Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

М. А. Гущин, А. Н. Коробейников, Г. М. Полотовский

ПОСТРОЕНИЕ ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ КУБИКИ И КВАРТИКИ МЕТОДОМ КУСОЧНОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

Введение

В 1900 году Д. Гильберт включил в 16-й пункт своего знаменитого списка “Математические проблемы” следующий вопрос: какие вещественные схемы неособых кривых могут быть реализованы кривыми заданной степени? Аналогичный вопрос может быть поставлен и для распадающихся кривых. Для первого нетривиального случая – кривых степени 6 – такая задача была сформулирована Д. А. Гудковым в предисловии к книге [1] и решена Г. М. Полотовским [2, 3]. После этого А. Б. Корчагиным, Е. И. Шустиным и Г. М. Полотовским была начата классификация распадающихся кривых степени 7 [4–8]. Эта классификация до сих пор не закончена, однако в последнее время, главным образом благодаря новым методам, предложенным С. Ю. Оревковым [9–13], появилась реальная надежда завершить ее.

В работе Б. Штурмфельса [14] предложен способ построения трансверсально пересекающихся вещественных алгебраических гиперповерхностей, обобщающий метод “patchworking” О. Я. Виро [15, 16]. В настоящей работе мы применяем метод Виро–Штурмфельса для построения кривых степени 7, распадающихся в произведение кубики и квартики. Изучение таких кривых было начато в [8] и продолжено в [9, 10]. В отличие от [10], где получена классификация взаимных расположений M-кубики и M-квартики, пересекающихся в 12 различных точках, лежащих на овале кубики и на одном овале квартики, в этой работе предполагается, что один из овалов M-квартики пересекается в 12 точках с нечетной ветвью M-кубики. Все попарно различные логически возможные топологические модели (схемы) таких расположений кубики и квартики, удовлетворяющие тривиальным следствиям теоремы Безу, были перечислены Г. М. Полотовским и А. Н. Коробейниковым (неопубликовано). Оказалось, что имеются 295 схем расположений овала квартики и пересекающей его в 12 точках нечетной ветви кубики, а всего (т. е. с учетом расположений овалов, свободных от точек пересечения) подлежат рассмотрению более 7000 схем. Из них некоторые запрещены (т.е. доказано, что они не могут быть реализованы кривыми степени 7) с помощью теории комплексных ориентаций (Г. М. Полотовский) и с помощью теории зацеплений (С. Ю. Оревков [9]), однако систематическое применение этих методов не завершено; некоторые схемы реализованы теми же авторами с помощью разных вариантов метода малого параметра. В настоящей работе удалось реализовать еще 11 схем, которые приведены в конце статьи. Используемые средства применимы и для других классов распадающихся кривых.

Мы благодарим И. В. Итенберга и С. Ю. Оревкова за полезные обсуждения и многочисленные замечания к первоначальному варианту текста.

§1. “Patchworking” для построения неособых кривых (по [15, 16])

1.1. Начальные данные. Напомним, что *M-кривой* называется вещественная неособая проективная кривая C_n степени n, множество $\mathbb{R}C_n$ вещественных точек которой имеет максимально возможное для данной степени число связных компонент (ветвей), равное $(n-1)(n-2)/2+1$. M-кубика C_3 состоит в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ из двух компонент, одна из которых разбивает $\mathbb{R}P^2$, а вторая – нет. Первая называется *овалом*, а вторая – *нечетной ветвью*; они будут обозначаться O_3 и J соответственно. M-квартика C_4 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырех овалов вне друг друга. Тот из них, который пересекается с J (в 12 различных точках), будем обозначать O_4. Остальные четыре овала (три овала кривой C_4 и овал O_3) будем называть *свободными*.

Пусть T_n – треугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(0,0)$, $(0,n)$, $(n,0)$, и τ_n – триангуляция треугольника T_n, вершины которой имеют целочисленные координаты. Триангуляция τ_n называется *примитивной*, если площадь каждого треугольника из τ_n равна $1/2$. В этом случае каждая точка целочисленной решетки в T_n является вершиной триангуляции. Припишем каждой вершине (i,j) примитивной триангуляции знак $\sigma_{i,j}$, то есть определим на целочисленной решетке в T_n функцию $\sigma : (i,j) \longmapsto \sigma_{i,j}$, где $\sigma_{i,j} \in \{+1,-1\}$. Введем дополнительное условие: триангуляция τ_n *выпукла*. Это означает, что существует выпуклая кусочно-линейная функция $V : T_n \to \mathbb{R}$, которая линейна в каждом треугольнике из τ_n и нелинейна в объединении любых двух треугольников. Значение функции V в целочисленной точке (i,j) обозначается $V_{i,j}$.

Набор (n, τ_n, V, σ), где τ_n – выпуклая примитивная триангуляция треугольника T_n, будем называть *начальными данными*.

1.2. Построение кусочно-линейных кривых. Пусть заданы некоторые начальные данные (n, τ_n, V, σ). Рассмотрим копии $T_x = S_x(T_n)$, $T_y = S_y(T_n)$, $T_{xy} = S(T_n)$ треугольника T_n, где S_x, S_y – симметрии относительно соответствующих осей координат и $S = S_x \circ S_y$. Обозначим $T_*(n)$ квадрат $T_n \cup T_x \cup T_y \cup T_{xy}$. Пусть $\tau_*(n)$ – триангуляция квадрата $T_*(n)$, индуцированная указанными симметриями из τ_n. Распространим функцию σ на целочисленную решетку в $T_*(n)$ по следующему правилу:

$$\sigma_{i,j}\sigma_{vi,wj}v^i w^j = 1,$$

где v, $w = \pm 1$. Другими словами, при симметрии вершины относительно координатной оси мы сохраняем знак, если расстояние от этой вершины до данной оси четно, и меняем знак на противоположный в противном случае.

В каждом треугольнике триангуляции $\tau_*(n)$, имеющем вершины с разными знаками, проведем среднюю линию, разделяющую вершины разных знаков. Пусть L_* – объединение проведенных отрезков. Пара $(\operatorname{int} T_*(n), \operatorname{int} T_*(n) \cap L_*)$ называется *результатом аффинного кусочного конструирования*[1].

Пусть $T^*(n)$ получается из квадрата $T_*(n)$ отождествлением диаметрально противоположных точек его границы. Ясно, что $T^*(n)$ гомеоморфно вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Обозначим через L^* образ кривой L_* в $T^*(n)$ при описанном отождествлении и назовем пару $(T^*(n), L^*)$ *результатом проективного кусочного конструирования.*

На рис. 1 и 2 приведены примеры начальных данных и отвечающих этим данным результатов кусочного конструирования для $n = 3$ и $n = 4$ соответственно. Здесь и на следующих рисунках

[1]Мы используем термин “кусочное конструирование” в качестве русского эквивалента термина “patchworking”.

белым вершинам отвечает знак плюс, черным – знак минус, а числа, проставленные возле вершин, – значения функции V.

1.3. Построение неособых кривых степени n. По заданным начальным данным (n, τ_n, V, σ) определим однопараметрическое семейство многочленов

$$b_t(x, y) = \sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n \\ i \geqslant 0,\, j \geqslant 0}} \sigma_{i,j} t^{V_{i,j}} x^i y^j \qquad (1)$$

и соответствующее семейство однородных многочленов

$$B_t(x_0, x_1, x_2) = x_0{}^n b_t(x_1/x_0, x_2/x_0). \qquad (2)$$

Теорема Виро о кусочном конструировании [15]. *Пусть $(n$, τ_n, V, $\sigma)$ – начальные данные, описанные в п. 1.1. Пусть b_t и B_t – неоднородный и однородный многочлены, полученные из начальных данных по формулам (1), (2), и пусть L_* и L^* – кусочно-линейные кривые в $T_*(n)$ и $T^*(n)$ соответственно, полученные из этих же начальных данных при кусочном конструировании.*

Тогда существует $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \in (0, t_0]$

(i) *многочлен b_t определяет неособую аффинную кривую $c_n(b_t)$ степени n такую, что пара $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}c_n(b_t))$ гомеоморфна паре $(\operatorname{int} T_*(n), \operatorname{int} T_*(n) \cap L_*)$;*

(ii) *многочлен B_t определяет такую неособую проективную кривую $C_n(B_t)$ степени n, что пара $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_n(B_t))$ гомеоморфна паре $(T^*(n)$, $L^*)$.*

§2. “PATCHWORKING” ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ

2.1. Алгоритм построения примитивного смешанного разбиения. *Примитивным смешанным разбиением* μ_n треугольника T_n будем называть разбиение его на треугольники площади $1/2$ и параллелограммы площади 1 с вершинами в точках с целочисленными координатами. Ясно, что при этом каждая точка целочисленной решетки в T_n является вершиной разбиения μ_n.

Пусть $(n_1, \tau_{n_1}, V^1, \sigma^1)$ и $(n_2, \tau_{n_2}, V^2, \sigma^2)$ – два заданных набора начальных данных. Для $n = n_1 + n_2$ определим в каждой целочисленной точке (i, j) треугольника T_n значение $V_{i,j}$ по значениям функций V^1 и V^2 в целочисленных точках $(i_1, j_1) \in T_{n_1}$ и

$(i_2, j_2) \in T_{n_2}$ соответственно формулой

$$V_{i,j} = \min_{\substack{i_1+i_2=i\\ j_1+j_2=j}} (V^1_{i_1,j_1} + V^2_{i_2,j_2}). \qquad (3)$$

Будем считать, что для каждой точки $(i, j) \in T_n$ формула (3) однозначно определяет пары (i_1, j_1), (i_2, j_2) (в противном случае необходимо изменить исходные функции V^1 и V^2), и положим

$$\sigma_{i,j} = \sigma^1_{i_1,j_1} \cdot \sigma^2_{i_2,j_2}. \qquad (4)$$

Попытаемся найти выпуклую кусочно-линейную функцию $V : T_n \to \mathbb{R}$ с определенными формулой (3) значениями $V_{i,j}$ в точках $(i, j) \in T_n$, проекции ребер графика которой определяют примитивное смешанное разбиение треугольника T_n. С этой целью для каждой четверки целочисленных точек (i_k, j_k), $k = 1, \ldots, 4$, являющихся вершинами параллелограмма площади 1 в T_n, проверяем, лежат ли точки (i_k, j_k, V_{i_k,j_k}) в одной плоскости в $\mathbb{R}^3$. При положительном ответе проверяем, лежат ли все точки $(i, j, V_{i,j})$, отличные от точек (i_k, j_k, V_{i_k,j_k}), выше этой плоскости. Если да, то в качестве значений функции V на этом параллелограмме выбираем значения ординат соответствующих точек этой плоскости.

Пусть Π – объединение множеств точек всех параллелограммов, для которых был получен положительный ответ, и $\Delta = T_n \setminus \operatorname{int}\Pi$. Для каждого треугольника площади $1/2$ с целочисленными вершинами $(i_s, j_s) \in \Delta$, $s = 1, 2, 3$, не пересекающегося с $\operatorname{int}\Pi$, проверяем, лежат ли все точки $(i, j, V_{i,j})$, отличные от (i_s, j_s, V_{i_s,j_s}), выше плоскости этого треугольника. Если да, то в качестве значений функции V на этом треугольнике выбираем значения ординат соответствующих точек этой плоскости.

Если в результате описанной процедуры множество Δ окажется триангулированным, то искомая функция V построена (в противном случае функция V с требуемыми свойствами не существует и следует изменить исходные функции V^1 и V^2). Тем самым одновременно получено (выпуклое) примитивное смешанное разбиение μ_n треугольника T_n.

На рис. 3 приведен пример разбиений множеств Π и Δ и выпуклого смешанного разбиения, построенного по системам начальных данных рис. 1 и 2.

2.2. Построение распадающихся кривых. Так же, как в п. 1.2, распространим разбиение μ_n треугольника T_n до разбиения $\mu_*(n)$

квадрата $T_*(n)$, и в каждом треугольнике из $\mu_*(n)$, имеющем вершины разных знаков, проведем среднюю линию, разделяющую вершины разных знаков. В вершинах параллелограмма может получиться один из четырех (с точностью до выбора направления и начала обхода) наборов знаков: $(+,+,+,+)$, $(-,-,-,-)$, $(+,+,-,-)$, $(+,-,+,-)$. В первых двух случаях параллелограмм остается пустым, в третьем – проводим среднюю линию, отделяющую плюсы от минусов, а в четвертом – проводим отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Обозначим, как и в п. 1.2, через L_* объединение проведенных отрезков в $T_*(n)$, а подъем звездочки вверх опять будет отвечать проективизации. Таким образом, в параллелограммах четвертого типа кусочно-линейные кривые L_* и L^* имеют двойные точки ("кресты").

Заметим теперь, что в результате описанного в п. 2.1 построения каждая треугольная грань графика функции V параллельна ровно одной из треугольных граней графиков одной из функций V^1, V^2 (μ_n состоит из $n_1^2+n_2^2$ треугольников и $n_1^2n_2^2$ параллелограммов), что вместе с симметриями S_x, S_y и S (см. п. 1.2) определяет биекцию

$$\pi : \Delta(\mu_*(n)) \to \Delta(\tau_*(n_1)) \cup \Delta(\tau_*(n_2))$$

между множеством $\Delta(\mu_*(n))$ треугольных ячеек разбиения $\mu_*(n)$ и объединением множеств $\Delta(\tau_*(n_1))$ и $\Delta(\tau_*(n_2))$ треугольных ячеек триангуляций $\tau_*(n_1)$ и $\tau_*(n_2)$.

Теорема Штурмфельса. *Пусть $(n_1, \tau_{n_1}, V^1, \sigma^1)$, $(n_2, \tau_{n_2}, V^2, \sigma^2)$ – начальные данные, задающие неоднородные и однородные многочлены b_t^1, b_t^2 и B_t^1, B_t^2 по формулам (1) и (2), и $n = n_1 + n_2$. Пусть L_* и L^* – кусочно-линейные кривые в $T_*(n)$ и $T^*(n)$ соответственно, полученные из начальных данных кусочным конструированием, описанным выше в этом пункте.*

Тогда существует $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \in (0, t_0]$

(i) *многочлен $b_t = b_t^1 \cdot b_t^2$ определяет аффинную распадающуюся кривую $c_n(b_t) = c_{n_1}(b_t^1) \cup c_{n_2}(b_t^2)$ такую, что пара $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}c_n(b_t))$ гомеоморфна паре $(\operatorname{int} T_*(n), \operatorname{int} T_*(n) \cap L_*)$;*

(ii) *многочлен $B_t = B_t^1 \cdot B_t^2$ определяет проективную распадающуюся кривую $C_n(B_t) = C_{n_1}(B_t^1) \cup C_{n_2}(B_t^2)$ такую, что пара $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_n(B_t))$ гомеоморфна паре $(T^*(n), L^*)$;*

(iii) *если треугольная ячейка f разбиения $\mu_*(n)$ содержит фрагмент s кривой L^* и $\pi(f) \in \Delta(\tau_*(n_i))$, то при гомеоморфизме из*

(i) *(из* (ii)*) фрагменту s отвечает дуга ветви кривой* $\mathbb{R}c_n(B_t^i)$ *(кривой* $\mathbb{R}C_n(B_t^i)$ *соответственно).*

На рис. 4 слева показан результат кусочного конструирования распадающейся кривой для примера рис. 3, а справа – гладкая модель реализованной проективной кривой. Здесь и на рис. 9 ниже внешние окружности изображают границу круга Пуанкаре, сплошными линиями показаны кубики, а пунктиром – квартики, причем овал O_4 всюду изображен как стандарная окружность с центром в точке $(0:0:1)$.

§3. Результаты

На рис. 5 и 6 приведены результаты кусочного конструирования, которые дают 11 новых схем взаимных расположений кубики и квартики. Приведем наборы начальных данных, найденные нами для получения этих результатов (заметим, что кусочное конструирование схемы 8 (рис. 6) было подробно показано выше последовательностью рисунков 1–4).

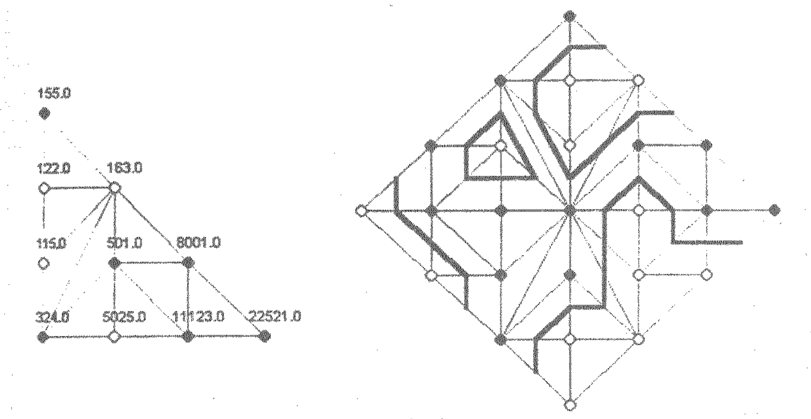


Рис. 1.

На рис. 7 показаны пять триангуляций τ_{n_1} для $n_1 = 3$. Далее приведена таблица 1, содержащая 11 вариантов значений пары функций (V^1, σ^1) в целочисленных точках (i,j) треугольника T_3 ($\circ$ – плюс, $\bullet$ – минус).

На рис. 8 приведены три набора начальных данных с $n_2 = 4$.

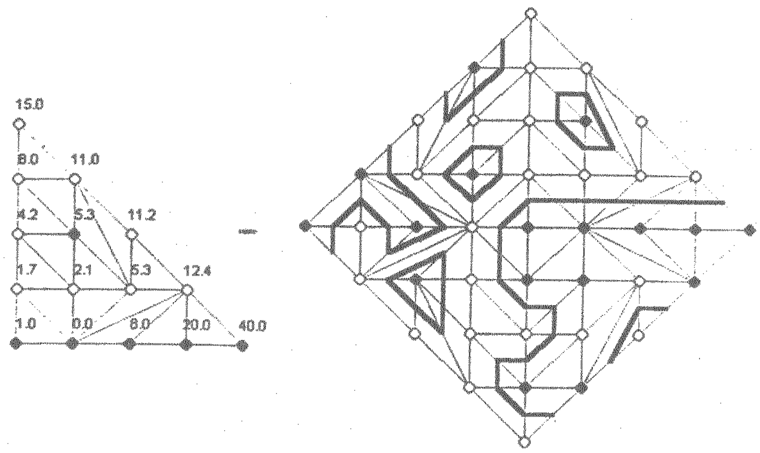

15.0
8.0
11.0
4.2
5.3
11.2
1.7
2.1
5.3
12.4
1.0
0.0
8.0
20.0
40.0

Рис. 2.

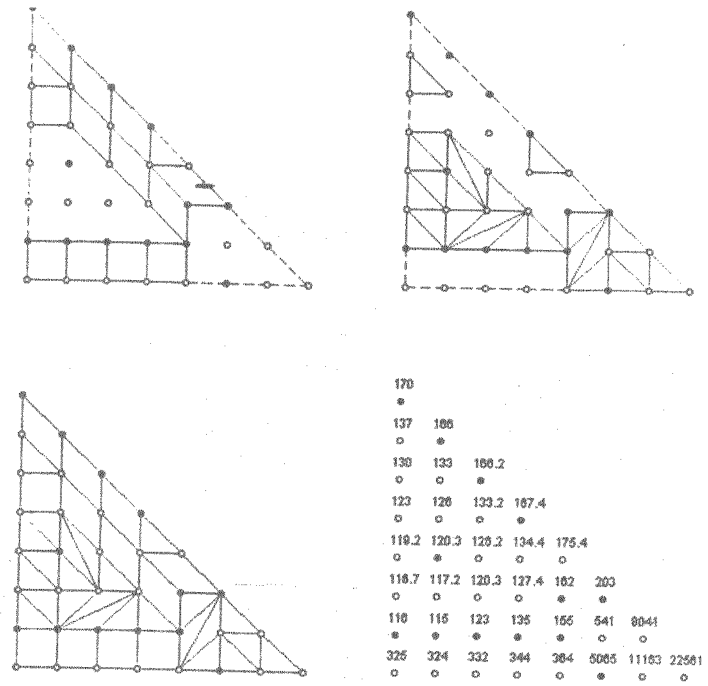

170
137 166
130 133 166.2
123 126 133.2 167.4
119.2 120.3 126.2 134.4 175.4
116.7 117.2 120.3 127.4 162 203
116 115 123 135 155 541 8041
325 324 332 344 364 5065 11163 22561

Рис. 3.

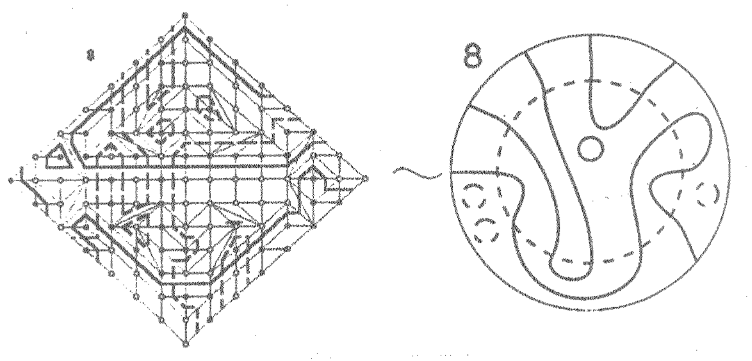


Рис. 4.

Таблица 1.

N пп	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(0,1)
1	10,∘	1,•	4,∘	10,∘	5,∘
2	593,∘	234,∘	557,∘	2456,∘	1157,∘
3	3626,•	6201,•	8926,•	13250,•	1522,•
4	965,•	964,•	1028,•	4100,•	4657,•
5	3700,•	2925,•	4141,•	7405,•	3013,•
6	229,•	5769,∘	18101,•	39706,•	5,•
7	2821,•	3546,∘	6223,•	11154,•	1125,•
8	324,•	5025,∘	11123,•	22521,•	115,∘
9	4628,•	5353,•	7760,•	12020,•	2029,•
10	260,•	985,•	1800,•	2700,•	5,•
11	19044,•	22180,•	31588,•	47605,•	8464,•

N пп	(1,1)	(2,1)	(0,2)	(1,2)	(0,3)
1	0,∘	2,∘	1,∘	0.7,•	0.1,∘
2	669,•	3483,∘	3673,∘	5190,∘	7890,∘
3	3097,•	5922,∘	10,•	585,•	1157,•
4	1296,•	2320,∘	10291,•	4900,•	18986,•
5	738,•	2004,∘	4785,•	10,•	7625,•
6	3545,•	16877,•	173,•	3014,∘	788,•
7	2519,•	5221,•	1,•	3720,•	3291,•
8	501,•	8001,•	122,∘	163,∘	155,•
9	2854,∘	5161,•	488,•	1213,•	8,∘
10	740,•	1500,•	300,•	925,•	904,•
11	12600,•	21008,•	2116,•	5252,•	0.01,•

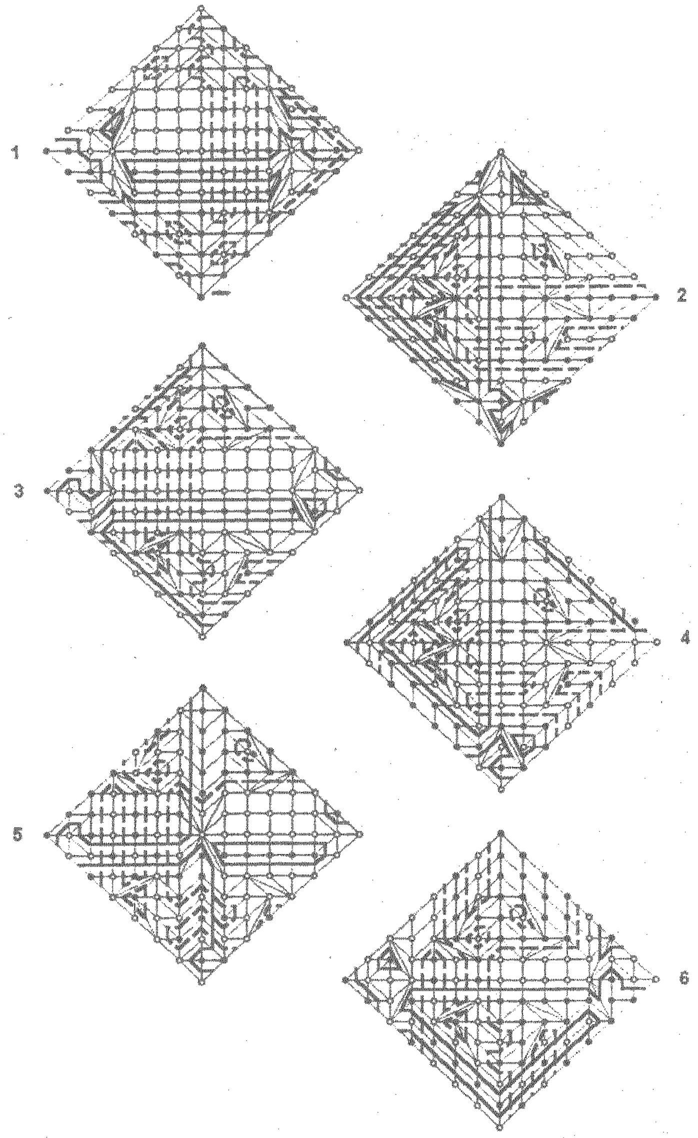


Рис. 5.

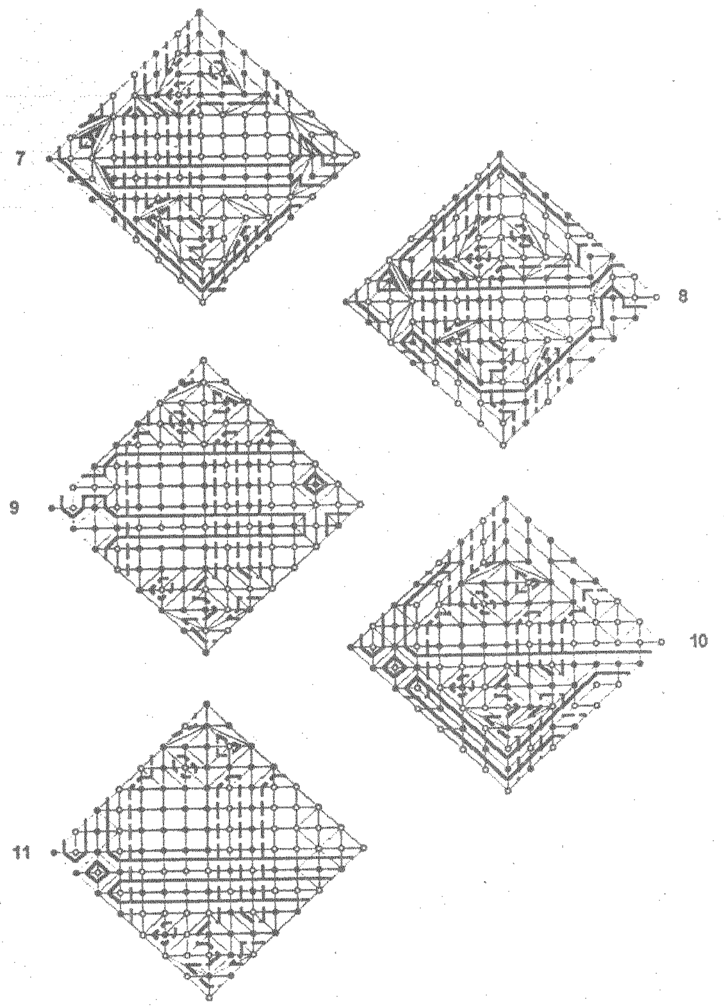
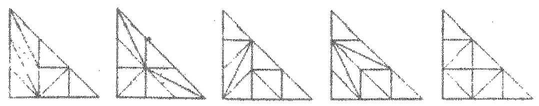


Рис. 6.

Наконец, таблица 2 показывает, как нужно составить пару (*начальные данные для* $n_1 = 3$, *начальные данные для* $n_2 = 4$) для

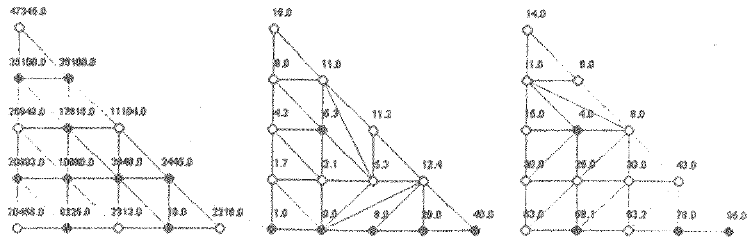
Таблица 2

N схемы на рис. 5–6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N варианта для τ_3 на рис. 7	1	2	3	3	3	3	4	3	5	5	5
N варианта (V^1, σ^1) из Табл. 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N варианта для (τ_4, V^2, σ^2) на рис. 8	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3



1 2 3 4 5

Рис. 7.



1 2 3

Рис. 8.

получения каждой из схем 1–11.

На рис. 9 показаны гладкие модели реализованных расположений.

Замечание. Можно, конечно, рассмотреть все $11 \times 3 = 33$ пары вида (*начальные данные для* $n_1 = 3$, *начальные данные для* $n_2 = 4$), однако при этом либо на этапе, описанном в п. 2.1, не удается построить функцию V с требуемыми свойствами, либо повторяются результаты, приведенные на рис. 9, либо получаются взаимные расположения M-кубики и M-квартики, построенные ранее Г. М. Полотовским более элементарным способом (из кривых степени 7, распадающихся на три сомножителя). С другой стороны, при чтении рукописи этой статьи С. Ю. Оревков нашел

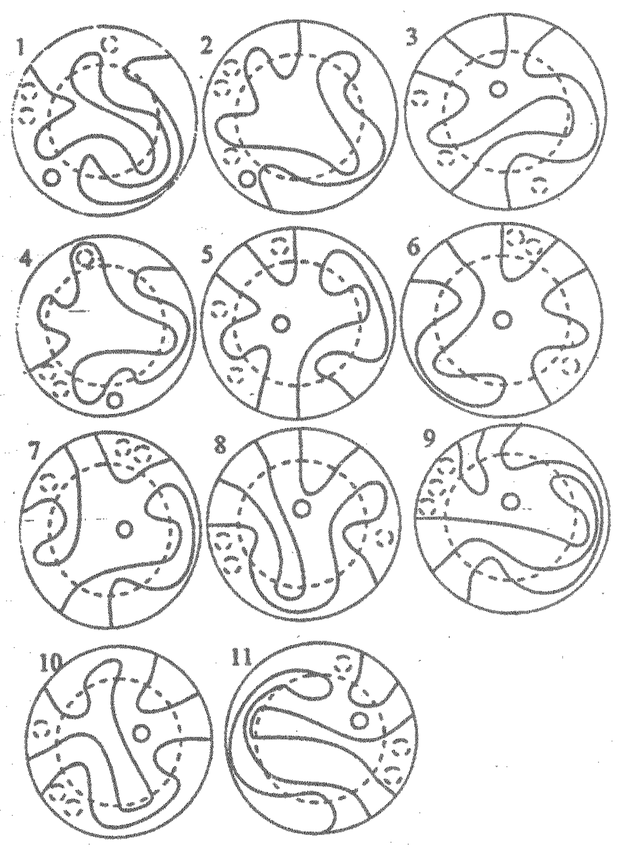


Рис. 9.

аналогичную элементарную реализацию схемы 2.

Литература

1. Д. А. Гудков, Г. А. Уткин, *Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Д. Гильберта).* Ученые зап., Вып. 87, Горьковский госуниверситет, Горький, 1969, с. 214.
2. Г. М. Полотовский, *Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка.* — ДАН СССР, **236:3** (1977), 548–551.
3. Г. М. Полотовский, $(M-1)$- *и* $(M-2)$*-распадающиеся кривые 6-го порядка.* — В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горьковский университет, Горький, 1978, с. 130–148.

4. Г. М. Полотовский, $(M-2)$*-кривые 8-го порядка: построения, открытые вопросы.* — Деп. в ВИНИТИ **1185–85** (1985), 1–194.
5. А. В. Корчагин, *О редукции особенностей и о классификации аффинных кривых степени* 6. — Деп. в ВИНИТИ **1107-Б86** (1986), 1–16.
6. А. Б. Корчагин, Е. И. Шустин, *Аффинные кривые степени* 6 *и устранения невырожденной шестикратной особой точки.* — Известия АН СССР, Серия Матем. **52:6** (1988), 1181–1199.
7. Е. И. Шустин, *К изотопической классификации аффинных* M*-кривых степени* 6. — В кн.: Методы качественной теории и теории бифуркаций. Горьковский университет, 1988, с. 97–105.
8. G. M. Polotovskii, *On the classification of decomposing plane algebraic curves.* — Lect. Notes in Math. **1524** (1992), 52–74.
9. S. Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves.* — Topology **38**, No. 4 (1999), 779–810.
10. С. Ю. Оревков, Г. М. Полотовский, *Проективные* M*-кубики и* M*-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов.* — Алгебра и анализ **11:5** (1999).
11. С. Ю. Оревков, *Проективные коники и* M*-квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов.* — Матем. заметки **65:4** (1999), 632–636.
12. С. Ю. Оревков, *Новая аффинная* M*-секстика.* — Функциональный анализ **32:2** (1998), 91–94.
13. С. Ю. Оревков, *Новая аффинная* M*-секстика. II.* — УМН **53:5** (1998), 243–244.
14. B. Sturmfels, *Viro's theorem for complete intersection.* — Analli della Scuola Normale Superiore di Pisa (1994), 377–386.
15. O. Viro, *Patchworking real algebraic varieties.* — U.U.D.M. Report, Uppsala Univ. **42** (1994).
16. I. Itenberg, O. Viro, *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture.* — Math. Intelligencer **18** no. 4 (1996), 19–28.

Gushchin M. A., Korobeinikov A. N., Polotovskii G. M. Construction of arrangements of a cubic and a quartic by patchworking.

B. Sturmfels modified Viro's patchworking method and applied it for construction of complete intersections. We use this modification for construction of decomposable curves. We realize 11 new arrangements of an M-cubic and an M-quartic with 12 common points lying on the odd branch of the cubic and on an oval of the quartic.

Нижегородский университет,
email polot@curve.unn.ac.ru;
email mike@pro.sci-nnov.ru

Поступило 1 ноября 1999 г.