, 1.2, 1.4, 1.9′] показывают, что свойство непрерывной реализуемости, сохраняя основные черты свойства изотопической реализуемости, допускает более простые описания. Так, нетрудно показать (см. [27] или ниже), что отображение μ_2^n, хотя и реализуемо изотопически, не реализуемо непрерывно; чтобы получить другие такие примеры, достаточно в определении отображения μ_p^n заменить степень отображения ρ на $0 \mod p-1$.

Теорема 2. *При условии $m > \frac{3(n+1)}{2}$ дискретно реализуемое отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно реализуемо в том и только в том случае, если для обратного спектра*

$$\{H^{m-2}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus N_{2^{-k}});\ i^l_k\},\tag{1}$$

где гомоморфизм

$$i^l_k\colon H^{m-2}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus N_{2^{-l}}) \to H^{m-2}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus N_{2^{-k}})$$

индуцирован включением, выполнено условие Миттаг-Леффлера.

Напомним, что условие Миттаг-Леффлера для обратного спектра $\{X_k; p^l_k\}$ означает, что $\forall k$ образ X_l в X_k стабилизируется, начиная с некоторого l_0:

$$\forall k \exists l_0 = l_0(k)\colon \forall l > l_0\ \ \operatorname{im} p^l_k = \operatorname{im} p^{l_0}_k.$$

Замечание. Поскольку $H^k_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta)) = 0$ при $k > n$, из последовательности пары следует, что спектр (1) можно заменить на изоморфный ему спектр из групп $H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta, \overline{S^n \times S^n \setminus N_{2^{-k}}})$ и гомоморфизмов забывания относительности j^l_k. Именно в этом виде теорема 2 доказана ниже.

Замечание. Обратный и производный пределы спектра $\{X_k; p^l_k\}$ определяются как ядро и коядро отображения $f\colon \prod X_k \to \prod X_k$, переводящего $(a_1, a_2, \dots)$ в $(a_1 - p^2_1(a_2), a_2 - p^3_2(a_3), \dots)$:

$$0 \to \varprojlim \{X_k; p^l_k\} \to \prod_k X_k \xrightarrow{f} \prod_k X_k \to \varprojlim{}^1 \{X_k; p^l_k\} \to 0.$$

Хорошо известно (см. [6]), что из условия Миттаг-Леффлера следует тривиальность производного предела:

$$\varprojlim{}^1 \{X_k; p^l_k\} = 0;\tag{2}$$

в случае, когда спектр состоит из счетных групп, верно и обратное [21, 12].

Условие (2), очевидно, эквивалентно разрешимости бесконечной системы

$$x_k - p_k^{k+1}(x_{k+1}) = g_k$$

для произвольного набора $g_k \in X_k$. Таким образом, в метастабильном ранге для дискретно реализуемого отображения f вопрос о непрерывной реализуемости по теореме 2 сводится к разрешимости всех таких систем для спектра (1), в то время как рассуждения, использованные при проверке нетривиальности препятствия $o^!(\mu_p^n)$ показывают, что вопрос об изотопической реализуемости сводится к разрешимости одной такой системы, коэффициенты которой задаются коциклом $o(\tilde{f})$.

Замечание. Как показано в [12, теорема 1] (ср. [6]), если некомпактный полиэдр X есть объединение своих компактных подполиэдров $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ и $\mathcal{F}$ – локально постоянный пучок абелевых групп на X (и в более общем случае), имеет место точная последовательность

$$0 \to \varprojlim{}^1 H^{k-1}(U_l, \mathcal{F}) \to H^k(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{h} \varprojlim H^k(U_l, \mathcal{F}) \to 0$$

(гомоморфизмы в обратных спектрах индуцированы включениями). Мы видим, что условие (2) для спектра (1) допускает следующую интерпретацию.

Теорема 2$'$. *При условии $m > \frac{3(n+1)}{2}$ дискретно реализуемое отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно реализуемо в том и только в том случае, если эпиморфизм*

$$h\colon H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Sigma) \to \varprojlim H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(S^n \times S^n \setminus N_{2^k})$$

является изоморфизмом.

Замечание. Легко видеть, что h-образ препятствия $o(\tilde{f})$ есть не что иное, как нить обратного спектра, состоящая из препятствий $o_\varepsilon(\tilde{f})$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$. Если препятствия $o_\varepsilon(\tilde{f})$ тривиальны, а h – изоморфизм, из теоремы 2$'$ сразу следует тривиальность $o(\tilde{f})$. Если же h имеет ненулевое ядро K, то, как следует из предыдущего замечания, $o(\tilde{f})$ является образом некоторого элемента из производного предела L спектра (1). Тем самым мы получаем несколько более алгебраическую (основанную на изоморфизме $K \cong L$, см. [6, доказательство теоремы A.19]), но по существу эквивалентную процедуру построения бесконечной системы уравнений в спектре (1), разрешимость которой равносильна изотопической реализуемости f.

Замечание. Поскольку умножение коэффициентов на 2 в группе H^{m-1}_{eq} пропускается через группу H^{m-1}, см. $(*)$, условие Миттаг-Леффлера для спектра из эквивариантных когомологий содержится в аналогичном условии для аналогичного спектра из обычных когомологий. Таким образом, утверждения "если" в теоремах 2 и 2′ останутся верными, если все значки "eq" опустить. Кроме того, воспользовавшись двойственностью Александера, мы можем заменить группы $H^{m-1}(S^n \times S^n \setminus N_{2^{-k}})$ на изоморфные им группы $H_{2n-m}(N_{2^{-k}})$ (здесь и далее подразумеваются приведенные гомологии, коэффициенты $\mathbb{Z}$ опускаются). При этом $H^{m-1}(S^n \times S^n \setminus \Sigma)$ переходит в группу гомологий $H_{2n-m}(\Sigma)$ в смысле Стинрода–Ситникова [6]. Заметим, что обратный предел $\varprojlim H_{2n-m}(N_{2^{-k}})$ есть группа $\check{H}_{2n-m}(\Sigma)$ непрерывных гомологий Александрова–Чеха (не удовлетворяющих аксиоме точности с целыми коэффициентами, см. [10, гл. IX, X]).

Таким образом, при условии $m > \frac{3(n+1)}{2}$ дискретно реализуемое отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ реализуемо непрерывно, если эпиморфизм

$$\check{h}\colon H_{2n-m}(\Sigma) \to \check{H}_{2n-m}(\Sigma)$$

между приведенными гомологиями Стинрода–Ситникова и Александрова–Чеха компакта $\Sigma = \Sigma(f)$ является изоморфизмом. Кроме того, ясно, что, определив очевидным образом эквивариантные аналоги групп $H_{2n-m}(\Sigma)$, $\check{H}_{2n-m}(\Sigma)$ и эпиморфизма $\check{h}$, мы получим *необходимое и достаточное* условие (а именно, изоморфность $\check{h}_{\mathrm{eq}}$) непрерывной реализуемости f, выраженное лишь в терминах свойств компакта $\Sigma = \Sigma(f)$ с заданной на нем инволюцией.

Тем самым вопрос о непрерывной реализуемости дискретно реализуемого отображения в метастабильном ранге по сути является дополнением, или геометрической иллюстрацией, к обсуждению "непрерывность [гомологий относительно обратного предела] против точности [гомологической последовательности пары]" в книге Стинрода и Эйленберга [10, гл. X, §4].

Следствие. *Если отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$, $m > \frac{3(n+1)}{2}$, дискретно реализуемо и $H_{2n-m}(\Sigma) = 0$, где $\Sigma = \Sigma(f)$, то f изотопически* *реализумо.*

На самом деле для спектра из счетных групп условие Миттаг-Леффлера эквивалентно *счетности* производного предела [12], поэтому в следствии достаточно требовать лишь счетность группы $H_{2n-m}(\Sigma)$. По поводу гомологий p-адического соленоида и дополнения к нему в $\mathbb{R}^3$ см. [6, §4.10 и §11.5].

Замечание. Причина того, что препятствия в теоремах 1, 2 сосредоточены лишь в одной размерности $m-1$, происходит из конечности групп $\pi_k(S^{m-1})$, $k=m,\dots,2n$. Далее в тексте статьи будут сформулированы и доказаны аналоги теорем 1 и 2 (а также вариант теоремы 1 для вложений данного ε-изотопического класса) для случая отображений произвольного полиэдра в ориентируемое PL многообразие. В этом случае препятствия из теоремы 1 и обратный спектр из теоремы 2 становятся более громоздкими, но по-прежнему определяются при помощи групп когомологий одной размерности.

Оказывается, проблему изотопической реализации в метастабильном ранге можно решить положительно, если допустить стабилизацию, т.е. ввести дополнительную размерность (фактически компенсирующую исключительную серию $\pi_k(S^k)$ бесконечных гомотопических групп):

Теорема 3. *Если непрерывное отображение $f\colon S^n\to\mathbb{R}^m$, $m>\frac{3n+1}{2}$, реализуется дискретно, то композиция отображения f и включения $j\colon\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^m\times 0\hookrightarrow\mathbb{R}^{m+1}$ реализуется изотопически.*

Следствие. *Для произвольного k можно найти такое n, что любое отображение $S^n\to S^n\subset\mathbb{R}^{2n-k}$ реализуется изотопически.*

Доказательство. Согласно результатам [2], для произвольного натурального l найдется такое натуральное n, что произвольное отображение $f\colon S^n\to S^n\subset\mathbb{R}^{2n-l}$ реализуется дискретно. Применив это утверждение для $l=k-1$ и теорему 3 для случая $m=2n-k-1$, получим, что $j\circ f$ реализуется изотопически. $\square$

Будем называть сходящуюся к $f\colon X\to Q$ последовательность вложений (g_i) *континуализуемой*, если существует псевдоизотопия $H_t\colon Q\to Q$ со свойством $g_i=H_{t_i}\circ g_1$ для некоторой монотонно стремящейся к нулю последовательности t_i точек $[0,1]$.

Добавление к теореме 3. *В условиях теоремы 3 из любой последовательности (g_i) кусочно-линейных вложений, сходящейся к f, можно выделить такую бесконечную подпоследовательность (g_{n_i}), что последовательность $(j \circ g_{n_i})$ континуализуема.*

Предположим, что отображение f дискретно реализуется. Назовем отображение f *континуализуемо реализуемым*, если из любой последовательности вложений, сходящейся к f, можно выделить бесконечную континуализуемую подпоследовательность. Очевидно, если f континуализуемо реализуемо, оно непрерывно реализуемо. В случае, если проблема изотопической реализации решается положительно для отображения f, естественно поставить следующий вопрос:

Проблема континуализации. *Если отображение f непрерывно реализуемо, верно ли, что оно континуализуемо реализуемо?*

Замечание. Вопрос о континуализуемости самой последовательности вложений, начиная с некоторого номера (а не некоторой ее подпоследовательности), сводится к вопросу о локальной связности пространства вложений в точке f. В частности, он решается положительно для отображений компактного замкнутого многообразия на себя [11, 20], а в предположении, что приближающая последовательность состоит из кусочно-линейных вложений, также для отображений в условиях стабильного ранга $m \geqslant 2n+2$ [17] и вложений в коразмерности $\geqslant 3$ [19].

Проблема континуализации решается отрицательно, вообще говоря, в коразмерности $\geqslant 1$ ввиду существования диких вложений, а в случае последовательностей, состоящих из гладких или кусочно-линейных вложений, при $m \leqslant 2n+1$ ответ опять отрицателен из-за узлов и зацеплений. Действительно, пусть $f\colon S^n \sqcup S^n \to S^n \vee S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ есть отображение, вкладывающее каждую сферу в отдельности; тогда если в качестве g_k взять достаточно близкое к f вложение $S^n \sqcup S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ с коэффициентом зацепления k, то из последовательности (g_i), очевидно, нельзя выделить континуализуемую подпоследовательность.

Открытым является следующий вопрос: в пространстве отображений, допускающих непрерывную реализацию, описать подпространство отображений, допускающих континуализуемую реализацию. В частности, возможно ли подобное описание лишь в терминах свойств сингулярного множества?

Замечание. Упомянем еще о трех вопросах, которые мы считаем заслуживающими внимания.

Несмотря на полученные результаты, авторам до сих пор не ясно, влечет ли дискретная реализуемость изотопическую для произвольных отображений $S^n \to \mathbb{R}^{m-1} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^m$, или же теорема 3 является наиболее сильным результатом в этом направлении? В частности, реализуемы ли изотопически все отображения $S^n \to S^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{2n}$, $n \neq 1, 2, 3, 7$, или условие $n = 4k + 1 \geqslant 9$ из [1] является необходимым?

Интересно было бы проследить за связью между различными понятиями реализуемости при отсутствии ограничения метастабильного ранга $m > \frac{3(n+1)}{2}$. Имеет ли здесь место такая же ситуация, какая наблюдается для вложений и изотопий в кусочно-линейной категории (результаты из метастабильного ранга удается обобщить на случай коразмерности $\geqslant 3$, но для этого необходимы принципиально новые методы) или же при $n + 3 \leqslant m \leqslant \frac{3(n+1)}{2}$ имеются примеры, существенно отличные от “метастабильных” – как в теории гладких вложений и изотопий или в теории квази-вложимости? По-видимому, путь к ответу на этот вопрос проходит через проверку справедливости гипотезы [27, 1.10] о возможности обобщения соответствия между вложениями и изовариантными отображениями (см. §2) на случай коразмерности $\geqslant 3$.

Наконец, остается открытым вопрос (ср. [27, Question II]) о том, влечет ли дискретная реализуемость изотопическую для кусочно-линейных отображений в коразмерностях 1 и 2. Из доказательства теоремы 1.6 в [27] ясно, что эта проблема по существу сводится к следующему вопросу: если X^n – полиэдр, $m = n + 1$ или $n + 2$, и $f\colon X^n \times \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ – PL вложение, ε-коммутирующее с проекциями на $\mathbb{R}^k$, существует ли $c\varepsilon$-сдвиг вложения f, тождественный вне $X^n \times B^k$, на такое PL вложение f', ограничение которого на $X^n \times \frac{1}{2}B^k$ в точности коммутирует с проекциями на $\mathbb{R}^k$?

Авторы выражают благодарность Е. В. Щепину, Е. Г. Скляренко, А. Б. Скопенкову, Р. Р. Садыкову и К. Р. Салихову за полезные обсуждения.

§2. Доказательства

Далее X будет обозначать компактный n-мерный полиэдр, Q – кусочно-линейное m-мерное многообразие без края, $f\colon X \to Q$ – непрерывное отображение. По поводу встречающихся понятий из кусочно-линейной категории см. [9]. Вместо отображения моментов из §1 мы будем использовать отображение квадратов $f^2\colon X^2 \to Q^2$, под X^2, Q^2 везде подразумевая $X \times X$, $Q \times Q$. Отображение квадратов удобнее в техническом плане, кроме того, оно определено для случая произвольного многообразия Q, в то время как отображение моментов определено лишь при $Q = \mathbb{R}^m$. Как и во введении, зафиксируем обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Delta_X &&= \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}, \\
\Sigma &= \Sigma(f) &&= \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\} &&= (f^2)^{-1}(\Delta_Q), \\
\Sigma_\varepsilon &= \Sigma_\varepsilon(f) &&= \{(x,y) \in X \times X \mid \rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon\} &&= (f^2)^{-1}(U_\varepsilon(\Delta_Q)),
\end{aligned}$$

где ρ – некоторая фиксированная метрика на Q. Дополнения к этим множествам открыты в полиэдре $X \times X$, следовательно могут быть наделены бесконечными эквивариантными триангуляциями. Аналогично тому, как это было сделано во введении, определяется эквивариантная замкнутая *полиэдральная* окрестность N_ε компакта Σ, такая что $\Sigma_\varepsilon \subset N_\varepsilon \subset \operatorname{Int} \Sigma_{2\varepsilon}$.

Заметим, что в случае $Q = \mathbb{R}^m$ отображение моментов $\tilde f$ является композицией отображения квадратов $f^2|_{X^2 \setminus \Sigma}$ и эквивариантной ретракции

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \setminus \Delta_{\mathbb{R}^m} \to S^{m-1} \times S^{m-1} \setminus \Delta_{S^{m-1}} \to S^{m-1},$$

где последняя $S^{m-1} = \{(z, -z) \in S^{m-1} \times S^{m-1}\}$. Нам понадобится следующий

Критерий 2.0 (см. [23] (неконтролируемый случай вложимости и изотопности), [28] (случай дискретной реализуемости при $Q = \mathbb{R}^m$), [27] (данный вариант)). *Пусть X^n – компактный полиэдр, Q^m – кусочно-линейное многообразие без края, причем $n > 1$, $m \geqslant \frac{3(n+1)}{2}$ в п. а) и а+) и $m > \frac{3(n+1)}{2}$ в остальных пунктах, и пусть $f\colon X \to Q$ – непрерывное отображение.*

а) *f дискретно реализуемо в том и только в том случае, если f^2 ε-аппроксимируется, для каждого $\varepsilon > 0$, изовариантными отображениями (определение см. ниже).*

а+) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *так, что если изовариантное отображение* $\Phi\colon X^2 \to Q^2$ δ-*близко к* f^2, *то* Φ *изовариантно* ε-*гомотопно квадрату некоторого вложения* $g\colon X \hookrightarrow Q$, ε-*близкого к* f^2.

б) f *изотопически реализуемо в том и только в том случае, если имеется эквивариантная гомотопия* $\Phi_t\colon X^2 \to Q^2$, $t \in I = [0,1]$, *такая, что* $\Phi_1 = f^2$ *и отображение* Φ_t *изовариантно при всех* $t < 1$.

б+) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *так что если* $g\colon X \to Q$ *есть вложение и отображения* g^2, f^2 *соединяются гомотопией* $\Phi_t\colon X^2 \to Q^2$, *такой, что отображение* Φ_t *изовариантно при всех* $t < 1$, *то* g *переводится в* f *некоторой* ε-*псевдоизотопией.*

в) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(n,\varepsilon) > 0$ *так, что если* $g, h\colon X \to Q$ *суть PL вложения и* g^2, h^2 *соединяются* δ-*гомотопией в классе изовариантных отображений, то* g, h *соединяются PL* ε-*объемлемой изотопией.*

Отображение $\Phi\colon X^2 \to Q^2$ называется *изовариантным* [22], если оно эквивариантно по отношению к инволюциям $(x,y) \leftrightarrow (y,x)$ на $X \times X$ и $Q \times Q$ и если $\Phi^{-1}(\Delta_Q) = \Delta_X$. Изовариантная гомотопия есть гомотопия в классе изовариантных отображений.

Замечание. В работе [16] построен пример не реализуемого дискретно отображения $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$, такого что для каждого $\varepsilon > 0$ отображение $f^2\colon S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ ε-аппроксимируется изовариантным отображением (ср. [8, 25] и ссылки там).

Напомним, что касательное расслоение τ PL многообразия Q есть проекция некоторой окрестности TQ диагонали $\Delta_Q \subset Q \times Q$ на первый сомножитель, см. [7, стр. 205, 26]. Обозначим $\forall\varepsilon > 0$ через $TQ(\varepsilon)$ окрестность диагонали Δ_Q, гомеоморфную тотальному пространству TQ касательного расслоения τ таким гомеоморфизмом, который переводит в каждый слой T_qQ в открытый диск $T_qQ(\varepsilon)$ диаметра не больше ε, что возможно по [26, Theorem 3].

Следующие два чисто технических утверждения понадобятся в основном для контроля при построении гомотопий из 2.0б, причем второе из них делает возможным само применение теории препятствий к задаче малой гомотопии.

Лемма 2.1.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\gamma > 0\ \exists\beta > 0$$

так что

а) *если изовариантное отображение* $\Phi\colon X^2 \to Q^2$ δ*-близко к* f^2 *и* β*-близко к* f^2 *на* $X^2 \backslash N_\beta$*, то* Φ *изовариантно* ε*-гомотопно* $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\beta$ *отображению* Φ_+*,* γ*-близкому к* f^2*.*

б) *если* β*-близкие к* f^2 *изовариантные отображения* $\Phi, \Psi\colon X^2 \to Q^2$ *изовариантно* δ*-гомотопны* $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\beta$*, то они изовариантно* γ*-гомотопны.*

Константу $\delta(+\infty) \in (0;+\infty]$ *обозначим через* δ_Q*.* Очевидно, $\delta_{\mathbb{R}^m} = +\infty$.

Мы допускаем некоторую вольность в употреблении символа rel, понимая под гомотопией $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\beta$ гомотопию в классе отображений, β-близких к f^2 на $X^2 \backslash N_\beta$. Такое употребление эквивалентно стандартному в случае, когда начальное и конечное отображения гомотопии совпадают с f^2 на $X^2 \backslash N_\beta$.

Доказательство. а) Подвергнем Φ изовариантной δ-гомотопии $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\beta$, перемещающей Φ "линейно" по направлению к f^2 до тех пор, пока образ всего N_β не окажется в $TQ(\gamma)$; это возможно при условии, что δ выбрано так, что TQ содержит N_δ, а $\beta = \beta(\gamma)$ выбрано так, что $TQ(\gamma)$ содержит N_β. Полученное изовариантное отображение Φ' по-прежнему δ-близко к f^2, β-близко к f^2 на $X^2 \backslash N_\beta$, и кроме того отображает N_β в $TQ(\gamma)$, подобно отображению f^2. Тогда в силу локальной тривиальности $TQ(\gamma)$ отображение Φ' можно подвергнуть изовариантной δ-гомотопии $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\beta$, так что полученное отображение Φ_+, оставаясь β-близким к f^2 на $X^2 \backslash N_\beta$, будет переводить точки N_β в те же диски $T_qQ(\gamma)$, что и f. Поскольку $\operatorname{diam} T_qQ(\gamma) < \gamma$ для любой точки $q \in Q$, получаем, что $\operatorname{dist}(\Phi_+, f^2) < \gamma$. □

б) Пусть H_t – данная δ-гомотопия. Аналогично доказательству п. а), δ и $\beta = \beta(\gamma)$ могут быть выбраны так, что H_t гомотопна в классе изовариантных гомотопий такой изовариантной гомотопии H_t^+, которая эквивариантно $\frac{1}{3}\gamma$-близка к $f^2 \times \mathrm{id}_I$, причем упомянутая гомотопия Ω_τ от H_t к H_t^+ является β-близкой к $f^2 \times \mathrm{id}_{\partial I}$ на множестве $X^2 \times \partial I$. Но тогда изовариантная гомотопия H_t^{++}, склеенная из трех кусков $\Omega_{3t}|_{X^2 \times 0}$, H_{3t-1}^+ и $\Omega_{3-3t}|_{X^2 \times 1}$, соединяет отображения Φ, Ψ и γ-близка к $f^2 \times \mathrm{id}_I$. □

Определение. *Пусть* $2\beta < \gamma$ *и* $\Phi, \Psi\colon X^2 \to Q^2$ *–* β*-близкие к* f^2 *изовариантные отображения. Очевидно, для того, чтобы* Φ *и* Ψ *были изовариантно* γ*-гомотопны, необходимо, чтобы они были изовариантно гомотопны* $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\gamma$*. До некоторой степени в силу*

2.1б *верно и обратное, а именно,* $\forall\gamma > 0\ \exists\beta > 0$: *для изовариантной γ-гомотопности Φ, Ψ достаточна их изовариантная δ_Q-гомотопность* $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$.

К задаче построения изовариантной δ_Q-гомотопии $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$ *(а стало быть и к задаче изовариантной γ-гомотопии) можно построить алгебраические препятствия следующим образом. Предположим, что Φ и Ψ совпадают на $X^2\backslash N_\beta$ и на $(k-1)$-остове некоторой эквивариантной триангуляции T пары (N_β, Δ). Пусть $N\Delta$ обозначает симплициальную окрестность Δ в T. Легко видеть, что как только на k-остове построена эквивариантная δ_Q-гомотопия* $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$ *между отображениями*

$$\Phi|_{\overline{X^2\backslash N\Delta}}, \Psi|_{\overline{X^2\backslash N\Delta}} : \overline{X^2 \setminus N\Delta} \to Q \setminus \Delta_Q,$$

отображения Φ и Ψ изовариантно δ_Q-гомотопны $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$ *на всем k-остове T.*

Для каждого $(k-1)$- и k-симплекса σ триангуляции T зафиксируем тривиализацию касательного расслоения $\tau\colon TQ \to \Delta_Q$ в δ_Q-окрестности проекции $\tau \circ f^2(\sigma)$, причем потребуем,[5] *чтобы тривиализация, соответствующая грани σ^{k-1} симплекса σ^k, индуцировалась тривиализацией, соответствующей симплексу σ^k. Теперь легко повторить все построения теории препятствий (см.* [14, 13]; *по поводу эквивариантного случая см.* [18]), *так что получится корректно определенный класс*

$$\begin{aligned} d^k(\Phi,\Psi) &\in H^k_{\mathrm{eq}}(\overline{X^2\backslash N\Delta}, \overline{X^2\backslash N_\beta}; \pi_k(\mathbb{R}^m \setminus 0)) \\ &= H^k_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta}; \pi_k(S^{m-1})) \end{aligned}$$

с коэффициентами в k-й гомотопической группе слоя $\mathbb{R}^m\backslash 0$ "сферизации" $\tau|_{TQ\backslash\Delta_Q}$ касательного расслоения τ, причем тривиальность d^k влечет изовариантную δ_Q-гомотопность $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$ *отображений Φ и Ψ на k-остове T.*

При $k = m-1$ препятствие $d^k(\Phi,\Psi)$, как обычно, можно корректно доопределить без предположения о совпадении Φ и Ψ на $(m-2)$-остове T; будем обозначать полученное препятствие через $d(\Phi,\Psi)$. Зафиксировав произвольное β-близкое к f^2 изовариантное

[5] здесь мы пользуемся тем, что, ввиду ориентируемости Q, любое отображение в Q из одномерного полиэдра (в данном случае из двойственного к $T^{(k-1)}$ остова в $T^{(k)}$) индуцирует из TQ тривиальное расслоение.

отображение $\Xi\colon X^2 \to Q^2$ *(если такого не существует, все следующие определения теряют смысл), положим* $o(\Phi) = d(\Phi, \Xi)$. *Аналогичным образом определяются первые препятствия*

$$d(f^2, \Psi),\ o(f^2) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, \overline{X^2 \setminus N_\beta}),$$

$$d_\varepsilon(f^2, \Psi),\ o_\varepsilon(f^2) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus N_\varepsilon, \overline{X^2 \setminus N_\beta}),$$

обобщающие (при $\beta = \infty$, *ввиду упомянутой выше связи отображений* $\tilde f$ *и* f^2*) соответствующие препятствия из §1. Введем обозначение*

$$\pi^{m-1}_{\mathrm{iso}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta})$$

для множества классов эквивалентности изовариантных отображений из X^2 *в* Q^2, *совпадающих с* f^2 *на* $\overline{X^2 \setminus N_\beta}$, *по отношению изовариантной* δ_Q*-гомотопии, тождественной на* $\overline{X^2 \setminus N_\beta}$, *с отмеченным элементом* $[\Xi]$, *при условии* $\beta \leqslant \delta_Q$. *Описанная выше изовариантная теория препятствий доставляет отображение*

$$h : \pi^{m-1}_{\mathrm{iso}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta}) \to H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta}),$$

$$[\Phi] \mapsto o(\Phi),$$

изовариантный аналог двойственного [13, VII:11] *гомоморфизма Гуревича.*

Теоремы 1 и 2 из введения являются частными случаями следующей.

Теорема 2.2. *Пусть* X^n *– компактный полиэдр,* Q^m *– ориентируемое кусочно-линейное многообразие без края,* $m > \frac{3(n+1)}{2}$, *и* $f\colon X \to Q$ *– непрерывное отображение. Тогда* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *(причем в случаях*

(i) $X = S^n$, $Q = \mathbb{R}^m$, $\varepsilon = +\infty$;

(ii) $Q = \mathbb{R}^{2n}$, $\varepsilon = +\infty$

можно взять $\delta = +\infty$*), так что из существования* δ*-близкого к* f *вложения* $X \hookrightarrow Q$ *вытекает следующее.*

Считая, что $2\gamma < \delta$ *(и тем самым* $N_\gamma \subset N_\delta$*), рассмотрим следующую диаграмму (здесь* h *– изовариантный аналог двойственного* *гомоморфизма Гуревича; j^γ_δ – гомоморфизм забывания относительности; i, i_γ – гомоморфизмы, индуцированные включениями).*[6]

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash N_\gamma, \overline{X^2\backslash N_\delta}) & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle i_\gamma} & & \\
\pi^{m-1}_{\mathrm{iso}}(X^2\backslash\Delta, \overline{X^2\backslash N_\delta}) & \xrightarrow{h} & H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Delta, \overline{X^2\backslash N_\delta}) & \xrightarrow{i} & H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Sigma, \overline{X^2\backslash N_\delta}) \\
 & & \uparrow{\scriptstyle j^\gamma_\delta} & & \\
 & & H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Delta, \overline{X^2\backslash N_\gamma}) & &
\end{array}$$

а) *f дискретно реализуемо в том и только в том случае, если*

$$\forall\gamma = \frac{\delta}{2},\quad \frac{\delta}{4},\quad \frac{\delta}{8},\dots\quad o_\gamma(f^2)\in \mathrm{im}(i_\gamma\circ h).$$

а+) *Более того, $\forall\gamma>0\ \exists\beta\in(0,\delta/2]$ так что если для δ-близкого к f вложения g тривиальна различающая*

$$d_\beta(f^2,g^2)\in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\beta, \overline{X^2\setminus N_\delta}),$$

то в ε-изотопическом классе g существует вложение, γ-близкое к f.

б) *f изотопически реализуемо в том и только в том случае, если $o(f^2)\in\mathrm{im}(i\circ h)$.*

б+) *Более того, если для δ-близкого к f вложения g тривиальна различающая*

$$d(f^2,g^2)\in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Sigma, \overline{X^2\setminus N_\delta}),$$

то g переводится в f некоторой ε-псевдоизотопией.

в) *f непрерывно реализуемо в том и только в том случае, если включение $\Sigma\hookrightarrow N_\delta$ обладает следующим свойством: для обратного спектра, состоящего из подмножеств*

$$(j^{2^{-k}\delta}_\delta)^{-1}(\mathrm{im}\, h)\subset H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_{2^{-k}\delta}})$$

[6] При $\delta=\infty$ под элементами множества $\pi^{m-1}_{\mathrm{iso}}(X^2\backslash\Delta,\emptyset)$ понимаются классы эквивалентности изовариантных отображений из X^2 в Q^2, эквивариантно гомотопных f^2 (последнее автоматически выполнено в случае $Q=\mathbb{R}^m$), по отношению изовариантной гомотопности. По теореме Харриса [23] в метастабильном ранге это то же самое, что множество вложений $X\hookrightarrow Q$, гомотопных f, по отношению изотопии. Отображение h определяется как и выше.

и ограничений на них гомоморфизмов забывания относительности

$$H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{2^{-l}\delta}}) \to H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{2^{-k}\delta}})$$

из точной последовательности тройки, выполнено условие Миттаг-Леффлера.

Замечание. Даже в случае $Q = \mathbb{R}^m$, $N_\varepsilon = X^2$ окрестность N_δ выбирается, вообще говоря, в зависимости от отображения f. Фактически, $\delta = \delta_m$ определяется следующей индукцией: $\delta_{2n} = \min(\varepsilon, \delta_Q)$, где δ_Q доставляется леммой 2.1, а $\delta_k = \delta_k(\delta_{k+1})$ выбирается так, чтобы гомоморфизм

$$H^k_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{\delta_k}}, \pi_k(S^{m-1})) \to H^k_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{\delta_{k+1}}}, \pi_k(S^{m-1}))$$

был стабильным, то есть не уменьшал бы свой образ при произвольном уменьшении окрестности N_{δ_k} (такое δ_k существует по причине конечности группы коэффициентов; подробности см. в доказательстве).

Таким образом, предположение о δ-аппроксимируемости f вложением еще не означает дискретной реализуемости f, и утверждение п. $a+$) и в общем случае содержит некоторый смысл, хотя уже и не доставляет удовлетворительного критерия дискретной реализуемости f. Без окрестности N_δ можно обойтись в случае отображений $S^n \to \mathbb{R}^m$ (поскольку в $\mathbb{R}^m$ имеется структура линейного пространства, а у $S^n \times S^n \setminus \Delta_{S^n}$ нет когомологий в размерностях $m, \dots, 2n$ при условии $m > n$). Именно последнее обстоятельство делает возможным упрощение ситуации в теоремах 1, 2 по сравнению с теоремой 2.2.

Замечание. Препятствия $o(f^2)$, $o_\varepsilon(f^2)$ зависят, вообще говоря, от выбора отмеченного элемента $[\Xi]$ в множестве $\pi^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\delta})$. Не зависит от этого соглашения частичное препятствие

$$\vartheta_\varepsilon(f^2) \in H^m_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\varepsilon}; \pi_{m-1}(S^{m-1})),$$

являющееся образом $o_\varepsilon(f^2)$ при повышающем размерность гомоморфизме δ^*_ε из последовательности тройки $(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\varepsilon}, \overline{X^2 \setminus N_\delta})$. В самом деле, так как $\operatorname{im} i_\varepsilon = \ker \delta^*_\varepsilon$, препятствие ϑ_ε не меняется при замене $[\Xi]$. Заметим, что в случаях $m = 2n$ и $X = S^n$ препятствие $\vartheta_\varepsilon(f^2)$ является полным (в смысле аналогов утверждений а) и $a+$) теоремы 2.2), так как отображение h в этих случаях является сюръекцией, если только $\pi^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \emptyset)$ не является пустым множеством. Конструкция препятствия $\vartheta_\varepsilon(f)$ из §1 без изменений переносится на случай отображений $X \to Q$, что доставляет эквивалентное определение класса $\vartheta_\varepsilon(f^2)$.

В случае $\varepsilon = \infty$ препятствие $\vartheta_\infty(f^2) \in H^m_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta)$ есть в точности классическое препятствие ван Кампена к вложимости X^n в $\mathbb{R}^{2n}$ [24] (ср. [8, 28, 25]). Таким образом, препятствия $o(f^2)$, $o_\varepsilon(f^2)$ являются в некотором смысле обобщающими препятствие ван Кампена, хотя теорема 2.2(ii), строго говоря, не обобщает (а скорее дополняет) классическую теорему ван Кампена, Шапиро и Ву о достаточности препятствия ван Кампена при $n \geqslant 3$. В случае (ii) для кусочно-линейного f препятствие $\vartheta_\varepsilon(f^2)$ (для достаточно малых $\varepsilon > 0$ не зависящее от ε в силу кусочной линейности f) было изучено в статье [28]. (Пример [28, 1.7], относящийся к препятствию ϑ, исправлен в [16]).

Замечание. Необходимость в условиях п. а) и б) теоремы 2.2 очевидна (и очевидным образом выполнена без всяких размерностных ограничений), а достаточность следует из утверждений п. а+) и б+) соответственно.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству п. а+), б+) и в), поясним ключевую идею доказательства. Процесс гомотопии изовариантного отображения к f^2, играющий главную роль в доказательстве, осуществляется индукцией по остовам, причем каждый шаг индукции состоит из двух частей: "дискретного подтаскивания", т.е. построения гомотопии с дискретным параметром (при условии, что гомотопия на предыдущем остове уже построена) и "изотопического подтаскивания", т.е. построения гомотопии (при условии наличия дискретной гомотопии на текущем остове). Первая часть крайне проста и целиком содержится в лемме 2.3. Основная идея второй части ("изотопического подтаскивания") понятна из приводимого далее простого геометрического доказательства следующего утверждения, формально нигде не используемого.

Утверждение. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\gamma > 0\ \exists\beta > 0$ *так что выполнено следующее. Если существует* β*-близкое к* f^2 *изовариантное отображение и если включение* $X^2 \backslash N_\beta \hookrightarrow X^2$ *эквивариантно гомотопно* $\operatorname{rel} X^2 \backslash N_\delta$ *некоторому отображению* $X^2 \backslash N_\beta \to X^2 \backslash N_\delta$, *то произвольное изовариантное отображение* $\Phi\colon X^2 \to Q^2$, δ*-близкое к* f^2, *изовариантно* ε*-гомотопно отображению* Φ_+, γ*-близкому к*

f^2.

Доказательство. Рассмотрим изовариантное отображение $\Psi\colon X^2 \to Q^2$, β-близкое к f^2. Тогда "линейная" гомотопия h_t между Ψ и f^2 на множестве $X^2 \backslash N_\beta$ не задевает диагонали Δ_Q. В частности, гомотопия $h'_t = h_t|_{X^2\backslash N_\delta}$ не задевает Δ_Q. Но тогда не задевает Δ_Q и гомотопия $h'_t \circ r_1$ между $\Psi|_{X^2\backslash N_\beta} \circ r_1$ и $\Phi|_{X^2\backslash N_\beta} \circ r_1$, где $r_t\colon X^2\backslash N_\beta \to X^2$ есть данная из условия эквивариантная гомотопия $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\delta$, такая что $r_1(X^2\backslash N_\beta) \subset X^2\backslash N_\delta$.

Таким образом, имеется следующая серия эквивариантных гомотопий, не задевающих Δ_Q. Отображение $\Phi|_{X^2\backslash N_\beta}$ гомотопией $\Phi \circ r_t$ переводится в отображение $\Phi \circ r_1$. Оно под действием гомотопии $h'_{1-t} \circ r_1$ переходит в $\Psi \circ r_1$. Это отображение, в свою очередь, гомотопией $\Psi \circ r_{1-t}$ превращается в $\Psi|_{X^2\backslash N_\beta}$. Наконец, гомотопия h_t переводит последнее отображение в $f^2|_{X^2\backslash N_\beta}$.

Первая и третья гомотопии, вообще говоря, не являются малыми, но так как они близки друг к другу (точнее, первая близка к третьей, пройденной в обратном направлении), то результирующую гомотопию между $\Phi|_{X^2\backslash N_\beta}$ и $f^2|_{X^2\backslash N_\beta}$ можно считать малой $c\delta$-гомотопией. Следовательно, по эквивариантной лемме Борсука Φ изовариантно $c\delta$-гомотопно отображению Φ_+, $2c\delta$-близкому к f^2 и совпадающему на $X^2\backslash N_\beta$ с f^2. Но тогда утверждение немедленно следует из леммы 2.1a. $\square$

Конечно, условие о том, что включение $X^2\backslash N_\beta \hookrightarrow X^2$ эквивариантно гомотопно $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\delta$ некоторому отображению $X^2\backslash N_\beta \to X^2\backslash N_\delta$, ни откуда не следует и в общем случае не выполнено. Поэтому для осуществления "изотопического подтаскивания" на самом деле понадобятся немного более тонкие рассуждения; они содержатся в предложении 2.4.

Переходим к доказательству теоремы 2.2.

Лемма 2.3. $\forall \gamma > 0\ \exists \beta > 0$ *так что если на остове размерности k некоторой эквивариантной триангуляции T пары (X^2, Δ) задано изовариантное отображение $\varphi\colon T^{(k)} \to Q^2$, β-близкое к $f^2|_{T^{(k)}}$ и изовариантно $\frac{\delta_Q}{2}$-гомотопное ограничению на $T^{(k)}$ некоторого изовариантного отображения $\Psi\colon T^{(k+1)} \to Q^2$, которое определено на $(k+1)$-остове T, то φ продолжается до изовариантного отображения $\Phi\colon T^{(k+1)} \to Q^2$, γ-близкого к $f^2|_{T^{(k+1)}}$.*

Доказательство. По эквивариантной лемме Борсука φ продолжается до некоторого изовариантного отображения $\varphi' : T^{(k+1)} \to Q^2$, которое δ_Q-близко к $f^2|_{T^{(k+1)}}$. Пусть T_1 (соотв. T_2) – подкомплекс $T^{(k+1)}$, состоящий из всех симплексов, пересекающих N_β и всех их граней (соотв. из всех симплексов, не пересекающих N_β). Поскольку φ β-близко к $f^2|_{T^{(k)}}$, по той же эквивариантной лемме Борсука оно продолжается до некоторого изовариантного отображения $\varphi'' : T^{(k)} \cup T_2 \to Q^2$, 2β-близкого к ограничению f^2. Определим изовариантное отображение $\varphi_+ : T^{(k+1)} \to Q^2$, положив его равным φ' на T_1 и равным φ'' на T_2, тогда φ_+ δ_Q-близко к $f^2|_{T^{(k+1)}}$ и 2β-близко к $f^2|_{T_2}$ на T_2. По лемме 2.1a $\beta = \beta(\gamma)$ можно выбрать так, что φ_+ изовариантно гомотопно отображению Φ, γ-близкому к $f^2|_{T^{(k+1)}}$, причем из доказательства этой леммы ясно, что гомотопию можно выбрать неподвижной на $T^{(k)}$. $\square$

Предложение 2.4. *Пусть d – натуральное число, $\pi = \pi_d(S^{m-1})$ и $\delta > 0$. Тогда $\forall \gamma > 0\ \exists \beta \in (0, \gamma/2]$ так что:*

а) *Если для обратного спектра абелевых групп*

$$\{H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{2^{-k}}}; \pi);\ \text{гомоморфизмы забывания}\ \ j^l_k\}$$

выполнено условие Миттаг-Леффлера, то $\forall \alpha \in (0, \beta/2]$ тривиальна композиция

$$H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta}; \pi) \to H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus N_\alpha, \overline{X^2 \setminus N_\beta}; \pi) \to$$
$$\to H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus N_\alpha, \overline{X^2 \setminus N_\gamma}; \pi).$$

б) *Если для некоторого подмножества*

$$H_\delta \subset H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\delta}; \pi)$$

для обратного спектра

$$\{\widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{2^{-k}\delta}}; \pi) = (j^{2^{-k}\delta}_\delta)^{-1}(H_\delta);$$
$$\text{ограничения гомоморфизмов}\ \ j^l_k\}$$

выполнено условие Миттаг-Леффлера, то гомоморфизм

$$H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, \overline{X^2 \setminus N_\beta}; \pi) \to H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, \overline{X^2 \setminus N_\gamma}; \pi)$$

отображает в ноль любой класс когомологий η, который **дискретно реализуем** *в следующем смысле:*

$$\forall \alpha \in (0, \beta/2] \exists \eta_\alpha \in \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_\beta}; \pi),$$

образ которого в группе $H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\alpha, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi)$ *совпадает с образом* η*:*

$$H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Sigma, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi) \to H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\alpha, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi) \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi).$$

Доказательство. а) В следующей диаграмме гомоморфизмы с одинаковыми индексами образуют точные участки:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{d-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\beta, \overline{X^2\setminus N_\gamma};\pi) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_2^*"'] & H^{d-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\beta, \overline{X^2\setminus N_\gamma};\pi) \arrow[d, "\delta_1^*"'] \\
H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_\alpha};\pi) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_3"'] & H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j_2"'] & H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\alpha, \overline{X^2\setminus N_\beta};\pi) \arrow[d, "j_1"'] \\
H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_\gamma};\pi) \arrow[r, equal] & H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, \overline{X^2\setminus N_\gamma};\pi) & H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus N_\alpha, \overline{X^2\setminus N_\gamma};\pi)
\end{tikzcd}$$

По условию Миттаг-Леффлера $\beta=\beta(\gamma)$ можно выбрать так, что $\operatorname{im} j_3 = \operatorname{im} j_2$. Если $\zeta \overset{i}{\mapsto} \eta \overset{j_1}{\mapsto} \theta \neq 0$, то отсюда следует, что элемент ζ, измененный на некоторый элемент $\zeta_+ \in \operatorname{im} j$, лежит в образе δ_2^*. Но если $\zeta' \overset{\delta_2^*}{\mapsto} \zeta+\zeta_+$, то по коммутативности диаграммы $\zeta' \overset{\delta_1^*}{\mapsto} \eta \overset{j_1}{\mapsto} \theta$, что противоречит, учитывая точность правого столбца, нетривиальности θ. $\square$

б) Введем обозначение $U_k = \overline{X^2\setminus N_{2^{-k}\delta}}$. Условие Миттаг-Леффлера означает, что в строчке отображений

$$\dots \to \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_{i+1};\pi) \to \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_i;\pi) \to \dots \to \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_0;\pi)$$

можно, начав с любого i (большего некоторого i_0), перемещаться так, что номер текущей окрестности U_i будет стремиться к бесконечности, пользуясь единственной операцией: $i \mapsto l(i) \mapsto i+1$ при условии, что

$$\operatorname{im}\left[\widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_i;\pi) \to \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_{l(i)};\pi)\right] =$$

$$= \operatorname{im}\left[\widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_{i+1};\pi) \to \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_{l(i)};\pi)\right].$$

Покажем, что при $i \geqslant i_0$ любой коцикл $\eta_i \in Z^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Sigma;\pi)$ с носителем вне U_i, представляющий в группе $H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Sigma, U_i;\pi)$ дискретно реализуемый класс когомологий, когомологичен с носителем вне

$U_{l(i)}$ некоторому коциклу η_{i+1} с носителем вне U_{i+1}, тем самым представляющему, как нетрудно видеть, дискретно реализуемый класс когомологий в группе $H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Sigma, U_{i+1};\pi)$.

Тогда сумма таких когомологических "пленок" по всем $i \geqslant j$ (где j выбрано так, что $U_{l(j)} \subset X^2\backslash N_\gamma$) и доставит искомую когомологию в группе

$$C^{d-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, \overline{X^2 \setminus N_\gamma};\pi)$$

произвольного наперед заданного коцикла

$$\eta_j \in Z^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, \overline{X^2 \setminus N_\beta};\pi), \quad [\eta_j] = \eta$$

(где $\beta = 2^{-j}$, так что $U_j = \overline{X^2\backslash N_\beta}$) с коциклом, носитель которого вытеснен из каждого U_i, то есть (т.к. U_i исчерпывают все $X^2\backslash\Sigma$) с нулевым коциклом.

$$\begin{tikzcd}
H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Sigma, U_{i+1};\pi) \arrow[r, shift left] & H^d_{\mathrm{eq}}(U_N, U_{i+1};\pi) \arrow[l, dashed, shift left] & \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Delta, U_{i+1};\pi) \arrow[l] \arrow[d, shift right] \\
 & & \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Delta, U_{l(i)};\pi) \arrow[u, dashed, shift right] \\
H^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Sigma, U_i;\pi) \arrow[r] & H^d_{\mathrm{eq}}(U_N, U_i;\pi) \arrow[r, dashed, shift left] & \widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Delta, U_i;\pi) \arrow[l, shift left] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В самом деле, возьмем любое $U_N \supset U_{i+1}$. Ввиду дискретной реализуемости коцикла η_i ограничение $\eta_i|_{U_N}$ когомологично, посредством некоторой коцепи $\zeta \in C^{d-1}_{\mathrm{eq}}(U_N, U_i;\pi)$, некоторому коциклу η'_i, продолжающемуся до некоторого коцикла $\eta_{i\alpha} \in \widehat{Z}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_i;\pi)$ (см. диаграмму). (Множество $\widehat{Z}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_i;\pi)$ определяется как прообраз множества $\widehat{H}^d_{\mathrm{eq}}(X^2\setminus\Delta, U_i;\pi)$ при гомоморфизме факторизации по группе кограниц.) В силу условия Миттаг-Леффлера последний когомологичен с носителем вне $U_{l(i)}$ некоторому коциклу $\eta_{i+1,\alpha}$ с носителем вне U_{i+1}. Ограничение этой когомологии на U_N доставляет некоторую коцепь $\theta \in C^{d-1}_{\mathrm{eq}}(U_N, U_{l(i)};\pi)$, осуществляющую когомологию коцикла $\eta'_i = \eta_{i\alpha}|_{U_N}$ с коциклом $\eta_{i+1,\alpha}|_{U_N}$, обнуляющимся на U_{i+1}. Продолжим коцепь $\zeta + \theta$ произвольным образом (например, нулями) на $X^2\backslash\Sigma$. Для получившейся коцепи $\lambda \in C^{d-1}_{\mathrm{eq}}(X^2\backslash\Sigma, U_{l(i)};\pi)$ получим, что коцикл $\eta_{i+1} = \eta_i - \delta\lambda$, при ограничении на U_N дающий

$\eta_{i+1,\alpha}|_{U_N}$, и есть искомый коцикл ц носителем вне U_{i+1}, когомологичный η_i с носителем вне $U_{l(i)}$. $\square$

Для доказательства случая (i) в теореме 2.2 нам понадобится

Добавление к предложению 2.4. *В случае $X = S^n$, $n < d$, $\delta = \gamma = \infty$ можно взять $\beta = \infty$.*

Доказательство. В самом деле, абсолютная группа $H^d_{\text{eq}}(S^n \times S^n \setminus \Delta, \pi)$ тривиальна, поэтому образы остальных групп спектра в этой группе совпадают друг с другом. Таким образом, доказательство п. а) продолжает работать при $\beta = \infty$, а по поводу доказательства п. б) достаточно заметить, что если указанное перемещение можно осуществить для всех $i \geqslant i_0$, то его можно осуществить и для всех $i \geqslant 0$, начав с операции $i \mapsto 0 \mapsto i_0$. $\square$

Доказательство п. а+ теоремы 2.2. Ввиду п. а+) и в) критерия 2.0 достаточно построить изовариантную ε-гомотопию к некоторому γ-близкому к f^2 отображению. Зафиксировав достаточно мелкую эквивариантную триангуляцию T пары (X^2, Δ), будем строить требуемую гомотопию, вместе с ее конечным отображением, индукцией по остовам этой триангуляции. На $(m-1)$-м остове гомотопия строится с использованием условия (о равенстве нулю первого препятствия), эквивариантной теории препятствий и леммы 2.1a. Ясно, что в случае $Q = \mathbb{R}^m$ это построение проходит и для $\delta = \varepsilon = \infty$.

На следующих остовах $T^{(d)}$, $d = m, \dots, 2n-1$, применяется следующее рассуждение. Прежде всего заметим, что поскольку группа $\pi_d(S^{m-1})$ конечна [13] и окрестности N_α являются эквивариантными подполиэдрами X^2, группы

$$H^d_{\text{eq}}(X^2 \backslash \Delta, \overline{X^2 \backslash N_{2^{-k}}}; \pi_d(S^{m-1}))$$

конечны, и, следовательно, для спектра

$$\{H^d_{\text{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{2^{-k}}}; \pi_d(S^{m-1}));\ j^l_k\}$$

выполнено условие Миттаг-Леффлера.

Ввиду леммы 2.1a и эквивариантной теории препятствий для продолжения требуемой гомотопии на остов размерности d достаточно показать, что

$$\forall \delta' > 0\ \exists \varepsilon' > 0 : \forall \beta' > 0\ \exists \gamma' > 0$$

так что если в классе изовариантной ε'-гомотопии отображения $g^2|_{T^{(d-1)}}$ имеется отображение, γ'-близкое к $f^2|_{T^{(d-1)}}$, то тривиальна различающая

$$d_d(f^2, g^2) \in H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus N_{\beta'}, \overline{X^2 \setminus N_{\delta'}}; \pi_d(S^{m-1})). \tag{D}$$

В самом деле, в силу леммы 2.3 для достаточно малых ε' и $\gamma' = \gamma'(\beta')$ различающая

$$d'_d(f^2, g^2) \in H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus N_{\beta'}, \overline{X^2 \setminus N_{\varepsilon'}}; \pi_d(S^{m-1})) \tag{D$'$}$$

равна различающей $d'_d(\Phi, g^2)$ в той же группе, где Φ – изовариантное отображение, доставляемое леммой 2.3. Таким образом, различающая (D$'$) лежит в образе группы

$$H^d_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Delta, \overline{X^2 \setminus N_{\varepsilon'}}; \pi_d(S^{m-1})).$$

Поэтому по предложению 2.4a различающая (D$'$) становится тривиальной после некоторого увеличения ε', точнее, $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta')$ может быть выбрано так, чтобы различающая (D) была тривиальна.

Продолжение гомотопии на остов размерности $2n$ может быть осуществлено тем же методом, за исключением случая (ii). На самом деле продолжение гомотопии на последний остов всегда может быть осуществлено более простыми рассуждениями, не использующими никаких алгебраических условий, подробности см. в [27, proof of 1.8a]. $\square$

Доказательство п. б+ теоремы 2.2. Выбрав $\gamma > 0$, будем действовать как в доказательстве п. а+). Изовариантную гомотопию на $(m-1)$-остове из доказательства п. а+) можно построить таким образом, что из условия тривиальности

$$d(f^2, g^2) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, X^2 \setminus N_\delta)$$

следует, при надлежащем выборе β, тривиальность

$$d(f^2, g^2_+) \in H^{m-1}_{\mathrm{eq}}(X^2 \setminus \Sigma, X^2 \setminus N_\gamma),$$

где g_+ – вложение, доставляемое утверждением п. а+). В самом деле, кограницу c, осуществляющую когомологичность нулю коцикла $d(f^2, g^2)$, нужно разбить на две коцепи, одна из которых c_1 имеет носитель в $\overline{N_\delta \setminus N_\gamma}$, тем самым компактный, а вторая c_2

– в $N_\gamma\backslash\Sigma$. Согласно эквивариантному варианту теории препятствий, изовариантную гомотопию, построенную в доказательстве п. а+), можно изменить так, чтобы отвечающая ей коцепь c_+ (с кограницей $d(g_+^2, g^2)$) на $\overline{N_\delta\backslash N_\gamma}$ совпадала бы с c_1. Тогда коцепь $c - c_+$ имеет носитель в N_γ и кограницу $d(f^2, g_+^2)$.

Но тогда процесс, описанный в п. а+), можно продолжать, с экспоненциально уменьшающимися параметрами ε и γ, до бесконечности, получая в результате искомую псевдоизотопию. $\square$

Доказательство п. в теоремы 2.2. Необходимость легко вытекает из утверждения п. а+).

Достаточность немедленно следует из утверждений п. б+) и предложения 2.4 п. б для случая $d = m - 1$, $\pi = \mathbb{Z}$. $\square$

Теорема 3 вместе с добавлением является частным случаем следующей.

Теорема 2.5. *Пусть X^n – компактный полиэдр, Q^m – ориентируемое кусочно-линейное многообразие без края, $m > \frac{3n+1}{2}$. Если непрерывное отображение $f\colon X \to Q$ реализуется дискретно, то композиция f и включения $j\colon Q \hookrightarrow Q\times\mathbb{R}$ реализуется изотопически.*

Более того, из любой последовательности (g_i) кусочно-линейных вложений, сходящейся к f, можно выделить такую бесконечную подпоследовательность (g_{n_i}), что последовательность $(j\circ g_{n_i})$ континуализуема.

Доказательство. Так как в коразмерности $\geqslant 3$ дискретная реализуемость эквивалентна ε-аппроксимируемости, для каждого $\varepsilon > 0$, кусочно-линейными вложениями, достаточно доказать только вторую часть.

По условию отображение f^2 аппроксимируется изовариантными отображениями $\Phi_1^0, \Phi_2^0, \ldots\colon X^2 \to Q^2$, где $\Phi_i^0 = (g_i)^2$, так что $\Phi_i^0 \to f^2$ при $i \to \infty$. Допустим, $\forall k$ удалось выбрать такую подпоследовательность

$$\Phi_1^k = \Phi_{l_k(1)}^{k-1}, \Phi_2^k = \Phi_{l_k(2)}^{k-1}, \ldots$$

последовательности $\Phi_1^{k-1}, \Phi_2^{k-1}, \ldots$, что для любых i, j отображения Φ_i^k, Φ_j^k соединяются изовариантной (2^{-k})-гомотопией $h_{ij}^k\colon X^2 \to (Q\times\mathbb{R})^2$ (не ограничивая общности можно считать, что первый элемент новой последовательности не совпадает с первым элементом исходной). Тогда последовательное выполнение гомотопий

$$h^1_{1,l_2(1)}, h^2_{1,l_3(1)}, h^3_{1,l_4(1)}, \dots$$

доставит, учитывая часть в) критерия 2.0, теорему Пифагора (связывающую метрики Q и Q^2) и [4, лемма 1], требуемую псевдоизотопию.

Перейдем теперь к выбору подпоследовательности (Φ_i^k) последовательности (Φ_i^{k-1}), предположив, что последняя уже найдена. В силу леммы 2.1 $\exists\beta = \beta(k) > 0$ так что для изовариантной 2^{-k}-гомотопности Φ_i^{k-1} и Φ_j^{k-1} достаточна их изовариантная δ_Q-гомотопность $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$. Аналогично, для изовариантной (2^{-k})-гомотопности отображений $\alpha_i = s\circ\Phi_i^{k-1}$ и $\alpha_j = s\circ\Phi_j^{k-1}$, где $s\colon Q^2 \hookrightarrow (Q\times\mathbb{R})^2$ – включение, достаточна их изовариантная δ_Q-гомотопность $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$.

Будем строить изовариантную δ_Q-гомотопию $\operatorname{rel} X^2\backslash N_\beta$ между отображениями α_i и α_j индукцией по остовам некоторой эквивариантной триангуляции T пары (N_β, Δ). Как было замечено в определении после леммы 2.1, препятствия к построению такой гомотопии со значениями в Q^2 лежат в группах

$$H^k_{\mathrm{eq}}(\overline{X^2\backslash N\Delta}, \overline{X^2\backslash N_\beta}; \pi_k(S^{m-1})), \quad k = 1,\dots,2n, \tag{$*$}$$

а со значениями в $(Q\times\mathbb{R})^2$ – в группах

$$H^k_{\mathrm{eq}}(\overline{X^2\backslash N\Delta}, \overline{X^2\backslash N_\beta}; \pi_k(S^{m})), \quad k = 1,\dots,2n, \tag{$**$}$$

где $N\Delta$ – симплициальная окрестность Δ в триангуляции T. Допуская некоторую вольность, ввиду ориентируемости Q (подробнее см. определение после леммы 2.1), мы будем рассматривать ограничение $\alpha_i|_\sigma$ на произвольный симплекс T, не пересекающий Δ, как отображение $\alpha_i\colon \sigma \to S^{m-1} \subset S^m$.

При $k < m-1$ группа $\pi_k(S^{m-1})$ нулевая, поэтому на $(m-2)$-остове гомотопию можно построить со значениями в Q^2. Группа $\pi_{m-1}(S^m)$ нулевая, поэтому гомотопию можно продолжить на $(m-1)$-остов со значениями в $(Q\times\mathbb{R})^2$.

Предположим, что нам удалось продолжить гомотопию и на m-остов. По теореме Серра при $m<k<2m-1$ группы $\pi_k(S^m)$ конечны, см. [13]. Поскольку пара $(\overline{X^2\backslash N\Delta}, \overline{X^2\backslash N_\beta})$ есть пара компактных полиэдров, при $k>m$ конечны и группы $(**)$. Тем самым препятствия к искомой гомотопии α_i и α_j могут принимать, в зависимости от i и j, лишь конечное количество значений. Следовательно, выбором подпоследовательности из (α_i) можно добиться того, что, с помощью очевидной индукции по остовам, для отображений α_i, α_j из сокращенной последовательности гомотопию можно продолжить с m-остова на весь X^2. Таким образом, мы видим, что единственная трудность состоит в продолжении гомотопии на m-остов; чтобы ее преодолеть, мы сначала построим некоторую специальную гомотопию на $(m-1)$-остове.

Итак, мы возвращаемся в предыдущем рассуждении к моменту, когда гомотопия построена на T^{m-2} со значениями в Q^2, и собираемся довести его, уже без пропуска обоснований, до состояния, в котором гомотопия будет определена на m-остове со значениями в $(Q\times\mathbb{R})^2$. Добьемся дальнейшим сокращением (логически, однако, предшествующим в нашем построении уже упомянутому) последовательности (α_i) того, что препятствие в группе $(*)$, $k=m-1$, "четно", т.е. лежит в ядре факторизации, доставляемой делением на 2 группы коэффициентов $\mathbb{Z}$. Более того, будем считать, что на любом $(m-1)$-симплексе A триангуляции T, не пересекающем Δ, отображения $\alpha_i, \alpha_j\colon A\to S^{m-1}$ различаются (с учетом гомотопии, уже построенной на $T^{(m-2)}$) на некоторое отображение $S^{m-1}\to S^{m-1}$ четной степени $2e(A)$. Ориентация на симплексах A и $t(A)$, где $t\colon X^2\to X^2$ есть переставляющая сомножители инволюция, вводится так, чтобы $e(A)=e(t(A))$.

Будем строить гомотопию между α_i,α_j на $(m-1)$-остове последовательно по $(m-1)$-симплексам триангуляции T, не пересекающим Δ. Определим гомотопию между α_i и α_j на симплексе A, стянув $\alpha_i(A),\alpha_j(A)$ в верхнюю полусферу S^m_+, если гомотопия на симплексе $t(A)$ еще не определена (в нижнюю S^m_-, если уже определена). Если при этом северный (южный) полюс в образе – регулярная точка этой гомотопии, то алгебраическая сумма прохождений гомотопии через него равна $2e(A)$ (соотв. $-2e(A)$). Подправим эту гомотопию на сфероид степени $-e(A)$ (соотв. $e(A)$), тогда алгебраическая сумма прохождений гомотопии через северный полюс равна $e(A)$, а через южный $-e(A)$ (соответственно $e(A)$ и $-e(A)$). Ключевым фактом является то, что знаки получились одинаковыми для первого и второго случая (именно для этого нам пришлось требовать четность).

Далее, если B – произвольный m-симплекс триангуляции T, не пересекающий Δ, то, по построению, на симплексе B отображения $\alpha_i, \alpha_j\colon B \to S^m$ различаются (с учетом гомотопии, уже построенной на $(m-1)$-остове) на отображение $S^m \to S^m$ степени $\sum e(A_q)$, где сумма берется по всем $(m-1)$-симплексам A_q в ∂B. Но указанная сумма (а значит, и различающая на B) равна нулю. В самом деле, оба $(m-1)$-сфероида $\alpha_i|_{\partial B}$, $\alpha_j|_{\partial B}$, будучи продолжаемыми на симплекс B со значениями в S^{m-1}, гомотопны нулю со значениями в S^{m-1}. В частности, равна нулю и их различающая в группе $H^{m-1}(S^{m-1})$, которая, легко видеть, равняется $\sum 2e(A_q)$. Таким образом, $\sum e(A_q) = 0$, и тем самым препятствие к продолжению гомотопии на m-остов тривиально. $\square$

Литература

1. П. М. Ахметьев, *Об изотопической и дискретной реализации отображений n-сферы в евклидовом пространстве.* — Мат. сб. **187:7** (1996), 3–34.
2. П. М. Ахметьев, *Обобщенная проблема Давермана.* — В кн.: Труды Междунар. конф., посв. 90-летию Л. С. Понтрягина. М., 1998 (в печати).
3. *Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер и теория особенностей.* — УМН **55:3** (2000), (в печати).
4. Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство.* — Труды МИАН **81** (1966), 3–183.
5. *Псевдоизотопия некоторых локально-заузленных простых дуг в E^3.* — ДАН СССР **200:1** (1971), 21–23.
6. У. Масси, *Теория гомологий и когомологий.* М., Мир, 1981.
7. Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы.* М., Мир, 1979.
8. Д. Реповш, А. Скопенков, *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства.* — УМН (в печати); *Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces.* — Труды МИАН **212** (1996), 163–178.
9. К. Рурк, Б. Сандерсон, *Введение в кусочно-линейную топологию.* М., Мир, 1974.
10. Н. Стинрод, С. Эйленберг, *Основания алгебраической топологии.* М., ИЛ, 1958.
11. А. В. Чернавский, *Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия.* — Мат. сб. **79:3** (1969), 307–356.
12. А. Э. Харлап, *Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия.* — Мат. сб. **96:3** (1975), 347–373.
13. Ху Сы-цзян, *Теория гомотопий.* М., Мир, 1964.
14. П. Хилтон, С. Уайли, *Теория гомологий.* М., Мир, 1966.
15. Е. В. Щепин, М. А. Штанько, *Спектральный критерий вложимости компакта в евклидово пространство.* — В кн.: Труды Ленингр. междунар. тополог. конф. Л., Наука, 1983, с. 135–142.
16. P. M. Akhmet'ev, D. Repovš, A. B. Skopenkov, *Obstructions to approximating maps of surfaces into $\mathbb{R}^4$ by embeddings.* — Topol. Appl. (to appear).

17. R. H. Bing, J. M. Kister, *Taming complexes in hyperplanes.* — Duke Math. J. **31** (1964), 491–512.
18. P. E. Conner, E. E. Floyd, *Fixed point free involutions and equivariant maps.* — Bull. Am. Math. Soc. **66** (1960), 416–441.
19. R. D. Edwards, *The equivalence of close piecewise-linear embeddings.* — Gen. Top. Appl. **5** (1975), 147–180.
20. R. D. Edwards, R. C. Kirby, *Deformations of spaces of embeddings.* — Ann. Math. **93** (1971), 63–88.
21. B. I. Gray, *Space of the same n-type for all n.* — Topology **5** (1966), 241–243.
22. A. Haefliger, *Plongements différentiables dans le domain stable.* — Comm. Math. Helv. **37** (1962-63), 155–176.
23. L. S. Harris, *Intersections and embeddings of polyhedra.* — Topology **8** (1969), 1–26.
24. E. R. van Kampen, *Komplexe in euklidischen Räumen.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 72–78, 152–153.
25. V. S. Krushkal, *Embedding obstructions and 4-dimensional thickenings of 2-complexes.* — Proc. Am. Math. Soc. (to appear).
26. N. H. Kuiper, R. K. Lashof, *Microbundles and bundles.* — Invent. Math. **1** (1966), 1–17.
27. S. Melikhov, *On maps with unstable singularities.* — Topol. Appl. (to appear).
28. D. Repovš, A. B. Skopenkov, *A deleted product criterion for approximability of maps by embeddings.* — Topol. Appl. **87** (1998), 1–19.
29. K. Siekłucki, *Realization of mappings.* — Fund. Math. **65** (1969), 325–343.
30. C. D. Sikkema, *Pseudo-isotopies of arcs and knots.* — Proc. Am. Math. Soc. **31** (1972), 615–616.
31. E. C. Zeeman, *Unknotting combinatorial balls.* — Ann. Math. **78** (1963), 501–526.

Akhmet'ev P. M. and Melikhov S. A. On isotopic realizability of continuous mappings.

Under the metastable dimension restriction, we present an algebraic description of the class of discretely realizable maps (i.e., maps that are arbitrarily closely approximable by embeddings) which fail to be isotopically realizable (i.e., to be obtained from an embedding via a pseudo-isotopy). These maps are precisely the ones which yield a negative solution to the Isotopic Realization Problem of E. V. Shchepin (1993), see [1, 27].

A cohomological obstruction for isotopic realizability of a discretely realizable map of an n-polyhedron into an orientable PL m-manifold is constructed. We also present an obstruction for discrete realizability of a map $S^n \to \mathbb{R}^m$. If $m > \frac{3(n+1)}{2}$, these obstructions are shown to be complete. In fact, the latter obstruction can be regarded as an element of the limit of certain inverse spectrum of finitely generated Abelian groups (which are cohomology groups of compact polyhedra with coefficients in a locally constant sheaf), while the first obstruction can be identified with an element of the derived limit of this spectrum. On the other hand, the obstructions generalize the classical van Kampen obstruction for embeddability of an n-polyhedron into $\mathbb{R}^{2n}$.

An explicit construction of a series of discretely but not isotopically realizable maps $S^n \to \mathbb{R}^{2n}$ is given for $n \geqslant 3$. The singular sets of these maps are homeomorphic to the disjoint union of the p-adic solenoid, $p \geqslant 3$, and a point. Furthermore, it is shown that the Isotopic Realization Problem has positive solution in the metastable range under the assumption of stabilization with codimension 1, or if the configuration singular set $\Sigma(f) = \{(x,y) \in S^n \times S^n \mid f(x) = f(y)\}$ of a map $f\colon S^n \to \mathbb{R}^m$ is acyclic in dimension $2n-m$ with respect to the Steenrod–Sitnikov homology.

Поступило 30 октября 1999 г.

ИЗМИ РАН
email akhmetev@izmiran.rssi.ru,
pmakhmet@mi.ras.ru
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
email sergey@melikhov.mccme.ru