Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

В. В. Макеев

О ГЕОМЕТРИИ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

Пространством Минковского в этой работе мы называем конечномерное вещественное нормированное пространство, которое мы будем представлять как пространство $\mathbb{R}^n$ с некоторой нормой $\|\cdot\|$.

§1. О многогранниках, вписанных в единичный шар пространства Минковского

Пусть $\|\cdot\|$ – некоторая норма на плоскости $\mathbb{R}^2$. Известно, что в единичный $\|\cdot\|$-круг K можно вписать аффинный образ правильного шестиугольника с вершиной в наперед заданной точке границы ∂K, а также аффинный образ некоторого правильного восьмиугольника [1].

Из результатов работы [2] (ср. [3]) легко следует, что если у трехмерного пространства Минковского нет двумерного подпространства, изометричного $L_1(\mathbb{R}^2)$, то в шар в этом пространстве можно вписать аффинный образ кубооктаэдра с вершиной в любой наперед заданной точке границы шара. (*Кубооктаэдром* называется выпуклая оболочка середин ребер куба.)

В [4] доказано, что если в $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой задана некоторая норма $\|\cdot\|$ с единичным шаром K, то на его границе ∂K лежат середины ребер некоторого прямоугольного параллелепипеда, или же некоторое центральное сечение шара K является прямоугольником.

Полным ориентированным флагом в $\mathbb{R}^n$ назовем набор вложенных ориентированных подпространств возрастающей размерности $O \in L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = \mathbb{R}^n$, где ориентация последнего пространства фиксирована (через O мы обозначаем начало координат). Множество всех флагов обозначим через $\mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n)$.

Работа частично поддержана РФФИ, грант поддержки научных школ, No. 00-15-96024.

Теорема 1. *Пусть M – выпуклый центрально-симметричный (n^2+n)-вершинник, вписанный в единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, причем S^{n-1} – единственная квадрика, содержащая его вершины, и пусть открытые опорные конусы его вершин после сдвига всех вершин в точку $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ покрывают дополнение $\mathbb{R}^n \setminus O$. Пусть L_1, $L_2 \in \mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n)$ – произвольные флаги и $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^n$. Тогда найдется линейное преобразование $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что многогранник $a(M)$ вписан в единичный $\|\cdot\|$-шар и $a(L_1) = L_2$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда единичный $\|\cdot\|$-шар K имеет гладкую границу ∂K. В остальных случаях теорема получается простым предельным переходом.

Рассмотрим многообразие

$$G := \{(g(A_1), \dots, g(A_{(n^2+n)/2})) \mid g \in GL^+(n)\} \subset (\mathbb{R}^n)^{(n^2+n)/2},$$

где вершины A_1, A_2, ..., $A_{(n^2+n)/2}$ выбраны по одной из каждой пары симметричных, а $GL^+(n)$ – группа сохраняющих ориентацию линейных изоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$.

Положим

$$GK := \{g \in GL^+(n) \mid (g(A_1), \dots, g(A_{(n^2+n)/2})) \in (\partial K)^{(n^2+n)/2}\}.$$

Мы должны доказать, что $\{g(L_1) \mid g \in GK\} = \mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n)$. Мы докажем это для открытого и всюду плотного в C^1-топологии множества центрально-симметричных выпуклых компактов K. В остальных случаях доказательство получается предельным переходом.

Для открытого и всюду плотного в C^1-топологии множества "шаров" K многообразия G и $(\partial K)^{(n^2+n)/2}$ пересекаются трансверсально, поэтому GK пусто или является гладким компактным подмногообразием в $GL^+(n)$ размерности $(n^2-n)/2$. Компактность множества GK следует из условия на открытые опорные конусы вершин многогранника M. Этим условием гарантируется существование такой постоянной $c > 0$, что объем $\mathrm{Vol}(M) \geqslant c\,\mathrm{Vol}(K)$ для произвольного выпуклого компакта K, описанного вокруг M (см. [5]).

Покажем, что в случае, когда G и $(\partial K)^{(n^2+n)/2}$ трансверсальны, отображение

$$F\colon GK \to \mathrm{Flag}(\mathbb{R}^n), \quad g \mapsto g(L_1),$$

имеет степень 1. Так как граница ∂K определена с точностью до регулярной гомотопии, то многообразие GK определено с точностью до внутреннего кобордизма в $GL^{+}(n)$ и соответственно однозначно определен класс сингулярного бордизма отображения F.

Рассмотрим случай, когда K – стандартный евклидов шар, а вершины многогранника M лежат на его границе. В этом случае трансверсальность пересечения многообразий G и $(\partial K)^{(n^2+n)/2}$ следует из того, что по условию ∂K – единственная поверхность второго порядка, содержащая вершины многогранника M. Очевидно, что в этом случае $GK = SO(n)$ и F – гомеоморфизм. $\square$

Замечания. 0. Разумеется, в формулировке теоремы 1 сферу S^{n-1} можно заменить произвольным эллипсоидом с центром в O.

1. При $n = 2$ условиям теоремы 1 удовлетворяют вершины любого центрально-симметричного выпуклого шестиугольника, и мы получаем обобщение результата работы [1].

2. При $n = 3$ условиям теоремы 1 удовлетворяют, например, вершины правильного икосаэдра и, следовательно, все достаточно близкие к ним центрально-симметричные наборы точек. Кубооктаэдр не удовлетворяет условию теоремы 1, так как не выполняется условие на открытые конусы вершин, но он может быть рассмотрен как ее предельный случай.

3. Вероятно, при $n > 3$ теорема 1 ничего не дает, поскольку отсутствуют наборы точек, удовлетворяющие ее условию.

4. Флаги L_1 и L_2 в формулировке теоремы 1 – показатель свободы, с которой многогранник M может быть аффинно вписан в единичный $\|\cdot\|$-шар.

5. Пусть, в условиях теоремы 1, M' – многогранник, ограниченный касательными гиперплоскостями к сфере S^{n-1} в вершинах многогранника M. Тогда при некотором аффинном преобразовании a пространства $\mathbb{R}^n$ многогранник $a(M')$ описан вокруг единичного $\|\cdot\|$-шара и $a(L_1) = L_2$. Для доказательства нужно провести полярное преобразование относительно евклидова единичного шара в $\mathbb{R}^n$ и применить теорему 1. Например, в $\mathbb{R}^3$ таким многогранником является правильный додекаэдр или любой достаточно близкий к нему центрально-симметричный 12-гранник.

§2. О диаметре множества плоскостей Минковского относительно метрики Банаха–Мазура

Пусть E_1 и E_2 – два пространства Минковского одинаковой размерности. *Расстоянием Банаха–Мазура* между ними называется число

$$d(E_1, E_2) = \inf_A \{\ln(\|A\| \cdot \|A^{-1}\|)\},$$

где инфимум берется по всем линейным изоморфизмам $A : E_1 \to E_2$. Использование вписанных аффинно-правильных восьмиугольников позволяет оценивать диаметр множества плоскостей Минковского относительно метрики Банаха–Мазура. Автору не известно, является ли полученная оценка наилучшей из известных.

Теорема 2. *Диаметр множества плоскостей Минковского относительно метрики Банаха–Мазура не превосходит* $\ln(6 - 3\sqrt{2})$.

Доказательство. Сначала переформулируем это утверждение в более удобной для нас форме. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы две нормы и K_1 и K_2 – их единичные круги. Тогда найдутся линейный изоморфизм a плоскости $\mathbb{R}^2$ и постоянные $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha \cdot a(K_1) \subset K_2 \subset \beta \cdot a(K_1) \quad \text{и} \quad \beta/\alpha \leqslant 6 - 3\sqrt{2}.$$

Здесь $\alpha \cdot a(K_1)$ и $\beta \cdot a(K_1)$ обозначает гомотетичные образы фигуры $a(K_1)$ с коэффициентами α и β.

Мы воспользуемся утверждением о том, что во всякую центрально-симметричную плоскую выпуклую фигуру можно вписать аффинный образ правильного восьмиугольника [1].

В дальнейшем мы считаем, что "круги" K_1 и K_2 описаны вокруг одного и того же правильного восьмиугольника T. В таком случае K_1 и K_2 содержатся в фигуре T', полученной добавлением к T восьми равных равнобедренных прямоугольных треугольников, ограниченных продолжениями сторон восьмиугольника T (рис. 1). Обозначим эти треугольники в направлении по часовой стрелке через $T_1, \ldots, T_4, T_1', \ldots, T_4'$. В дальнейшем через αT_i ($\alpha T_i'$) будем обозначать образ треугольника T_i (T_i') при гомотетии с коэффициентом α и центром в вершине прямого угла этого треугольника (рис. 2).

Любая проходящая через вершину треугольника T опорная прямая "круга" K_i пересекает внутренность не более чем одного из треугольников $(\sqrt{2} - 1)T_1, \ldots, (\sqrt{2} - 1)T_4'$. Следовательно,

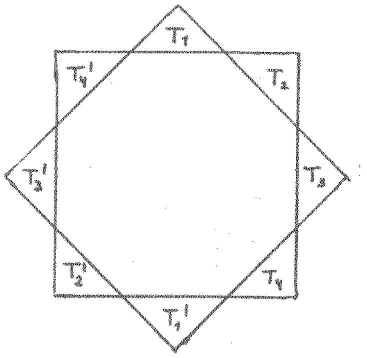

Рис. 1.

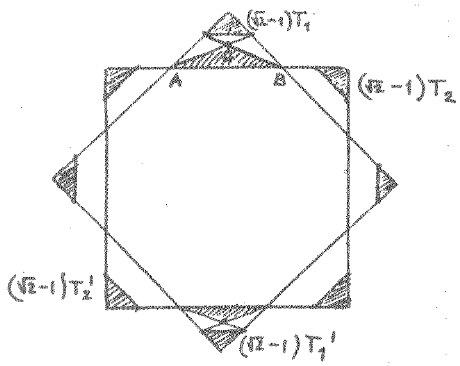

Рис. 2.

каждый из "кругов" K_1 и K_2 пересекает внутренности не более чем двух пар треугольников $(\sqrt{2}-1)T_i$ и $(\sqrt{2}-1)T_i'$, причем эти пары треугольников не являются соседними.

Значит, после надлежащей перенумерации треугольников, K_i либо пересекает только внутренности треугольников $(\sqrt{2}-1)T_1$, $(\sqrt{2}-1)T_3$, $(\sqrt{2}-1)T_1'$ и $(\sqrt{2}-1)T_3'$, либо пересекает лишь внутренность треугольников $(\sqrt{2}-1)T_1$ и $(\sqrt{2}-1)T_1'$, или вовсе не пересекает внутренностей таких треугольников.

Таким образом, после надлежащей перенумерации "кругов" K_1 и K_2 и поворота можно считать, что K_2 пересекает разве лишь те из треугольников $(\sqrt{2}-1)T_i^{(\prime)}$, которые пересекает и K_1. Покажем, что в этом случае $K_2 \subset (3\sqrt{2}-3)K_1$, а поскольку, очевидно, $K_1 \subset T' \subset \sqrt{2}\,T \subset \sqrt{2}\,K_2$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2}}K_1 \subset K_2 \subset (3\sqrt{2}-3)K_1,$$

откуда и следует утверждение теоремы 2.

По выбору коэффициента гомотетии $(3\sqrt{2}-3)$ многоугольник $(3\sqrt{2}-3)T$ покрывает всю фигуру T' за исключением треугольников $(\sqrt{2}-1)T_1, \dots, (\sqrt{2}-1)T_4'$. Пусть например, K_2 пересекает треугольник $(\sqrt{2}-1)T_1$. Тогда K_1 также пересекает треугольник $(\sqrt{2}-1)T_1$ и, очевидно, содержит заштрихованный на рис. 2 треугольник ABC, ограниченный стороной AB восьмиугольника T и двумя прямыми, соединяющими указанные на рисунке вершины треугольников T_1 и $(\sqrt{2}-1)T_1$. Как показывают простые вычисления, фигура $(3\sqrt{2}-3)(T \cup ABC)$ покрывает треугольник T_1. Теорема 2 доказана. $\square$

Литература

1. B. Grünbaum, *Affineregular polygons inscribed in plane convex sets.* — Riveon Lematematika **13** (1959), 20–24.
2. C. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces.* — Proc. Am. Math. Soc. **27** (1971), 369–374.
3. V. V. Makeev, *Application of topology to some problems in combinatorial geometry.* — Am. Math. Soc. Transl. (2) **174** (1996), 223–228.
4. В. В. Макеев, *Трехмерные многогранники, вписанные и описанные вокруг выпуклых компактов.* — Алгебра и анализ **12**, № 5 (2000), 3–14.
5. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 286–298.

Makeev V. V. On the geometry of two- and three-dimensional Minkowski spaces.

A class of centrally-symmetric convex 12-topes (12-hedrons) in $\mathbb{R}^3$ is described, such that for an arbitrary prescribed norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^3$ each polyhedron in the class can be inscribed in (circumscribed about) the $\|\cdot\|$-ball via an affine transformation, and this can be done with large degree of freedom. It is also proved that the Banach–Mazur distance between any two two-dimensional real normed spaces does not exceed $\ln(6-3\sqrt{2})$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 31 октября 1999 г.