Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов

ПОСТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА T-ИНВАРИАНТА

§1. Ложные поверхности и специальные спайны

Двумерный полиэдр F называется *ложной поверхностью*, если линк каждой его точки гомеоморфен окружности, окружности с двумя радиусами или окружности с тремя радиусами. Такие полиэдры естественным образом появляются в теории минимальных поверхностей. Указанные особенности являются устойчивыми, так как они сохраняются при небольших деформациях полиэдра. Особые точки третьего типа называются *вершинами* ложной поверхности F. Объединение особых точек второго и третьего типов называется *особым графом* поверхности F и обозначается SF. Связные компоненты объединения точек первого типа (неособых точек) называются 2-*компонентами* поверхности F. Понятие ложной поверхности было введено в работе [3].

Ложная поверхность P называется *специальным полиэдром*, если она имеет хотя бы одну вершину и все ее 2-компоненты являются 2-клетками. Отметим, что для каждого числа k имеется только конечное число различных специальных полиэдров с k вершинами.

Напомним основные понятия теории специальных спайнов. Подполиэдр P компактного трехмерного многообразия M с непустым краем называется его *спайном*, если многообразие $M - P$ гомеоморфно $\partial M \times (0,1]$. Спайн трехмерного многообразия *специален*, если он является специальным полиэдром. Известно, что любое компактное трехмерное многообразие имеет специальный спайн, и что по своему специальному спайну оно восстанавливается однозначно [2, 6]. При этом под спайном замкнутого трехмерного многообразия M понимается спайн многообразия $M - \operatorname{Int} V$, где V – шар в M.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 99-01-00813, и INTAS, проект 97-808.

§2. Преобразование T

Разумеется, одно и то же многообразие может иметь много различных специальных спайнов. Оказывается, существует систематический способ их описания. Более точно, любые два специальных спайна одного и того же многообразия можно соединить цепочкой преобразований стандартного типа.

Пусть P_1 – специальный полиэдр. Выберем его ребро e, имеющее различные вершины. Вырежем из P_1 замкнутую регулярную окрестность E_1 ребра e. Пересечение этой окрестности с оставшейся частью полиэдра P_1 гомеоморфно двум окружностям с тремя соединяющими их отрезками. Рассмотрим полиэдр E_2, который состоит из боковой поверхности треугольной призмы, среднего треугольника и трех полос, приклеенных к призме по трем ее боковым ребрам. Естественные края полиэдров E_1 и E_2 гомеоморфны. Вклеив полиэдр E_2 вместо полиэдра E_1, мы получим новый специальный полиэдр P_2.

Определение. *Переход от полиэдра P_1 к полиэдру P_2 называется элементарным преобразованием и обозначается через T (см. рис. 1).*

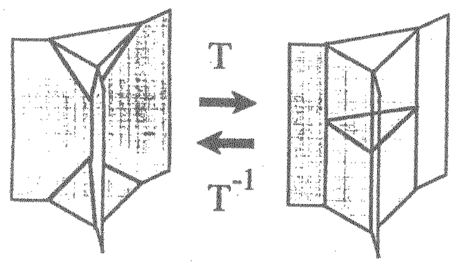

Рис. 1. Преобразование T.

Следующая теорема является основным результатом работ [5, 8].

Теорема 1. *Два специальных полиэдра P_1, P_2 с более, чем одной вершиной каждый являются специальными спайнами гомеоморфных трехмерных многообразий тогда и только тогда, когда существует последовательность преобразований $T^{\pm 1}$, переводящая P_1 в P_2.*

Идея построения нового инварианта трехмерных многообразий состоит в следующем. Допустим, что мы сопоставили каждому специальному полиэдру некоторое число так, что оно не меняется при элементарных преобразованиях. Тогда, в силу теоремы 1, число, сопоставленное какому-нибудь специальному спайну многообразия M, является корректно определенным инвариантом самого многообразия M.

§3. Определение t-инварианта

Пусть P – некоторая ложная поверхность. Обозначим через $\mathcal{F}(P)$ множество всех содержащихся в ней ложных поверхностей, включая пустое множество и всю P.

Лемма 1. *Множество $\mathcal{F}(P)$ конечно.*

Доказательство. Легко видеть, что если ложная поверхность $F \subset P$ пересекает какую-нибудь 2-компоненту α полиэдра P, то $\alpha \subset F$. Поэтому для описания ложной поверхности F достаточно указать, какие 2-компоненты она содержит, а какие – нет. Таким образом, общее число ложных поверхностей в P не превосходит 2^n, где n – число 2-компонент полиэдра P. □

Сопоставим каждой ложной поверхности F ее *вес* $w(F) = (-1)^v$ $\varepsilon^{\chi - v}$, где v – число ее вершин, χ – эйлерова характеристика, а ε – решение уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Можно брать как $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$, так и $\varepsilon = (1-\sqrt{5})/2$.

Пусть P – ложная поверхность. Определим ее t-инвариант равенством $t(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}(P)} w(F)$.

Теорема 2. *При применении к ложной поверхности P преобразований $T^{\pm 1}$ число $t(P)$ сохраняется.*

Доказательство. Пусть ложная поверхность P_2 получается из ложной поверхности P_1 преобразованием T. Обозначим через E_1 тот фрагмент поверхности P_1, который заменяется фрагментом E_2. Удобно считать, что полиэдры $P_1 - E_1$ и $P_2 - E_2$ совпадают. Проанализируем структуру фрагментов E_1 и E_2.

Фрагмент E_1 состоит из боковых поверхностей двух конусов и трех полос, которые мы будем называем *крыльями*. Боковая поверхность каждого конуса состоит из трех треугольников. Фрагмент E_2 состоит из шести прямоугольников, составляющих боковую поверхность призмы, из среднего треугольника и трех крыльев.

Будем называть ложную поверхность $F \in \mathcal{F}(P_1)$ *полной* (по отношению к E_1), если $F \cap E_1$ содержит все треугольники фрагмента E_1, и *тощей* в противном случае.

1. Пусть F_1 – тощая ложная поверхность в P_1. Так как фрагмент E_1 с удаленным треугольником гомеоморфен фрагменту E_2 с удаленным соответствующим прямоугольником, найдется такая единственная ложная поверхность F_2 в P_2,что $F_1 \cap (P_1 - E_1) = F_2 \cap (P_2 - E_2)$. Более того, поверхности F_1 и F_2 гомеоморфны и поэтому их веса равны.

2. Пусть F_1 – полная ложная поверхность в P_1. Тогда существуют ровно две такие ложные поверхности F_2', F_2'' в P_2, что

$$F_1 \cap (P_1 - E_1) = F_2' \cap (P_2 - E_2) = F_2'' \cap (P_2 - E_2).$$

Одна из них содержит средний треугольник, вторая – нет.

Пересечение $F_1 \cap E_1$ может содержать 0, 2, или 3 крыла. Легко проверить, что во всех трех случаях равенство $w(F_1) = w(F_2') + w(F_2'')$ эквивалентно равенству $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ (см. рис. 2 для случая нуля крыльев).

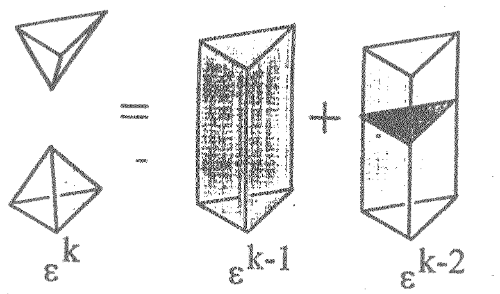

Рис. 2. Если $\chi(F_1) = \chi$, $v(F_1) = v$, то $\chi(F_2') = \chi - 2$, $v(F_2') = v$ и $\chi(F_2'') = \chi - 1$, $v(F_2') = v$. Равенство $(-1)^v \varepsilon^{\chi - v} = (-1)^v \varepsilon^{\chi - v - 2} + (-1)^v \varepsilon^{\chi - v - 2}$ эквивалентно равенству $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

3. Мы не рассмотрели ложные поверхности в P_2, которые пересекают E_2 по всем шести прямоугольникам и ровно одному крылу. Множество всех таких поверхностей может быть разбито на пары F_2', F_2'' так, что $F_2' \cap (P_2 - E_2) = F_2'' \cap (P_2 - E_2)$, и ровно одна из поверхностей F_2', F_2'' содержит средний треугольник.

Для каждой пары справедливо равенство $w(F_2') + w(F_2'') = 0$. Это доказывает, что $t(P_1) = t(P_2)$. $\square$

Пусть M – произвольное компактное многообразие. Определим его t-инвариант $t(M)$, полагая $t(M) = t(P)$, где P – некоторый специальный спайн многообразия M. Из теорем 1, 2 следует, что это определение корректно.

Предложение 1. *Пусть M является связной суммой двух замкнутых многообразий M_1, M_2 или граничной связной суммой двух многообразий M_1, M_2 с краем. Тогда $t(M) = t(M_1)t(M_2)$.*

Доказательство. Построим спайн P многообразия M путем склеивания двух не содержащих особых точек дисков в P_1 и P_2. Тогда P является ложной поверхностью. Несложный подсчет показывает, что $t(P) = t(P_1)t(P_2)$. Мы преобразуем P в некоторый специальный спайн многообразия M с помощью так называемых *луночных* преобразований.

Пусть γ – такая простая дуга в P, что ее концы расположены на ребрах спайна P, а все остальные точки неособы. Заменим замкнутую регулярную окрестность дуги γ в P боковой поверхностью цилиндра со средним диском и двумя крыльями, см. рис. 3. Получится новая ложная поверхность P'. Переход от спайна P к спайну P' называется *луночным преобразованием.*

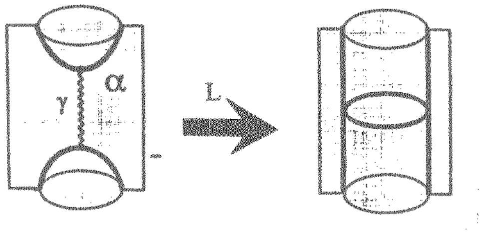

Рис. 3. Луночное преобразование.

Заметим, что P' имеет те же 2-компоненты, что и P; единственное отличие состоит в том, что P' содержит новую 2-компоненту, отвечающую среднему диску, и что 2-компонента α (см. рис. 3), содержащая кривую γ, оказалась разрезанной вдоль нее. Очевидно, что можно найти последовательность луночных преобразований, которая разрезает на 2-клетки все 2-компоненты спайна

P. Поэтому луночными преобразованиями P можно преобразовать в некоторый специальный спайн многообразия M.

Рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 2, показывает, что t-инвариант ложной поверхности при луночных преобразованиях сохраняется. Поэтому можно сделать вывод, что $t(M) = t(M_1)t(M_2)$. $\square$

В работе [10] О. Виро и В. Тураев построили бесконечное множество инвариантов трехмерных многообразий, параметризованное примитивными корнями из единицы степени $2r$. Каждый инвариант имеет вид

$$|M| = \sum_{\varphi} |P|_{\varphi},$$

где P – специальный спайн многообразия M, а сумма берется по всем допустимым раскраскам 2-компонент спайна P цветами $0, 1/2, \ldots, (r-2)/2$ (определение допустимой раскраски и веса $|P|_{\varphi}$ см. в [10]). Для малых значений параметра r геометрическая интерпретация инвариантов и таблицы их значений приведены в [4].

Допустимые раскраски обладают следующим свойством: если заменить каждый цвет c вычетом числа $2c$ по модулю 2, $0 \leqslant c \leqslant (r-2)/2$, то получится цикл с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ и, следовательно, некоторый элемент h_{φ} группы гомологий $H_2(M;\mathbb{Z}_2)$. Важное замечание: для каждого данного элемента $h \in H_2(M;\mathbb{Z}_2)$ сумма

$$|M|_h = \sum_{h_{\varphi}=h} |P|_{\varphi}$$

является инвариантом пары (M, h). Взяв $h = 0$, мы получим инвариант $|M|_0$ многообразия M, см. [9].

Предложение 2. *Пусть M – компактное трехмерное многообразие с непустым краем, и пусть $|M|_0$ – инвариант Тураева–Виро, отвечающий примитивному корню q_0 из 10. Тогда*

$$|M|_0 = \left(\frac{3-\varepsilon}{10}\right)^{\chi(M)} t(M),$$

где

$$\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{для} \quad q_0 = e^{\pm\frac{\pi i}{5}}$$

и

$$\varepsilon = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \textit{для} \quad q_0 = e^{\pm\frac{3\pi i}{5}}.$$

Доказательство. Пусть P – специальный спайн многообразия M, и пусть φ – его допустимая раскраска цветами 0, 1/2, 1, 3/2. Заметим, что условие $h_\varphi = 0$ эквивалентно тому, что использованы только целые цвета 0 и 1. Ключевое наблюдение состоит в том, что 2-компоненты, раскрашенные цветом 1, образуют ложную поверхность $F_\varphi \in P$.

Обратно, каждая ложная поверхность в P определяет допустимую раскраску цветами 0 и 1. Заметим, что числа q_0 и ε связаны соотношением $q_0+q_0^{-1} = \varepsilon$. Используя это обстоятельство, можно легко вычислить *начальные данные* (см. [10]) и проверить, что

$$|P|_\varphi = \left(\frac{3-\varepsilon}{10}\right)^{\chi(P)} w(F_\varphi).$$

Требуемый результат получается суммированием этих равенств. □

Замечание. Если в предложении 2 многообразие M замкнуто, то $|M|_0 = ((3-\varepsilon)/10)t(M)$.

§4. t-Инвариант и TQFT

Трехмерная топологическая квантовая теория поля (TQFT) представляет собой функтор из категории трехмерных бордизмов в категорию векторных пространств. Разумеется, этот функтор должен удовлетворять некоторым аксиомам, см. [1]. В частности, квантовость поля означает, что несвязному объединению двух поверхностей соответствует тензорное произведение соответствующих векторных пространств. В нашем случае в качестве основного поля удобно взять поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Тогда каждому замкнутому трехмерному многообразию отвечает линейное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, т.е. умножение на некоторое число. Это число является инвариантом многообразия.

Как объяснено в [10], инварианты Виро–Тураева можно интерпретировать с точки зрения TQFT. Единственное отличие состоит в том, что вместо категории бордизмов приходится рассматривать категорию, объектами которой служат поверхности с фиксированными одномерными специальными спайнами. При этом под специальным полиэдром размерности 1 (*специальным графом*) понимается регулярный граф степени 3. Как и раньше, морфизмами категории служат трехмерные многообразия с краем.

t-Инвариант также допускает такую интерпретацию. Сопоставим каждой замкнутой поверхности S с фиксированным спайном Γ векторное пространство $C(S,\Gamma)$, порожденное всеми специальными подграфами графа Γ. Пусть $W = (M, h_+, h_-)$ – бордизм между замкнутыми поверхностями S_+ и S_- со специальными спайнами Γ_+ и Γ_-. Другими словами, M является компактным многообразием, а

$$h_+ : S_+ \to \partial M, \quad h_- : S_- \to \partial M$$

– такие вложения, что

$$h_+(S_+) \cup h_-(S_-) = \partial M \text{ и } h_+(S_+) \cap h_-(S_-) = \emptyset.$$

Пусть P – спайн многообразия M. Мы будем предполагать, что P является *ложной поверхностью с краем* $\partial P = h_+(\Gamma_+) \cup h_-(\Gamma_-)$, т.е. что ∂P имеет окрестность вида $\partial P \times [0,1)$ в P и что $P - \partial P$ является ложной поверхностью. Пусть $\alpha \subset \Gamma_+, \beta \subset \Gamma_-$ – подграфы, отвечающие базисным векторам пространств $C(S_+,\Gamma_+)$, $C(S_-,\Gamma_-)$, соответственно. Определим число $t(P,\alpha,\beta)$ равенством

$$t(P,\alpha,\beta) = \sum_F (-1)^{v(F)} \varepsilon^{\chi(F) - v(F) - (\chi(\alpha)+\chi(\beta))/2},$$

где суммирование ведется по всем ложным поверхностям $F \subset P$ с краем $\partial F = h_+(\alpha) \cup h_-(\beta)$. Эти числа, записанные в виде матрицы, задают линейное отображение $\Phi_W : C(S_+,\Gamma_+) \to C(S_-,\Gamma_-)$. Как и раньше, можно показать, что любые два спайна P_1, P_2 многообразия M, которые являются ложными поверхностями и удовлетворяют условию $\partial P_1 = \partial P_2 = h_+(\Gamma_+) \cup h_-(\Gamma_-)$, связаны цепочкой луночных T-преобразований. Отсюда следует, что Φ_W не зависит от выбора спайна P.

Легко проверить, что функтор

$$(S,\Gamma) \to C(S,\Gamma), \quad W \to \Phi_W$$

определяет TQFT в смысле [10]. Отметим, что инвариант трехмерных многообразий, отвечающий этой TQFT, совпадает с t-инвариантом.

Пусть Γ – какой-нибудь спайн тора $S^1 \times S^1$. Тогда Γ состоит из двух вершин и трех соединяющих их ребер. Так как Γ содержит в точности 5 специальных подграфов, (Γ, три окружности и пустой подграф), то пространство $C(S^1 \times S^1, \Gamma)$ изоморфно $\mathbb{R}^5$. Из общекатегорных соображений следует, что здесь появляется гомоморфизм из группы классов отображений двумерного тора в группу матриц $GL_5(\mathbb{R})$. Более точно, каждому гомеоморфизму $h\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ соответствует линейный изоморфизм $\Phi_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, где $W = (S^1 \times S^1 \times I, \mathrm{Id}, h)$, $\mathrm{Id} : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 \times \{0\}$ – тождество и $h\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 \times \{1\} = S^1 \times S^1$ – данный гомеоморфизм.

Группа классов отображений тора порождена скручиваниями τ_m и τ_l вдоль меридиана и параллели, соответственно. Эти скручивания удовлетворяют соотношениям $\tau_m\tau_l\tau_m = \tau_l\tau_m\tau_l$ и $(\tau_m\tau_l\tau_m)^4 = 1$. Обозначим через a и b матрицы соответствующих линейных отображений. Легко проверить, что $a^5 = 1$, $(aba)^2 = 1$ и что группа

$$\langle a, b | aba = bab,\ (aba)^2 = 1,\ a^5 = 1\rangle$$

конечна. На самом деле, это копредставление эквивалентно стандартному копредставлению $\langle a, b | aba = bab, (a^2b)^2 = a^5 = 1\rangle$ знакопеременной группы A_5.

Приведенная ниже теорема является прямым следствием этого факта.

Теорема 3. *Пусть F – замкнутая поверхность и n – некоторое неотрицательное целое число. Обозначим через $\mathcal{M}(F, n)$ множество всех многообразий Зейферта с базой F и n особыми слоями. Тогда множество $\{t(M), M \in \mathcal{M}(F, n)\}$ конечно.*

В качестве грубой верхней оценки числа значений можно взять число 60^n. Разумеется, эта оценка сильно завышена. Более аккуратные рассмотрения показывают, что для линзовых пространств число значений t-инварианта равно 4. Приведем без доказательства точную формулу для t-инварианта линзового пространства $L(p, q)$.

Теорема 4.

$$t(L_{p,q}) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}} \ \ p \equiv \pm 1 \mod 5; \\ \varepsilon + 1, & \text{\textit{если}} \ \ p \equiv \pm 2 \mod 5; \\ \varepsilon + 2, & \text{\textit{если}} \ \ p \equiv 0 \mod 5 \ \ \text{\textit{и}} \ \ q \equiv \pm 1 \mod 5; \\ 0, & \text{\textit{если}} \ \ p \equiv 0 \mod 5 \ \ \text{\textit{и}} \ \ q \equiv \pm 2 \mod 5. \end{cases}$$

§5. Таблица

В приведенной ниже таблице представлены значения t-инварианта всех замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий сложности $\leqslant 6$ (изложение *теории сложности* трехмерных многообразий см. в [6]). Обозначения многообразий либо стандартны, либо несут информацию об их фундаментальных группах, либо носят специальных характер. $L_{p,q}$ обозначает линзовое пространство, S^3/G – фактор-пространство сферы S^3 по свободному линейному действию неабелевой группы G. Список всех таких групп приведен в [7].

Пусть (2×2) матрица A имеет определитель 1 и задает гомеоморфизм $h_A\colon T \to T$ тора $T = S^1 \times S^1$ на себя. Тогда $\frac{T \times I}{A}$ обозначает тор гомеоморфизма h_A. Напомним, что край ориентируемого косого произведения $K \tilde{\times} I$ бутылки Клейна K на отрезок является тором с выделенными меридианом и параллелью, которые проектируются на меридиан и удвоенную параллель бутылки Клейна. Через $\frac{K \tilde{\times} I \cup K \tilde{\times} I}{A}$ мы обозначим многообразие, полученное склеиванием двух экземпляров многообразия $K \tilde{\times} I$ по

Таблица

M^3	$t(M^3)$	M^3	$t(M^3)$	M^3	$t(M^3)$
сложность 0		сложность 4		сложность 6	
$L_{3.1}$	$\varepsilon+1$	S^3/P_{24}	$2\varepsilon+3$	$L_{9.1}$	1
S^3	1	сложность 5		$L_{15.7}$	0
RP^3	$\varepsilon+1$	$L_{8.1}$	$\varepsilon+1$	$L_{19.6}$	1
сложность 1		$L_{13.6}$	$\varepsilon+1$	$L_{20.7}$	0
$L_{5.2}$	0	$L_{20.9}$	$\varepsilon+2$	$L_{29.9}$	1
$L_{4.1}$	1	$L_{16.3}$	1	$L_{31.11}$	1
сложность 2		$L_{17.3}$	$\varepsilon+1$	$L_{36.11}$	1
$L_{5.1}$	$\varepsilon+2$	$L_{25.11}$	$\varepsilon+2$	$L_{39.14}$	1
$L_{7.2}$	$\varepsilon+1$	$L_{19.4}$	1	$L_{23.4}$	$\varepsilon+1$
$L_{8.3}$	$\varepsilon+1$	$L_{26.11}$	1	$L_{34.15}$	1
S^3/Q_8	$\varepsilon+3$	$L_{24.7}$	1	$L_{37.11}$	$\varepsilon+1$
сложность 3		$L_{27.10}$	$\varepsilon+1$	$L_{41.15}$	1
$L_{6.1}$	1	$L_{23.5}$	$\varepsilon+1$	$L_{28.5}$	$\varepsilon+1$
$L_{9.2}$	1	$L_{31.13}$	1	$L_{41.18}$	1
$L_{10.3}$	0	$L_{29.8}$	1	$L_{44.13}$	1
$L_{11.4}$	1	$L_{34.13}$	1	$L_{49.19}$	1
$L_{12.5}$	$\varepsilon+1$	$L_{22.5}$	$\varepsilon+1$	$L_{37.8}$	$\varepsilon+1$
$L_{13.5}$	$\varepsilon+1$	$L_{29.12}$	1	$L_{50.21}$	$\varepsilon+2$
S^3/Q_{12}	$\varepsilon+3$	$L_{17.13}$	$\varepsilon+1$	$L_{47.13}$	$\varepsilon+1$
сложность 4		$L_{25.7}$	0	$L_{55.21}$	$\varepsilon+2$
$L_{7.1}$	$\varepsilon+1$	$L_{30.11}$	$\varepsilon+2$	$L_{27.5}$	$\varepsilon+1$
$L_{11.2}$	1	$L_{23.7}$	$\varepsilon+1$	$L_{39.17}$	1
$L_{13.3}$	$\varepsilon+1$	S^3/P_{48}	$\varepsilon+1$	$L_{41.12}$	1
$L_{14.3}$	1	S^3/P'_{72}	$\varepsilon+3$	$L_{46.17}$	1
$L_{15.4}$	$\varepsilon+2$	S_3/Q_{20}	$3\varepsilon+2$	$L_{30.13}$	0
$L_{16.7}$	1	S^3/D_{40}	$-\varepsilon+2$	$L_{21.4}$	1
$L_{17.5}$	$\varepsilon+1$	$S^3/Q_{16}\times Z_3$	$\varepsilon+1$	$L_{24.5}$	1

$L_{18.5}$	$\varepsilon+1$	$S^3/Q_{20}\times Z_3$	$-\varepsilon+2$	$L_{33.14}$	$\varepsilon+1$
$L_{19.7}$	1	S^3/D_{48}	$\varepsilon+3$	$L_{24.11}$	1
$L_{21.8}$	1	$S^3/Q_8\times Z_5$	$\varepsilon+2$	$L_{45.19}$	$\varepsilon+2$
S^3/D_{24}	$2\varepsilon+3$	$S^3/Q_{12}\times Z_5$	$\varepsilon+2$	$L_{40.11}$	$\varepsilon+2$
$S^3/Q_8\times Z_3$	$2\varepsilon+3$	$S^3/P_{24}\times Z_5$	$\varepsilon+2$	$L_{35.8}$	0
S^3/Q_{16}	1	S^3/P_{120}	$3\varepsilon+2$	$L_{33.10}$	$\varepsilon+1$

M^3	$t(M^3)$
сложность 6	
$L_{32.7}$	$\varepsilon+1$
$L_{43.18}$	$\varepsilon+1$
$L_{31.7}$	1
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}}$	$-\varepsilon+3$
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}$	0
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}$	$-\varepsilon+3$
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$	$4\varepsilon+8$
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}}$	$\varepsilon+2$
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}}$	$\varepsilon+2$
$\dfrac{T\times I}{\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$	$4\varepsilon+8$

M^3	$t(M^3)$
сложность 6	
$\dfrac{K\tilde{\times}I\cup K\tilde{\times}I}{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}$	$4\varepsilon+4$
$\dfrac{K\tilde{\times}I\cup K\tilde{\times}I}{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}$	$3\varepsilon+7$
$\dfrac{K\tilde{\times}I\cup K\tilde{\times}I}{\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}}$	$\varepsilon+3$
$S^3/P_{120}\times Z_7$	$-\varepsilon+2$
S^3/D_{56}	$2\varepsilon+3$
$S^3/Q_{32}\times Z_3$	$2\varepsilon+3$
$S^3/P_{48}\times Z_7$	1
$S^3/P_{120}\times Z_{13}$	$-\varepsilon+2$
$S^3/Q_{32}\times Z_5$	$\varepsilon+2$
$S^3/Q_{20}\times Z_7$	$-\varepsilon+2$
S^3/D_{112}	$\varepsilon+3$
$S^3/Q_{16}\times Z_7$	$\varepsilon+1$
$S^3/Q_{16}\times Z_5$	$\varepsilon+2$
$S^3/P_{48}\times Z_{11}$	$\varepsilon+1$

M^3	$t(M^3)$
сложность 6	
$S^3/P_{48}\times Z_5$	$\varepsilon+2$
S^3/Q_{24}	1
$S^3/Q_{28}\times Z_3$	$2\varepsilon+3$
$S^3/Q_{12}\times Z_7$	$2\varepsilon+3$
S^3/D_{160}	$-\varepsilon+2$
$S^3/Q_8\times Z_7$	$2\varepsilon+3$
S^3/D_{80}	$3\varepsilon+2$
$S^3/P_{120}\times Z_{23}$	$-\varepsilon+2$
$S^3/P_{24}\times Z_7$	$\varepsilon+3$
S^3/P'_{216}	$2\varepsilon+3$
$S^3/P_{24}\times Z_{11}$	$2\varepsilon+3$
$S^3/P_{120}\times Z_{17}$	$-\varepsilon+2$
$S^3/Q_{28}\times Z_5$	$\varepsilon+2$
S^3/D_{96}	$2\varepsilon+3$
$SF(1)$	$\varepsilon+3$
$SF(2)$	$2\varepsilon+3$
$SF(3)$	$2\varepsilon+3$

гомеоморфизму h_A их краев. Наконец, $SF(e)$ обозначает ориентируемое многообразие Зейферта, расслоенное над сферой с тремя особыми слоями типа (3,1) и числом Эйлера e.

Литература

1. M. Atiyah, *Topological quantum field theories.* — Publ. Math. IHES **68** (1989), 175–186.
2. B. G. Casler, *An embedding theorem for connected 3-manifolds with boundary.* — Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 559–566.
3. H. Ikeda, *Acyclic fake surfaces.* — Topology **10** (1971), 9–36.
4. L. H. Kauffman, S. Lins, *Computing Turaev–Viro invariants for 3-manifolds.* — Manuscripta Math. **72** (1991), 81–94.
5. С. В. Матвеев, *Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана.* — Изв. АН СССР **51**, № 5 (1987), 1104–1115.
6. S. V. Matveev, *Complexity theory of 3-manifolds.* — Acta Appl. Math. **19** (1990), 124–132.
7. J. Milnor, *Groups which act on S^3 without fixed points.* — Am. J. Math. **79** (1967), 623–630.
8. R. Piergallini, *Standard moves for standard polyhedra and spines.* III Convegno Nazionale di Topologia Trieste, 9–12 Giugno 1986. 1988, pp. 391–414.
9. M. V. Sokolov, *The Turaev–Viro invariant for 3-manifolds is a sum of three invariants.* — Canadian Math. Bull. **39** (1996), 468–475.
10. V. G. Turaev, O. Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbol.* — Topology **31** (1992), 865–902.

Matveev S. V., Ovchinnikov M. A., and Sokolov M. V. Construction and properties of the t-invariant.

The t-invariant is a new invariant of a compact 3-manifold. We construct this invariant by means of special spine theory. Behavior of the t-invariant under connected sum and under boundary connected sum is described. One of the Turaev–Viro invariants is expressed through the t-invariant. We show that the t-invariant fits into the conception of TQFT. We present the values of the t-invariant for all closed irreducible orientable 3-manifolds of complexity $\leqslant 6$, and for all lens spaces. Also some upper estimate for the number of values of the t-invariant of a Seifert manifold over a given closed surface with n exceptional fibers is obtained.

Челябинский
государственный
университет
email matveev@cgu.chel.su

Поступило 31 октября 1999 г.