Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

В. В. Макеев

ОДНО ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА РЕЛЛО

Диаметром ограниченного множества на плоскости называется отрезок, соединяющий две максимально удаленные точки этого множества. Под *выпуклой фигурой* во всем дальнейшем мы понимаем компактное выпуклое подмножество плоскости с непустой внутренностью.

Треугольником Релло называется пересечение трех кругов на плоскости, центры которых расположены в вершинах некоторого правильного треугольника, а радиусы равны стороне этого треугольника. Хорошо известно, что треугольник Релло – фигура постоянной ширины (т.е. имеет одинаковую ширину во всех направлениях). Известно также, что среди выпуклых кривых заданной постоянной ширины треугольник Релло имеет минимальную площадь [1, задача 89].

Теорема. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – плоская фигура постоянной ширины* 1 *с кусочно C^2-гладкой границей.*

(1) *Площадь множества тех точек, через которые проходит $\geqslant 3$ диаметров фигуры K, не превосходит $\sqrt{3}/4$.*

(2) *Площадь множества тех точек, через которые проходит только один диаметр фигуры K, – не менее $(2\pi - 3\sqrt{3})/4$.*

(3) *Равенства в п.* (1) *и* (2) *достигаются только в том случае, когда K – треугольник Релло.*

Доказательство. (1) Как обычно, обозначим через $\mathbb{R}P^1$ множество прямых, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^2$, и рассмотрим каноническое линейное расслоение над $\mathbb{R}P^1$, у которого слоем над прямой $l \subset \mathbb{R}^2$ является она же, рассматриваемая как одномерное векторное пространство. Обозначим через E объединение единичных, симметричных относительно точки O отрезков

Работа частично поддержана РФФИ, грант поддержки научных школ, No. 00-15-96024.

прямых в тотальном пространстве вышеописанного расслоения. Очевидно, E – стандартный лист Мебиуса.

Для всякой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$ постоянной ширины 1 определено непрерывное отображение $f\colon E \to K$, при котором всякий единичный отрезок из E посредством сдвига отождествляется с параллельным ему диаметром фигуры K. По построению f переводит край ∂E в границу ∂K фигуры K, и, следовательно, индуцирует отображение пар $f\colon (E, \partial E) \to (K, \partial K)$, которое имеет степень один modulo 2. Если граница ∂K – гладкая, то сужение $f| : \partial E \to \partial K$ – гомеоморфизм, поэтому его степень единица, а значит, и степень отображения $f\colon (E, \partial E) \to (K, \partial K)$ также есть единица по модулю 2.

Заметим также, что рассматриваемое отображение $f\colon E \to K$ почти всюду непрерывно дифференцируемо в силу кусочной C^2-гладкости границы ∂K. Точки фигуры K, имеющие четное число прообразов при отображении f, т.е. точки, через которые проходит четное число диаметров фигуры K, являются критическими значения отображения f и по лемме Сарда имеют меру нуль.

Обозначим через $S_i(K)$ площадь множества точек, через которые проходит i диаметров K. Мы доказали, что

$$S_2(K) = S_4(K) = \cdots = S_\infty(K) = 0.$$

Следовательно,

$$S_1(K) + S_3(K) + S_5(K) + \cdots = S(K)$$

– площадь фигуры K.

Близкие диаметры фигуры K, составляющие между собой малый угол $\Delta\phi$, пересекаются вблизи соответствующего центра кривизны границы. Поэтому, поворачиваясь на угол $\Delta\phi$, диаметр фигуры K заметает площадь $\approx \frac{R^2(\phi)+(1-R(\phi))^2}{2}\Delta\phi$, где $R(\phi)$ – радиус кривизны границы ∂K в соответствующей точке. Следовательно,

$$S_1(K) + 3S_3(K) + 5S_5(K) + \cdots = \int_0^\pi \frac{R^2(\phi) + (1 - R(\phi))^2}{2}\, d\phi. \qquad (1)$$

Поскольку значения подынтегральной функции лежат между 1/4 и 1/2, то получаем неравенства

$$\frac{\pi}{4} \leqslant S_1(K) + 3S_3(K) + 5S_5(K) + \cdots \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad (2)$$

откуда

$$2S_3(K)+4S_5(K)+\dots \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant -S_1(K)-S_3(K)-S_5(K)-\dots,$$

и поэтому

$$2(S_3(K)+S_5(K)+\dots) \leqslant \frac{\pi}{2}-S(K).$$

Так как среди всех фигур постоянной ширины 1 минимальную возможную площадь, равную $\pi/2-\sqrt{3}/2$, имеет треугольник Релло, то получаем неравенство

$$2(S_3(K)+S_5(K)+\dots) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

что и требовалось.

(2) Для доказательства второго неравенства теоремы заметим, что

$$\begin{aligned} S_1(K) &= S(K)-(S_3(K)+S_5(K)+\dots) \\ &\geqslant \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{4}. \qquad \square \end{aligned}$$

Замечания. 1. Очевидно, что левая часть неравенства (2) обращается в равенство лишь для тех фигур постоянной ширины, каждый диаметр которых выходит из угловой точки фигуры.

2. По аналогии с треугольником Релло фигуру постоянной ширины можно построить вокруг любого правильного n-угольника M с нечетным n. Пусть максимальная диагональ в M равна 1 и пусть K – пересечение единичных кругов с центрами в вершинах многоугольника M. Тогда K – фигура постоянной ширины 1. Пусть $K_1 \subset K$ – правильный n-угольник, ограниченный большими диагоналями n-угольника M. Очевидно, что через каждую его внутреннюю точку проходит ровно n диаметров фигуры K. Можно предположить, что $S(K_1)$ – максимально возможная площадь множества точек, через которые проходит n ($\geqslant n$) диаметров фигуры постоянной ширины 1.

3. Вращая треугольник Релло вокруг его оси симметрии, получаем тело K постоянной ширины 1. Множество точек, через которые проходит ровно три диаметра тела K, представляет собой внутренность прямого кругового конуса за вычетом его оси. Этот

конус получается вращением единичного правильного треугольника вокруг его оси симметрии и имеет объем $\sqrt{3}\pi/24$. Верно ли, что это – максимально возможный объем множества точек, через которые проходит три ($\geqslant 3$) диаметра тела постоянной ширины 1 с кусочно C^2-гладкой границей?

4. Доказательство того факта, что множество точек, через которые проходит четное число диаметров тела постоянной ширины, имеет меру нуль, без изменения переносится на все размерности.

Литература

1. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*. М., Гостехиздат, 1951.

Makeev V. V. An extremal property of the Rellot triangle.

Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a planar set of unit constant width with piecewise C^2-smooth boundary. Then the area of the set of the points belonging to $\geqslant 3$ diameters of K is $\leqslant \sqrt{3}/4$, and the area of the set of the points belonging to a unique diameter of K is $\geqslant (2\pi - 3\sqrt{3})/4$. In both cases, an equality is attained only if K is the Rellot triangle.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 31 декабря 1999 г.