Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

А. Ю. Маковецкий

ОРИЕНТАЦИИ СПАЙНОВ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ ШАРОВ

§1. Введение

Специальные спайны дают один из наиболее известных способов задания трехмерных многообразий. Теория специальных спайнов разработана в работах Каслера [1] и Матвеева [2]. В классе специальных спайнов существует отношение (M, L)-эквивалентности, состоящее в следующем: два специальных спайна (M, L)-эквивалентны, если от одного из них можно перейти ко второму посредством применения преобразований $M^{\pm 1}$, $L^{\pm 1}$.

В работе [3] доказана теорема о существовании для любых двух специальных спайнов P и Q одного и того же трехмерного многообразия такого специального спайна S того же многообразия, что от P к S и от Q к S можно перейти только с помощью преобразований M^{+1} и L^{+1}, оставаясь все время в классе специальных спайнов данного многообразия.

В данной работе рассматриваются специальные спайны трехмерных многообразий с дополнительной структурой – ориентацией спайна. Основной вопрос, который мы ставим, состоит в следующем: что представляет собой семейство преобразований, позволяющих перейти от одного спайна данного многообразия с некоторой ориентацией к другому спайну того же многообразия с некоторой ориентацией. Результаты, частично отвечающие на этот вопрос, приведены ниже.

Автор благодарен своему научному руководителю С. В. Матвееву за помощь в работе над статьей.

§2. Ориентация спайнов и преобразования спайнов

Определение 1. *Компактный полиэдр P называется специальным полиэдром, если выполняются следующие условия:*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 99-01-00813, и фонда INTAS, грант No. 97-0808.

1) *линк каждой его точки гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:* a) *окружности;* b) *окружности с диаметром;* c) *окружности с тремя радиусами;*

2) *в P есть хотя бы одна точка с линком типа* c)*;*

3) *любая 2-компонента (т.е. компонента связности подмножества точек полиэдра с линком типа* a)*) полиэдра P гомеоморфна открытой двумерной клетке.*

Определение 2. *Специальный полиэдр P, вкладываемый в трехмерное многообразие M с краем, называется специальным спайном этого многообразия, если M коллапсируется на полиэдр P, т.е. многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно прямому произведению $\partial M \times (0, 1]$.*

Пусть P_1 – специальный полиэдр. Выберем в нем ребро e. Рассмотрим регулярную окрестность E_1 ребра e в P_1, см. рис. 1. Пересечение окрестности E_1 с остальной частью полиэдра P_1 гомеоморфно объединению двух окружностей, соединенных тремя дугами. Рассмотрим полиэдр E_2, который представляет собой поверхность треугольной призмы вместе со средним треугольником и тремя прямоугольниками, присоединенными к поверхности призмы вдоль ее боковых ребер.

Естественная граница полиэдра E_2 гомеоморфна границе полиэдра E_1. Если мы заменим окрестность E_1 на окрестность E_2, то получим новый специальный полиэдр P_2.

Замена полиэдра P_1 на полиэдр P_2 обозначается через M, обратная замена – через M^{-1}.

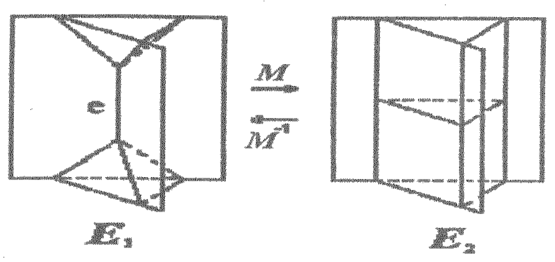

Рис. 1.

Аналогичным образом описываются преобразования L и L^{-1}, состоящие в замене подполиэдра E_3 на подполиэдр E_4 и наоборот, см. рис. 2.

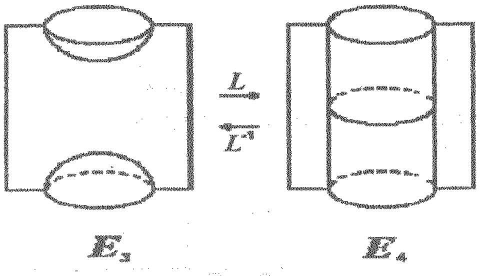

Рис. 2.

Соглашение. Преобразования M и L будем называть *увеличивающими*, преобразования M^{-1} и L^{-1} – *уменьшающими*.

Определение 3. *Пусть e – ребро спайна. Рассмотрим регулярную окрестность этого ребра в спайне. Части клеток, инцидентных данному ребру, попадающие в его окрестность, будем называть крыльями.*

Пусть v – вершина спайна. Рассмотрим регулярную окрестность этой вершины в графе спайна. Части ребер, инцидентных данной вершине и попадающие в окрестность, будем называть иглами.

Определение 4. *Специальный спайн P называется ориентируемым, если каждую его 2-компоненту P можно ориентировать так, что на любом ребре спайна P ориентации двух инцидентных с данным ребром крыльев индуцируют на ребре ориентацию, противоположную ориентации, которую индуцирует на этом ребре третье крыло.*

Заметим, что ориентация спайна в указанном выше смысле никак не связана с ориентируемостью трехмерного многообразия, задаваемого спайном. Отметим также, что любое трехмерное многообразие имеет ориентируемый специальный спайн. Известно также и более сильное утверждение о возможности перехода от любого неориентируемого спайна к ориентируемому с помощью последовательности увеличивающих преобразований M, см. [4].

Теорема 1. *Пусть P – ориентируемый спайн и S – спайн, полученный применением одного преобразования M к спайну P. Тогда спайн S также является ориентируемым.*

Доказательство. Рассмотрим в спайне P окрестность ребра E, вдоль которого осуществляется преобразование M. Эта окрестность представляет собой подполиэдр E_1, изображенный на рис. 1. Ориентация 2-компонент спайна индуцирует на ребре E две одинаковых ориентации и третью – им противоположную. Будем считать, что ориентация ребра E выбирается в соответствии с двумя одинаковыми индуцированными ориентациями.

Достаточно рассматривать только такие ориентации крыльев в подполиэдре E_1, при которых ребро E ориентировано сверху вниз, так как случаи с противоположной ориентацией ребра E будут симметричны рассмотренным относительно плоскости, перпендикулярной ребру E и проходящей через его середину. Достаточно также рассматривать единственную ориентацию крыльев подполиэдра E_1, инцидентных ребру E, так как случаи двух других возможных ориентаций получаются из выбранного случая с помощью поворотов подполиэдра E_1 относительно ребра E.

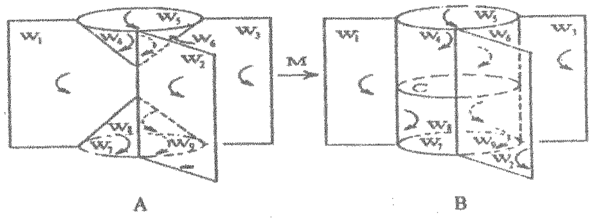

Рис. 3.

При симметрии подполиэдра E_1 относительно плоскости крыла W_4, см. рис. 3 А, ориентации крыльев W_4, W_5, W_6 не меняются, а ориентация крыла W_6 меняется. Поэтому ориентацию крыла W_6 будем считать фиксированной так, как показано на рис. 3 А.

При этом ориентация крыла W_4 определяется однозначно, а ориентация крыла W_5 может быть любой из двух возможных.

При выборе на крыле W_7 одной из двух возможных ориентаций, выбор ориентации на крыльях W_8 и W_9 однозначен; при выборе другой ориентации крыла W_7 одной ориентации крыла W_9 соответствуют две возможности на крыле W_8, другой ориентации крыла W_9 соответствует единственная возможность на крыле W_8.

Таким образом, получаем две возможности для выбора ориентаций тройки крыльев W_4,W_5, W_6 и четыре возможности для выбора ориентаций тройки крыльев W_7, W_8, W_9, всего 8 возможностей для выбора ориентации подполиэдра E_1.

В каждом случае при замене подполиэдра E_1 подполиэдром E_2 оказывается возможным, сохраняя ориентацию на “старых” крыльях W_1–W_9 подполиэдра E_2, так выбрать ориентацию “новой” 2-компоненты C, чтобы спайн S был ориентированным. На рис. 3 рассмотрена одна из 8 возможностей (2-компонента C на рисунке 3 Б может быть ориентированна произвольно). Остальные рассматриваются аналогично. □

Теорема 2. *Пусть P – ориентируемый спайн и S – спайн, полученный применением одного преобразования L к спайну P. Тогда спайн S также является ориентируемым.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. □

Таким образом, увеличивающие преобразования M и L сохраняют свойство спайна быть ориентированным. Для уменьшающих преобразований это неверно. Пример приведен на рис. 4.

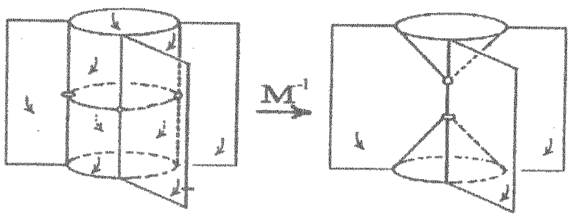

Рис. 4.

Пусть специальные спайны одного многообразия P и S ориентированы. Обозначим через (P, O_1) спайн P с ориентацией O_1, через (S, O_2) – спайн S с ориентацией O_2. В работе [3] доказано, что для двух специальных спайнов данного трехмерного многообразия существует третий спайн того же многообразия такой, что от первого спайна к третьему и от второго к третьему можно перейти с помощью увеличивающих преобразований M^{+1} и L^{+1}, оставаясь все время в классе спайнов данного многообразия. С учетом этого и теоремы 1 получаем следующее. Существует такой спайн Q того же многообразия, что от спайнов P и S можно перейти к Q с помощью только увеличивающих преобразований M и L. В силу того, что перенос ориентации при применении увеличивающего преобразования осуществляется не всегда однозначно, получаем что переход от P к Q индуцирует переход от пары (P, O_1) к набору пар $(Q, O_1^{'})$, $(Q, O_1^{''})$, $\dots$. Аналогично для пары (S, O_2) получаем набор пар $(Q, O_2^{'})$, $(Q, O_2^{''})$ $\dots$.

Таким образом задача описания семейства преобразований, позволяющих перейти от пары (P, O_1) к паре (S, O_2), сводится к задаче описания преобразований, позволяющих перейти от спайна с некоторой ориентацией к тому же самому спайну с другой ориентацией.

В §3 эта задача решается для спайнов трехмерных гомологических шаров.

§3. Ориентированные спайны трехмерных гомологических шаров

Рассмотрим ориентированный особый граф некоторого спайна гомологического шара. Будем называть ориентацию особого графа спайна *правильной*, если в любой вершине две иглы из четырех входят в вершину, а две – выходят.

В работе [5] доказано, что любой спайн гомологического шара является ориентируемым, причем ориентация спайна однозначно задается правильной ориентацией его особого графа.

Выберем в графе спайна с правильной ориентаций простой цикл. Поменяем его ориентацию на противоположную. Обозначим это преобразование через T_h.

Будем называть граф *n-валентным*, если каждая его вершина инцидентна n иглам.

Теорема 3. *Обозначим через (Q, O_1) спайн гомологической сферы с ориентацией O_1, через (Q, O_2) – тот же спайн с ориентацией O_2. От пары (Q, O_1) к паре (Q, O_2) можно перейти с помощью последовательности преобразований типа T_h.*

Доказательство. Ориентациям O_1 и O_2 соответствуют две правильные ориентации особого графа спайна. Ребра графа, имеющие разную ориентацию в двух этих случаях, образуют подграф

G. Вершины подграфа G не могут иметь валентность 1 и 3, поскольку в этом случае нарушится условие правильной ориентации графа спайна. Таким образом, граф G имеет только вершины валентности 2 и 4. Следовательно, G содержит цикл, поэтому G содержит и простой цикл. Сменив ориентацию на простом цикле, получим, что ребра графа спайна, имеющие разную ориентацию при ориентациях спайна O_1 и O_2, образуют подграф G', имеющий меньшее число ребер, чем G. Индукцией по числу ребер подграфа G получаем утверждение теоремы. $\square$

Литература

1. B. G. Casler, *An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary.* — Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 559–566.
2. С. В. Матвеев, *Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана.* — Изв. АН СССР **151**, No. 5 (1987), 1104–1115.
3. А. Ю. Маковецкий, *О преобразованиях специальных спайнов и специальных полиэдров.* — Мат. заметки **65**, № 3 (1999), 354–361.
4. R. Benedetti, C. Petronio, *Branched standard spines of 3-manifolds.* — Lecture Notes Math. **1653** (1997).
5. D. Gillman, D. Rolfsen, *The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincare conjecture.* — Topology **22** (1983), 315–323.
6. D. Gillman, D. Rolfsen, *Three-manifolds embeded in small 3-complexes.* — Int. J. Math. **3** (1991), 179–183.

Makovetskii A. Yu. Orientations of spines of homology balls.

Oriented special spines of 3-manifolds are studied. (Orientation is an additional structure on the spine, and each 3-manifold possesses a special spine with such a structure.) The moves $M^{\pm 1}$ and $L^{\pm 1}$ of special spines, which do not change the manifold, are well known. We prove that M^{+1} and L^{+1} preserve orientability of a spine, while M^{-1} and L^{-1} do not. For spines of homology balls, a class of moves is described which allow one to pass from a given orientation of a spine to any other orientation of the spine.

Челябинский
государственный
университет
email mac@cgu.chel.su

Поступило 29 октября 1999 г.