Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

О. А. Иванов

О ФОРМЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕЗУЛЬТАТА СКЛЕИВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ – замкнутое ориентированное $4k$-мерное многообразие, являющееся объединением компактных многообразий M_1, …, M_n, попарные пересечения которых $X_{ij} = M_i \cap M_j$ являются объединениями нескольких компонент связности краев ∂M_i и ∂M_j соответствующих многообразий. Как описать форму индекса пересечения в целочисленных гомологиях многообразия M, если известны формы пересечений многообразий M_1, …, M_n? Подобные вопросы возникают, к примеру, в различных задачах алгебраической геометрии. Данный ниже ответ является естественным обобщением результата, полученного в [1, 2] для случая $n = 2$. Конечно, описанная выше ситуация может быть исследована при помощи метода, разработанного в [2], однако необходимые для этого вычисления достаточно громоздки, поэтому представляет интерес прямой ответ на поставленный вопрос. Заметим, что идея доказательства приводимого ниже результата более тесно связана с работой [1] (ср. [2, приложение]).

Пусть

$$L := H_{2k}(M)/\operatorname{Tors}, \quad L_i := H_{2k}(M_i)/\operatorname{Tors}, \quad i = 1, \dots, n,$$

– решетки индекса пересечения многообразий M и M_i, соответственно; формы индекса пересечения на этих решетках будем обозначать b и b_i. Предполагается, что формы b_i невырожденны. На группах $L_i^{\#} := \operatorname{Hom}(L_i, \mathbb{Z})$ имеются формы $\bar{b}_i$ со значениями в $\mathbb{Q}$; будем для простоты считать, что $L_i \subset L_i^{\#}$. Форма $\bar{b}_i$ индуцирует на факторгруппе $D_i := L_i^{\#}/L_i$ (дискриминантной группе решетки L_i) форму β_i со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, называемую *дискриминантной* формой.

Рассмотрим подгруппы

$$H_i := \partial(H_{2k}(M_i)) \ \text{ и } \ T_i := \partial(\operatorname{Tors} H_{2k}(M_i))$$

Работа частично поддержана грантом РФФИ, No. 98-01-00832.

группы $H_{2k-1}(\partial M_i)$, на которой имеется форма коэффициента зацепления η_i. Группы H_i и T_i являются ортогональными дополнениями друг друга относительно формы η_i, имеется изоморфизм $H_i/T_i \cong D_i$, и, более того, дискриминантная форма β_i решетки L_i многообразия M_i является ее фактором [1, 2].

Положим $X := \bigcup_{i=1}^n \partial M_i \subset M$ и пусть $G := \operatorname{Tors} H_{2k-1}(X)$; таким образом, можно считать, что $H_i \subset G$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\sigma\colon \bigoplus_i D_i \cong \bigoplus_i H_i/T_i \to \Big(\sum_i H_i\Big)\Big/\Big(\sum_i T_i\Big).$$

Лемма. *Группа $B = \operatorname{Ker}(\sigma)$ является лагранжевой подгруппой в $\bigoplus_i D_i$ (т.е. совпадает со своим ортогональным дополнением относительно прямой суммы дискриминантных форм).*

Теорема. *Решетка L индекса пересечения многообразия M совпадает с прообразом группы $B = \operatorname{Ker}(\sigma)$ при гомоморфизме $\bigoplus_i L_i^{\#} \to \bigoplus_i D_i$.*

Модельный пример. Пусть даны три ориентированных многообразия M_1, M_2, M_3 и заданы три гомеоморфизма

$$f_1\colon \partial M_1 \to X_3 \sqcup -X_2,\quad f_2\colon \partial M_2 \to X_1 \sqcup -X_3,\quad f_3\colon \partial M_3 \to X_2 \sqcup -X_1.$$

Пусть M – результат склеивания этих многообразий при помощи f_i, положим $G := \bigoplus_i \operatorname{Tors} H_{2k-1}(X_i)$, и пусть η – форма коэффициента зацепления на группе G. Если A – конечная группа, то положим $A^* = \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Поскольку формы β_i невырожденны, то имеется канонический изоморфизм $D_i^* \cong D_i$. Далее, $\sum_i T_i \subset \sum_i H_i \subset G$. Так как форма η также невырожденна, то группу $(\sum_i H_i/\sum_i T_i)^*$ отождествим с факторгруппой

$$\Big(\sum_i T_i\Big)^{\perp}\Big/\Big(\sum_i H_i\Big)^{\perp} \cong \bigcap_i T_i^{\perp}\Big/\bigcap_i H_i^{\perp}$$

(здесь ортогональные дополнения рассматриваются относительно формы η). Утверждение леммы следует из равенства $\operatorname{Im}\sigma^* = \operatorname{Ker}\sigma$ для образа сопряженного гомоморфизма $\sigma^*\colon \bigcap T_i^{\perp}/\bigcap H_i^{\perp} \to \bigoplus_i D_i$.

Литература

1. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Билинейные формы на конечных группах и формы пересечения многообразий.* — В кн.: Сб. науч. трудов "Геометрия и анализ". Кемерово, 1991, с. 3–8.
2. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Кобордизмы конечных квадратичных форм и склеивание ориентированных многообразий.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **208** (1993), 115–132.

Ivanov O. A. On the intersection form of a manifold glued from several manifolds.

The intersection form in the middle homology of a closed oriented $4k$-manifold glued from several compact oriented manifolds with boundary is described under the assumption that the intersection forms of all "parts" are nondegenerate and the boundaries are glued together along open-closed parts.

С.-Петербургский
государственный
университет
email oleg.ivanov@pobox.spbu.ru

Поступило 31 октября 1999 г.