Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 267, 2000 г.

С. С. Подкорытов

КВАДРАТИЧНОЕ СВОЙСТВО РАЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛУХАРАКТЕРИСТИКИ

Под *многообразием* понимается гладкое многообразие без края. Соответственно используется слово *подмногообразие*. Размерность многообразия указывается верхним индексом.

Для компактного ориентированного многообразия X^n, $n \equiv 1 \pmod 4$, класс

$$\mathsf{k}(X) = \sum_{r \equiv 0 \pmod 2} \dim H_r(X; \mathbb{Q}) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2$$

называется его (*рациональной*) *полухарактеристикой*.

Если T – модуль над полем $\mathbb{Z}_2$, то отображение $q\colon T \to \mathbb{Z}_2$ называется *квадратичным*, если существует линейное отображение $p\colon T \otimes T \to \mathbb{Z}_2$ такое, что $q(t) = p(t \otimes t)$, $t \in T$.

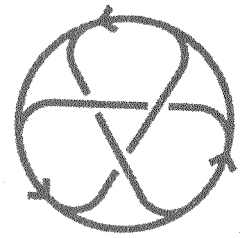
Модуль всех $\mathbb{Z}_2$-значных функций на множестве E будем обозначать $!E$.

n-Ростком в многообразии V будем называть класс эквивалентности пар (X, x), где $X^n \subset V$ – ориентированное подмногообразие, $x \in X$; при этом пары (X_1, x_1) и (X_2, x_2) считаются эквивалентными, если $x_1 = x_2$ и существует открытое множество $O \subset V$, содержащее точку x_1 и такое, что $X_1 \cap O = X_2 \cap O$ (с учетом ориентации). Множество n-ростков в многообразии V будем обозначать $\mathbf{E}_n(V)$, при этом для ориентированного подмногообразия $X^n \subset V$ пусть $\mathbf{1}(X) \in !\mathbf{E}_n(V)$ – характеристическая функция множества его ростков (т.е. классов пар (X, x), $x \in X$).

Цель работы – доказательство следующей теоремы.

0.1. Теорема. *Пусть V – многообразие, $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда существует такое квадратичное отображение $q\colon !\mathbf{E}_n(V) \to \mathbb{Z}_2$, что для любого компактного ориентированного подмногообразия $X^n \subset V$ верно равенство $\mathsf{k}(X) = q(\mathbf{1}(X))$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 98-01-00832 и 00-15-96024).



Замечание. Слово *квадратичное* в этой формулировке нельзя заменить на слово *линейное.* Действительно, на рисунке можно видеть пять ориентированных гладких окружностей $X_j \subset \mathbb{R}^3$, $j = 1, \ldots, 5$ (круглая окружность, три овала и трилистник). Верны равенства

$$\sum_{j=1}^{5} \mathbf{1}(X_j) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{5} \mathsf{\kappa}(X_j) = 1,$$

что противоречит линейной зависимости. Аналогичные примеры в старших размерностях получаются декартовым умножением на многообразия $\mathbb{C}P^m$, $m \equiv 0 \pmod 2$. Это подтверждает, что полухарактеристику нельзя отнести к “интегральным” инвариантам [1] (хотя она СКК-инвариант [2]).

Переформулируем теорему 0.1.[1]

0.2. Теорема. *Пусть* V *– многообразие,* $X_j^n \subset V$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $j = 1, \ldots, N$, *– такой набор компактных ориентированных подмногообразий, что*

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}(X_j)(e_1)\mathbf{1}(X_j)(e_2) = 0, \qquad e_1, e_2 \in \mathbf{E}_n(V).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \mathsf{\kappa}(X_j) = 0.$$

Если вещественнозначная функция подмногообразия выражается интегралом по всем парам точек подмногообразия от какой-то его характеристики в окрестности каждой пары точек, то она

[1] О равносильности утверждений, подобных теоремам 0.1 и 0.2, и саму форму теоремы 0.1 мне сообщил М. Н. Гусаров.

обладает подобным свойством (вместо сумм нужно рассматривать вещественные линейные комбинации, характеристические функции нужно считать вещественнозначными).

Доказательство равносильности теорем 0.1 и 0.2. Пусть V – многообразие и пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Проверим равносильность утверждений теорем 0.1 и 0.2 для V и n. Положим $E = \mathbf{E}_n(V)$. Определим линейное вложение $m\colon !E \otimes !E \to !(E \times E)$, полагая

$$m(u_1 \otimes u_2)((e_1, e_2)) = u_1(e_1) u_2(e_2), \quad e_1, e_2 \in E, \quad u_1, u_2 \in !E.$$

Пусть S – модуль над полем $\mathbb{Z}_2$, свободно порожденный компактными ориентированными n-мерными подмногообразиями многообразия V. Определим линейные отображения $D\colon S \to !E \otimes !E$, полагая $D([X]) = \mathbf{1}(X) \otimes \mathbf{1}(X)$, и $K\colon S \to \mathbb{Z}_2$, полагая $K([X]) = \kappa(X)$, где $X^n \subset V$ – компактное ориентированное подмногообразие. Теорема 0.1 утверждает, что существует такое линейное отображение $p\colon !E \otimes !E \to \mathbb{Z}_2$, что $K = p \circ D$. Это равносильно включению $\ker D \subset \ker K$. Теорема 0.2 утверждает включение $\ker m \circ D \subset \ker K$. Но $\ker m \circ D = \ker D$. $\square$

Набросок доказательства теоремы 0.2. Структура работы.

При $n = 1$ утверждение следует из того, что полухарактеристику кривой можно найти по ее общему погружению в плоскость как класс суммы числа двойных точек и числа вращения, см. §2. При $n > 1$ для нахождения полухарактеристики многообразия на нем рассматривается общая пара векторных полей (по Кошорке [3]). На кривой, образованной точками, в которых эти векторные поля коллинеарны, есть каноническая Pin^--структура, см. §§3, 6, 7. Полухарактеристика многообразия выражается через класс Pin^--кобордантности этой кривой (лемма 8.7). Этот факт методом Кошорке выводится из теоремы Атьи о существовании пары всюду неколлинеарных векторных полей [4], см. §8. Так все сводится к одномерной задаче, похожей на случай $n=1$, см. §§4 и 9.

Благодарности. Я благодарен О. Я. Виро и Т. Кярки за внимание к работе и интересные обсуждения.

§1. Обозначения, термины и соглашения

Окружность C. Положим $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$.

Кривые. *Кривой* называется одномерное многообразие. Под *римановой* кривой понимается кривая, снабженная римановой структурой. Пусть даны компактная кривая T и погружение $f\colon T \to \mathbb{C}$. Если погружение f *самотрансверсально* (т.е. не имеет самокасаний и тройных точек), то пусть $\delta_2(f) \in \mathbb{Z}_2$ – класс числа его двойных точек. Если кривая T ориентирована, то пусть $\mathrm{g}(f)\colon T \to C$ – касательное сферическое отображение погружения f. Для гладкого отображения $g: T \to C$ пусть $\deg_2 g \in \mathbb{Z}_2$ – его степень.

Для конечного множества D пусть $|D|_2 \in \mathbb{Z}_2$ – вычет modulo 2 числа его элементов.

∂-Многообразия. Под *∂-многообразием* понимается гладкое многообразие с краем (часто пустым). Соответственно используется слово *∂-подмногообразие*. Размерность ∂-многообразия указывается верхним индексом. Если дано ∂-многообразие X, то ∂-подмногообразие $T \subset X$ называется *правильным*, если оно замкнуто и трансверсально подмногообразию ∂X, причем $\partial T = T \cap \partial X$.

Евклидовы пространства. Пусть дано евклидово векторное пространство G^p (верхним индексом указывается размерность). Для векторного подпространства $G_1 \subset G$ пусть $G \ominus G_1 \subset G$ – его ортогональное дополнение.

Пусть $\mathrm{O}(G)$ и $\mathrm{SO}(G)$ – группы Ли ортогональных автоморфизмов пространства G, соответственно всех и сохраняющих ориентацию. Сокращение: $\mathrm{O}_p = \mathrm{O}(\mathbb{R}^p)$ и т.д.

Пусть $\mathrm{P}(G)$ – многообразие, образованное ортогональными изоморфизмами $\mathbb{R}^p \to G$. На нем есть очевидные главные действия: левое – группы $\mathrm{O}(G)$ и правое – группы O_p. Если пространство G ориентировано, то пусть $\mathrm{SP}(G) \subset \mathrm{P}(G)$ – компонента, образованная изоморфизмами, сохраняющими ориентацию. Для ортогонального изоморфизма $t\colon G \to G'$ пусть $t_*\colon\ \mathrm{P}(G) \to \mathrm{P}(G')$ – индуцированный им диффеоморфизм, $t_*\colon\ \mathrm{O}(G) \to \mathrm{O}(G')$ – изоморфизм групп Ли и т.д. Имеются вложение

$$\mathrm{P}(G) \to \mathrm{P}(G \oplus \mathbb{R}), \quad r \mapsto r^+ = r \oplus 1,$$

и групповое вложение

$$\mathrm{O}(G) \to \mathrm{O}(G \oplus \mathbb{R}), \quad v \mapsto v^+ = v \oplus 1;$$

здесь $1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – единичный оператор.

Алгебры Клиффорда. Пусть $\mathrm{Cliff}(G) \supset G$ – алгебра Клиффорда пространства G (с соотношениями $g^2 = -|g|^2$, $g \in G$), $\mathrm{Cliff}_0(G) \subset \mathrm{Cliff}(G)$ – подалгебра четных элементов, $\mathrm{Spin}(G) \subset \mathrm{Cliff}_0(G)$ – спинорная группа (группа Ли относительно умножения Клиффорда). Ортогональное вложение $G \to G \oplus \mathbb{R}$, $g \mapsto (g, 0)$, индуцирует вложение алгебр Клиффорда и, как его сокращение, групповое вложение $\mathrm{Spin}(G) \to \mathrm{Spin}(G \oplus \mathbb{R})$, о котором будем писать: $V \mapsto V^+$.

Пусть $\pi\colon \mathrm{Spin}(G) \to \mathrm{SO}(G)$ – стандартное групповое накрытие. Для любого элемента $V_0 \in \mathrm{Spin}(G)$ имеем

$$\{V \in \mathrm{Spin}(G) \mid \pi(V) = \pi(V_0)\} = \{\pm V_0\}.$$

Имеем

$$\pi(V^+) = \pi(V)^+, \quad V \in \mathrm{Spin}(G).$$

Предположим, что $p \equiv 2 \pmod 4$ и пространство G ориентировано. Снабдим векторное пространство $\mathrm{Cliff}_0(G)$ комплексной структурой. Выберем правый ортонормированный базис $(g_1, \dots, g_p)$ пространства G. Положим $I = g_1 \dots g_p \in \mathrm{Cliff}_0(G)$. Элемент I не зависит от выбора базиса, и $I^2 = -1$. Полагаем $iu = Iu$, $u \in \mathrm{Cliff}_0(G)$. Отметим, что $I \in \mathrm{Spin}(G)$ и $\pi(I) = -1$.

Расслоения. Под *расслоением* понимается гладкое расслоение (слои без края).

Пусть даны расслоение ξ над ∂-многообразием X, точка $x \in X$ и ∂-подмногообразие $T \subset X$. Пусть $|\xi|$ – пространство расслоения ξ, ξ_x – его слой над точкой x, ξ_T – его сужение на ∂-подмногообразие T. Размерность векторного расслоения указывается верхним индексом.

Пусть ϵ_X^p – тривиальное p-мерное векторное расслоение над ∂-многообразием X, $\epsilon_X^{\mathbb{C}}$ – тривиальное комплексное линейное расслоение над ним; $\epsilon_X = \epsilon_X^1$. О гладком подрасслоении ξ_1 расслоения ξ будем писать: $\xi_1 \subset \xi$.

Касательное расслоение ∂-многообразия X обозначается $\tau(X)$. Вместо $\tau(X)_x$ и $\tau(X)_T$ будем писать соответственно $\tau_x(X)$ и $\tau_T(X)$. Будем считать, что $\tau(T) \subset \tau_T(X)$. Для гладкого отображения $f\colon X \to Y$ пусть $d_x f\colon \tau_x(X) \to \tau_{f(x)}(Y)$ – его дифференциал в точке $x \in X$.

Символы $\ominus$, Hom и т.п. в отношении векторных расслоений обозначают послойное применение соответствующих конструкций; в частности, для евклидова векторного расслоения η^p, оказывается, $\mathrm{P}(\eta)$ – соответствующее главное O_p-расслоение.

Под *сечением* понимается гладкое сечение. Пусть дано сечение u расслоения ξ; запись: $u \in \xi$. Пусть $u_x \in \xi_x$ – значение сечения u в точке x, $u_T \in \xi_T$ – его сужение на ∂-подмногообразие T.

Под *морфизмом* понимается гладкий морфизм, накрывающий тождественное отображение базы. В отношении расслоений соответственно используется слово *изоморфизм*. Пусть дан морфизм $a\colon \xi \to \xi'$. Пусть $a_x\colon \xi_x \to \xi'_x$ – соответствующее отображение слоев над точкой x, $a_T\colon \xi_T \to \xi'_T$ – сужение морфизма a на ∂-подмногообразие T. Инъективный на слоях линейный морфизм векторных расслоений называется *мономорфизмом*.

Для ортогонального изоморфизма евклидовых векторных расслоений $t\colon \eta \to \eta'$ пусть

$$t_*\colon \mathrm{P}(\eta) \to \mathrm{P}(\eta') \quad \text{и} \quad t_*\colon \mathrm{SO}(\eta) \to \mathrm{SO}(\eta')$$

– индуцированные им изоморфизмы. Для ориентированного евклидова векторного расслоения η^p с $p \equiv 2 \pmod 4$ расслоение $\mathrm{Cliff}_0(\eta)$ считается комплексным, в соответствии с концом предыдущего абзаца.

§2. Полухарактеристика кривых

2.1. Лемма. *Пусть T – компактная ориентированная кривая, $f\colon T \to \mathbb{C}$ – самотрансверсальное погружение. Тогда* $\mathsf{k}(T) = \delta_2(f) + \deg_2 \mathrm{g}(f)$.

Доказательство. При замене погружения f на регулярно гомотопное классы $\delta_2(f)$ и $\deg_2 \mathrm{g}(f)$ не меняются. Зная классификацию погружений, можно проверить равенство для представителей всех классов регулярной гомотопности. □

Доказательство теоремы 0.2 при $n = 1$. Рассмотрим гладкое отображение $F\colon V \to \mathbb{C}$ такое, что отображения $f_j = F|X_j$, $j = 1, \dots, N$, – самотрансверсальные погружения. Пусть $c \in C$ – регулярное значение отображений $\mathrm{g}(f_j)$, $j = 1, \dots, N$. По лемме 2.1,

$$\mathsf{k}(X_j) = \delta_2(f_j) + |\mathrm{g}(f_j)^{-1}(c)|_2, \quad j = 1, \dots, N.$$

Из предположения теоремы следует, что при суммировании по индексу j каждое из слагаемых дает 0. □

§3. s-Морфизмы и пинорные структуры

Групповое вложение $\Delta(s)$**.** Для евклидовых векторных пространств F^m и G^{m+n} с $n \equiv 1 \pmod 2$ и ортогонального вложения $s\colon F \to G$ определим групповое вложение $\Delta(s)\colon \mathrm{O}(F) \to \mathrm{SO}(G)$ условиями

$$\Delta(s)(u)(s(f)) = s(u(f)), \quad f \in F, \quad u \in \mathrm{O}(F),$$

и

$$\Delta(s)(u)(g) = (\det u)g, \quad g \in G \ominus \operatorname{im} s, \quad u \in \mathrm{O}(F).$$

s**-Морфизмы.** Пусть даны евклидовы векторные расслоения ζ^m и η^{m+n} с $n \equiv 1 \pmod 2$ над ∂-многообразием T и ортогональный мономорфизм $s\colon \zeta \to \eta$. Морфизм $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ будем называть *s-морфизмом*, если

$$R_t(uq) = \Delta(s_t)(u)R_t(q), \quad u \in \mathrm{O}(\zeta_t), \quad q \in \mathrm{P}(\zeta_t), \quad t \in T.$$

(При $m = 1$ это просто означает, что

$$R_t(-q) = -R_t(q), \quad q \in \mathrm{P}(\zeta_t), \quad t \in T.)$$

Пусть

$$s^+ : \zeta \oplus \epsilon_T \to \eta \oplus \epsilon_T$$

– ортогональный мономорфизм, индуцированный морфизмом s. Для s-морфизма $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ определим s^+-морфизм

$$R^+\colon \mathrm{P}(\zeta \oplus \epsilon_T) \to \mathrm{SO}(\eta \oplus \epsilon_T)$$

условием $R^+_t(q^+) = R_t(q)^+$, $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $t \in T$.

Вложение s^n_m**.** Пусть $\mathrm{s}^n_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ – стандартное ортогональное вложение.

Группа Ли Pin^n_m**.** Пусть $n \equiv 1 \pmod 2$, $n, m \geqslant 0$. Положим

$$\mathrm{Pin}^n_m = \{\, (a, B) \in \mathrm{O}_m \times \mathrm{Spin}_{m+n} \mid \Delta(\mathrm{s}^n_m)(a) = \pi(B) \,\}$$

– с покомпонентным умножением. (Это модель группы $\mathrm{Pin}^{\pm}_m$ [5], $+$ при $n \equiv 1 \pmod 4$, $-$ при $n \equiv 3 \pmod 4$.)

Определим групповое накрытие $\pi\colon \mathrm{Pin}^n_m \to \mathrm{O}_m$, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$, $A = (a, B)$, где $a \in \mathrm{O}_m$, $B \in \mathrm{Spin}_{m+n}$, полагая $\pi(A) = a$.

Определим групповое вложение $\mathrm{Pin}^n_m \to \mathrm{Pin}^n_{m+1}$, для того же элемента A полагая $A \mapsto A^+ = (a^+, B^+)$. Отметим, что Pin^n_1, $n \equiv 1 \pmod 4$, – циклическая группа порядка 4.

Пинорные структуры. Pin^n-*структурой*, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \geqslant 0$, (или просто *пинорной структурой*) на евклидовом векторном расслоении ζ^m над ∂-многообразием T называется пара $\Sigma = (\sigma, p)$, где σ – главное Pin^n_m-расслоение над ∂-многообразием T, $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ – такой морфизм, что

$$p_t(QA) = p_t(Q)\pi(A), \quad A \in \mathrm{Pin}^n_m, \quad Q \in \sigma_t, \quad t \in T.$$

Pin^n-структуры $\Sigma = (\sigma, p)$ и $\Sigma' = (\sigma', p')$ на евклидовом векторном расслоении ζ называются *изоморфными*, если существует такой сохраняющий действие группы Pin^n_m изоморфизм $h\colon \sigma \to \sigma'$, что $p = p' \circ h$. Под пинорной структурой на римановом ∂-многообразии понимается пинорная структура на его касательном расслоении.

Пинорная структура Σ^-. Пусть даны евклидово векторное расслоение ζ^m над ∂-многообразием T и Pin^n-структура $\Sigma = (\sigma', p')$ на расслоении $\zeta \oplus \epsilon_T$. Построим Pin^n-структуру $\Sigma^- = (\sigma, p)$ на расслоении ζ. Для точки $t \in T$ положим

$$\sigma_t = \{\, (q, Q') \in \mathrm{P}(\zeta_t) \times \sigma'_t \mid q^+ = p'(Q') \,\}.$$

Гладкая структура на множестве $|\sigma|$ определяется включением $|\sigma| \to |\,\mathrm{P}(\zeta)| \times |\sigma|$. Морфизм $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ пусть есть проекция.

Введем на расслоении σ структуру главного Pin^n_m-расслоения. Возьмем точку $t \in T$. Определим главное правое действие группы Pin^n_m на многообразии σ_t, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$ и точки $Q \in \sigma_t$, $Q = (q, Q')$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $Q' \in \sigma'_t$, полагая $QA = (q\pi(A), Q'A^+)$.

Пинорная структура $\Gamma(s, R)$. Пусть даны евклидовы векторные расслоения ζ^m и η^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, над ∂-многообразием T, причем расслоение η ориентировано, ортогональный мономорфизм $s\colon \zeta \to \eta$ и s-морфизм $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$. Построим Pin^n-структуру $\Gamma(s, R) = (\sigma, p)$ на расслоении ζ. Для точки $t \in T$ положим

$$\sigma_t = \{\, (q, V) \in \mathrm{P}(\zeta_t) \times \mathrm{Spin}(\eta_t) \mid R_t(q) = \pi(V) \,\}.$$

Гладкая структура на множестве $|\sigma|$ определяется включением $|\sigma| \to |\,\mathrm{P}(\zeta)| \times |\,\mathrm{Spin}(\eta)|$. Морфизм $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ пусть есть проекция.

Введем на расслоении σ структуру главного Pin^n_m-расслоения. Возьмем точку $t \in T$. Выберем такие изоморфизмы $q_0 \in \mathrm{P}(\zeta_t)$ и $r_0 \in \mathrm{SP}(\eta_t)$, что $sq_0 = r_0\, \mathrm{s}^n_m$. Определим главное правое действие группы Pin^n_m на многообразии σ_t, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$, $A =$

(a, B), где $a \in \mathrm{O}_m$, $B \in \mathrm{Spin}_{m+n}$, и точки $Q \in \sigma_t$, $Q = (q, V)$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, полагая

$$QA = (qa, V(R_t(q_0)^{-1}r_0)_*(B)).$$

Нетрудно проверить, что это действие не зависит от выбора изоморфизмов q_0 и r_0.

3.1. *Пусть ζ^m и η^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, – евклидовы векторные расслоения над ∂-многообразием T, причем расслоение η ориентировано, $s\colon \zeta \to \eta$ – ортогональный мономорфизм, $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ – s-морфизм. Тогда Pin^n-структуры $\Gamma(s, R)$ и $\Gamma(s^+, R^+)^-$ на расслоении ζ изоморфны.*

Доказательство. Пусть

$$\Gamma(s, R) = (\sigma, p), \quad \Gamma(s^+, R^+)^- = (\sigma', p').$$

Нужный изоморфизм $h\colon \sigma \to \sigma'$ определим, для точки $t \in T$ и точки $Q \in \sigma'_t$, $Q = (q, V)$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, полагая $h_t(Q) = (q, (q^+, V^+))$. $\square$

§4. Инвариант j

Для компактной римановой кривой T и Pin^n-структуры, $n \equiv 1 \pmod 4$, $\Sigma = (\sigma, p)$ на ней пусть $\mathsf{j}(T, \Sigma) \in \mathbb{Z}_2$ – класс числа тех компонент кривой T, над которыми накрытие σ тривиально.

Конструкция $\Theta\colon (T, \eta, s, R, l, f) \mapsto g$. Пусть даны компактная риманова кривая T, ориентированное евклидово векторное расслоение η^p, $p \equiv 2 \pmod 4$, над ней, ортогональный мономорфизм $s\colon \tau(T) \to \eta$, s-морфизм $R\colon \mathrm{P}(\tau(T)) \to \mathrm{SO}(\eta)$, комплексно-линейный морфизм $l\colon \mathrm{Cliff}_0(\eta) \to \epsilon_T^{\mathbb{C}}$ и погружение $f\colon T \to \mathbb{C}$. Построим гладкое отображение $g\colon T \to C$.

Возьмем точку $t \in T$. Выберем такие изоморфизм $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ и элемент $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, что $R_t(q) = \pi(V)$. Положим

$$z = l_t(V)^2 d_t f(q(1)) \in \mathbb{C}.$$

Легко видеть, что число z не зависит от выбора изоморфизма q и элемента V. Предположим, что $z \neq 0$ (это так во всех точках, если l – общий комплексно-линейный морфизм). Положим $g(t) = z/|z|$.

4.1. Лемма. *Пусть* $\Theta\colon (T,\eta,s,R,l,f)\mapsto g$ *и погружение* f *самотрансверсально. Тогда* $\mathrm{j}(T,\Gamma(s,R))=\delta_2(f)+\deg_2 g$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(s,R)=(\sigma,p)$. Ориентируем кривую T. Определим сечение $v\in\mathrm{SO}(\eta)$, для точки $t\in T$ полагая $v_t=R_t(q)$, где $q\in\mathrm{SP}(\tau_t(T))$.

Определим отображение $b\colon T\to C$, полагая $b(t)=g(t)/\,\mathrm{g}(f)(t)$, $t\in T$. Тогда $\deg_2 b=\deg_2 g-\deg_2\mathrm{g}(f)$. По лемме 2.1, $\mathsf{k}(T)=\delta_2(f)+\deg_2\mathrm{g}(f)$. Таким образом, нужно показать, что

$$\mathrm{j}(T,\Gamma(s,R))=\mathsf{k}(T)+\deg_2 b.$$

Возьмем компоненту $T'\subset T$. Достаточно показать, что накрытие $\sigma_{T'}$ тривиально тогда и только тогда, когда $\deg_2 b|T'=0$.

Нетрудно понять, что первое равносильно существованию такого сечения $V'\in\mathrm{Spin}(\eta_{T'})$, что $\pi(V'_t)=v_t$, $t\in T'$. Пусть V' – такое сечение. Легко видеть, что тогда $b(t)/l_t(V'_t)^2>0$, $t\in T'$. Следовательно, $\deg_2 b|T'=0$.

Обратно. Пусть $\deg_2 b|T'=0$. Выберем такое гладкое отображение $B'\colon T'\to C$, что $B'(t)^2=b(t)$, $t\in T'$. Значение нужного сечения V' в каждой точке $t\in T'$ определим дополнительным условием $B'(t)/l_t(V'_t)>0$. $\square$

§5. Кобордизмы

Этот параграф нужен только для доказательства леммы 8.7.

Кобордизмом называется компактное ∂-многообразие Y с разложением $\partial Y=\partial_+Y\sqcup\partial_-Y$. Под *римановым* кобордизмом понимается кобордизм, снабженный римановой структурой.

Изоморфизмы $\mathrm{v}(Y)$ **и** $\mathrm{w}(Y)$**.** Пусть дан риманов кобордизм Y. Определим сечение $e\in\tau_{\partial Y}(Y)$: для точки $x\in\partial_\pm Y$ пусть $e_x\perp\tau_x(\partial Y)$, $|e_x|=1$ и вектор $\pm e_x$ направлен наружу. Определим ортогональные изоморфизмы

$$\mathrm{v}(Y)\colon \tau(\partial Y)\oplus\epsilon_{\partial Y}\to\tau_{\partial Y}(Y),$$

полагая

$$\mathrm{v}(Y)_x((u,t))=u+te_x,\quad u\in\tau_x(\partial Y),\quad t\in\mathbb{R},\quad x\in\partial X,$$

и

$$\mathrm{w}(Y)\colon \tau(\partial Y)\oplus\epsilon^2_{\partial Y}\to\tau_{\partial Y}(Y)\oplus\epsilon_{\partial Y},$$

полагая

$$\mathrm{w}(Y)_x((u,t)) = (u + t_2 e_x, -t_1), \quad u \in \tau_x(\partial Y), \quad t \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \partial X.$$

Пинорные структуры $\partial_\pm \Sigma$. Группа Π^n_m. Пусть даны риманов кобордизм U^{m+1} и Pin^n-структура $\Sigma = (\sigma, p)$ на нем. Тогда

$$\Sigma_1 = (\sigma_{\partial U}, \mathrm{v}(U)_*^{-1} \circ p_{\partial U})$$

– Pin^n-структура на расслоении $\tau(\partial U) \oplus \epsilon_{\partial U}$. Определим Pin^n-структуры $\partial_\pm \Sigma$ на многообразиях $\partial_\pm U$ как сужения Pin^n-структуры Σ_1^-. Такие пары, как $(\partial_\pm U, \partial_\pm \Sigma)$, будем называть Pin^n-*кобордантными*.

По обычной схеме строятся группы Pin^n-кобордизмов Π^n_m. Для компактного риманова многообразия T^m и Pin^n-структуры Σ на нем пусть $[T, \Sigma] \in \Pi^n_m$ – класс кобордантности пары (T, Σ).

Тонкие структуры. *Тонкой структурой* на кобордизме Y будем называть такой линейный морфизм $c\colon \tau(Y) \to \epsilon_Y$, что $c_y \neq 0$, $y \in Y$, и в точке $x \in \partial_\pm Y$ форма $\pm c_x$ принимает положительные значения на векторах, направленных наружу (и, следовательно, $\ker c_x = \tau_x(\partial Y)$).

Изоморфизм $\mathrm{W}(Y,c)$. Пусть даны риманов кобордизм Y и тонкая структура c на нем. Определим сечение $E \in \tau(Y)$: для точки $y \in Y$ пусть $E_y \perp \ker c_y$, $|E_y| = 1$ и $c_y(E_y) > 0$.

Определим ортогональный изоморфизм

$$\mathrm{W}(Y,c)\colon \ker c \oplus \epsilon^2_Y \to \tau(Y) \oplus \epsilon_Y,$$

полагая

$$\mathrm{W}(Y,c)_y((u,t)) = (u + t_2 E_y, -t_1), \quad u \in \ker c_y, \quad t \in \mathbb{R}^2, \quad y \in Y.$$

Ориентированные кобордизмы. Группа ω_n. Если Y – ориентированный кобордизм, то многообразия $\partial_\pm Y$ считаются ориентированными – по обычному правилу (так что если кобордизм Y снабжен римановой структурой, то изоморфизм $\mathrm{v}(Y)$ сохраняет ориентацию).

Если Y – ориентированный кобордизм, а c – тонкая структура на нем, то ориентированные многообразия $\partial_\pm Y$ *тонко кобордантны*. По обычной схеме строятся группы тонких ориентированных кобордизмов ω_n. (Вместо тонких структур обычно используют векторные поля.)

Для ориентированного компактного многообразия X^n пусть $[X] \in \omega_n$ – его класс кобордантности.

§6. Особенности линейного морфизма

Конструкция $\mathrm{K}\colon (X,\lambda,\mu,a)\mapsto (T,D)$ [3, §1]. Пусть даны компактное ∂-многообразие X^n, векторные расслоения λ^p и μ^q над ним и линейный морфизм $a\colon \lambda\to\mu$. Положим

$$T=\{\,x\in X\mid \operatorname{rg} a_x<p\,\}.$$

Положим $\xi=\operatorname{Hom}(\lambda,\mu)$. Для целого r пусть $\xi^r\subset\xi$ – подрасслоение, образованное линейными отображениями ранга r. Определим гладкое отображение $s\colon X\to|\xi|$, полагая $s(x)=a_x$, $x\in X$.

Морфизм a будем называть *невырожденным*, если отображения s и $s|\,\partial X$ трансверсальны ∂-подмногообразиям $|\xi^r|$.

Предположим, что морфизм a невырожден и $n<2(q-p+2)$. Тогда $T=s^{-1}(|\xi^{p-1}|)$ и это – правильное ∂-подмногообразие размерности $m=n+p-q-1$. Построим линейный изоморфизм

$$D\colon \operatorname{Hom}(\ker a_T,\operatorname{coker} a_T)\to\tau_T(X)/\tau(T).$$

Возьмем точку $t\in T$. Положим $u=a_t\in\xi_t$. Рассмотрим такую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(\lambda_t,\mu_t) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \tau_u(|\xi|) \arrow[d] & \tau_t(X) \arrow[l, "d_t s"'] \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}(\ker a_t,\operatorname{coker} a_t) \arrow[r, "g"] & \tau_u(|\xi|)/\tau_u(|\xi^{p-1}|) & \tau_t(X)/\tau_t(T) \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

Отображение j – композиция очевидного изоморфизма $\operatorname{Hom}(\lambda_t,\mu_t)=\xi_t\to\tau_u(\xi_t)$ и включения $\tau_u(\xi_t)\to\tau_u(|\xi|)$. Первая вертикальная стрелка индуцирована включением $\ker a_t\to\lambda_t$ и проекцией $\mu_t\to\operatorname{coker} a_t$. Две другие – проекции. Отображения g и h определяются условием коммутативности диаграммы и являются изоморфизмами. Положим $D_t=h^{-1}g$.

6.1. *Пусть*

$$\mathrm{K}\colon (Y,\lambda,\mu,b)\mapsto(U,E),\quad X=\partial Y,\quad \text{и}\quad \mathrm{K}\colon (X,\lambda_X,\mu_X,b_X)\mapsto(T,D).$$

Тогда $T=\partial U$ *и* $JD=E_T$, *где*

$$J:\tau_T(X)/\tau(T)\to\tau_T(Y)/\tau_T(U)$$

– изоморфизм, индуцированный морфизмом включения $\tau_T(X)\to\tau_T(Y)$. $\square$

§7. Особенности пары векторных полей

С изоморфизмом евклидовых векторных пространств $h\colon G \to G'$ сопоставим ортогональный изоморфизм $\phi(h)\colon G \to G'$ по формуле из [6, §4][2]:

$$\phi(h) = h(h^*h)^{-1/2}.$$

Если G – евклидово векторное пространство, то с линейным отображением $f\colon \mathbb{C} \to G$ ранга 1 сопоставим ортогональный изоморфизм

$$\kappa(f)\colon\ \ker f \to \operatorname{im} f,$$

полагая $\kappa(f)(z) = kf(iz)$, $z \in \ker f$, с подходящим коэффициентом $k > 0$.

Для евклидова векторного пространства E^1, изоморфизма $p \in \mathrm{P}(E)$ и векторного пространства V определим изоморфизм

$$\iota(p)\colon\ \operatorname{Hom}(E, V) \to V,$$

полагая $\iota(p)(u) = u(p(1))$, $u \in \operatorname{Hom}(E, V)$.

Конструкция $\mathrm{M}\colon (X, a) \mapsto (T, s, R)$**.** Пусть даны компактное риманово многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 2$, и невырожденный линейный морфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbb{C}} \to \tau(X)$. Пусть

$$\mathrm{K}\colon (X, \epsilon_X^{\mathbb{C}}, \tau(X), a) \mapsto (T^1, D).$$

Определим ортогональный мономорфизм

$$s\colon\ \tau(T) \to \tau_T(X) \oplus \epsilon_T,$$

полагая $s_t(f) = (f, 0)$, $f \in \tau_t(T)$, $t \in T$.

Построим s-морфизм

$$R\colon\ \mathrm{P}(\tau(T)) \to \mathrm{SO}(\tau_T(X) \oplus \epsilon_T).$$

Возьмем точку $t \in T$. Для изоморфизма $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$ определим изоморфизм $I(p)$ такой коммутативной диаграммой.

$$\begin{array}{ccccc}
\tau_t(X) \ominus \operatorname{im} a_t & & \xrightarrow{I(p)} & & \tau_t(X) \ominus \tau_t(T) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\operatorname{coker} a_t & \xrightarrow{\iota(p)^{-1}} & \operatorname{Hom}(\ker a_t, \operatorname{coker} a_t) & \xrightarrow{D_t} & \tau_t(X)/\tau_t(T)
\end{array}$$

[2] Я узнал эту формулу от Е. В. Троицкого.

Здесь вертикальные стрелки – очевидные изоморфизмы (сужения проекций). Для изоморфизмов $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$ и $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ построим оператор $r(p,q) \in \mathrm{O}(\tau_t(T) \oplus \mathbb{R})$, соединяя ортогональные изоморфизмы

$$\phi(I(p))\colon \tau_t(X) \ominus \operatorname{im} a_t \to \tau_t(X) \ominus \tau_t(T), \quad -(\kappa(a_t)p)^{-1}\colon \operatorname{im} a_t \to \mathbb{R}$$

и $q\colon \mathbb{R} \to \tau_t(T)$. Для изоморфизма $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ возьмем тот изоморфизм $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$, при котором $\det r(p,q) = 1$, и положим $R_t(q) = r(p,q)$.

Остальная часть параграфа нужна только для доказательства леммы 8.7.

Конструкция $\mathrm{N}\colon (Y,c,b) \mapsto (U,t,S)$**.** Пусть даны риманов кобордизм Y^{n+1}, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n > 1$, тонкая структура c на нем и невырожденный линейный морфизм $b\colon \epsilon_Y^{\mathbb{C}} \to \ker c$. Пусть

$$\mathrm{K}\colon (Y, \epsilon_Y^{\mathbb{C}}, \ker c, b) \mapsto (U^2, E).$$

Полагая $\partial_\pm U = U \cap \partial_\pm Y$, сделаем ∂-многообразие U кобордизмом.

Определим ортогональный мономорфизм

$$t\colon \tau(U) \to \tau_U(Y) \oplus \epsilon_U,$$

полагая $t_u(f) = (f,0)$, $f \in \tau_u(U)$, $u \in U$.

Построим t-морфизм

$$S\colon \mathrm{P}(\tau(U)) \to \mathrm{SO}(\tau_U(Y) \oplus \epsilon_U).$$

Возьмем точку $u \in U$. Для изоморфизма $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$ определим изоморфизм $I(p)$ следующей коммутативной диаграммой.

$$\begin{array}{ccccc}
\ker c_u \ominus \operatorname{im} b_u & & \xrightarrow{I(p)} & & \tau_u(Y) \ominus \tau_u(U) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\operatorname{coker} b_u & \xrightarrow{\iota(p)^{-1}} & \operatorname{Hom}(\ker b_u, \operatorname{coker} b_u) & \xrightarrow{E_u} & \tau_u(Y)/\tau_u(U)
\end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки – очевидные изоморфизмы (сужения проекций). Для изоморфизмов $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$ и $q \in \mathrm{P}(\tau_u(U))$ построим ортогональный изоморфизм

$$r(p,q)\colon \ker c_u \oplus \mathbb{R}^2 \to \tau_u(Y) \oplus \mathbb{R},$$

соединяя ортогональные изоморфизмы

$$\phi(I(p))\colon \ker c_u \ominus \operatorname{im} b_u \to \tau_u(Y) \ominus \tau_u(U), \quad (\kappa(b_u)p)^{-1}\colon \operatorname{im} b_u \to \mathbb{R}$$

и $q\colon \mathbb{R}^2 \to \tau_u(U)$, и определим оператор

$$s(p,q) \in \mathrm{O}(\tau_u(Y) \oplus \mathbb{R})$$

формулой $s(p,q) = r(p,q)\,\mathrm{W}(Y,c)_u^{-1}$. Для изоморфизма $q \in \mathrm{P}(\tau_u(U))$ возьмем тот изоморфизм $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$, при котором $\det s(p,q) = 1$, и положим $S_u(q) = s(p,q)$.

7.1. *Пусть* $\mathrm{N}\colon (Y,c,b) \mapsto (U,t,S)$, $X = \partial Y$ *и* $\mathrm{M}\colon (X,b_X) \mapsto (T,s,R)$. *Тогда* $T = \partial U$.

Если $\tau_T(Y) \ominus \tau_T(X) \subset \tau_T(U)$, *то* $\mathrm{w}(Y)_T s^+ = t_T\,\mathrm{v}(U)$ *и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(\tau(T) \oplus \epsilon_T) & \xrightarrow{R^+} & \mathrm{SO}(\tau_T(X) \oplus \epsilon_T^2) \\ {\scriptstyle \mathrm{v}(U)_*}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\mathrm{w}(Y)_T)_*} \\ \mathrm{P}(\tau_T(U)) & \xrightarrow{S_T} & \mathrm{SO}(\tau_T(Y) \oplus \epsilon_T) \end{array}$$

коммутативна.

Это следует из построения и 6.1. $\square$

§8. Нахождение полухарактеристики многообразия

Цель этого параграфа – доказательство леммы 8.7.

Гомоморфизм j_n. Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Формула $[T,\Sigma] \mapsto \mathsf{j}(T,\Sigma)$ определяет гомоморфизм $j_n\colon \Pi_1^n \to \mathbb{Z}_2$ [5].

Гомоморфизм k_n. Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Формула $[X] \mapsto \mathsf{k}(X)$ определяет гомоморфизм $k_n\colon \omega_n \to \mathbb{Z}_2$ [3, Theorem 12.1].

Гомоморфизм h_n (ср. [3, Theorem 13.4]). Пусть $n \equiv 1 \pmod 2$. Построим гомоморфизм $h_n\colon \omega_n \to \Pi_1^n$.

Пусть дано компактное ориентированное многообразие X^n. Снабдим его римановой структурой и выберем невырожденный линейный морфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbb{C}} \to \tau(X)$. Пусть $\mathrm{M}\colon (X,a) \to (T^1,s,R)$. Положим $h_n([X]) = [T,\Gamma(s,R)]$.

Проверим корректность. Пусть даны ориентированный кобордизм Y^{n+1} и тонкая структура c на нем; пусть ориентированные многообразия $X_\pm = \partial_\pm Y$ снабжены римановой структурой и пусть

$$\mathrm{M}\colon (X_\pm, a_\pm) \mapsto (T_\pm^1, s_\pm, R_\pm).$$

Покажем, что пары $(T_\pm, \Gamma(s_\pm, R_\pm))$ Pin^n-кобордантны. Пусть $n > 1$ (рассмотрение случая $n = 1$ опускается). Продолжим морфизмы $a_\pm$ до невырожденного линейного морфизма $b\colon \epsilon_Y^{\mathbb{C}} \to \ker c$. Продолжим риманову структуру с края на все ∂-многообразие Y. Пусть $\mathrm{N}\colon (Y, c, b) \mapsto (U^2, t, S)$. Тогда $\partial_\pm U = T_\pm$. Будем считать, что $\tau_{\partial U}(Y) \ominus \tau_{\partial U}(X) \subset \tau_{\partial U}(U)$ (это можно было обеспечить при выборе продолжения римановой структуры, так как поверхность U от него не зависит). Из 7.1 (с учетом того, что изоморфизм $\mathrm{w}(Y)$ сохраняет ориентацию) и 3.1 следует, что Pin^n-структуры $\Gamma(s_\pm, R_\pm)$ и $\partial_\pm \Gamma(t, S)$ изоморфны. Корректность проверена. Аддитивность отображения h_n очевидна.

8.1. *Любой элемент группы ω_n, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \geqslant 5$, представи́м односвязным многообразием.*

Доказательство. Пусть X^n – компактное ориентированное многообразие. Приклеивая к кобордизму $X \times [-1, 1]$ ручки индексов 0, 1 и 2, построим односвязный ориентированный кобордизм Y. Добавляя ручки индекса 2 или 3, сделаем его эйлерову характеристику равной 0. По теореме Пуанкаре–Хопфа кобордизм Y допускает тонкую структуру. Многообразие $\partial_+ Y$ односвязно, так как кобордизм Y односвязен, а "коиндексы" всех ручек не меньше 3. $\square$

8.2. *Односвязное компактное ориентированное многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 4$, с $\kappa(X) = 0$ допускает мономорфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbb{C}} \to \tau(X)$.*

Это следует из [4, Тхеорем 5.1]. $\square$

8.3. *Если компактное многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 2$, допускает мономорфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbb{C}} \to \tau(X)$, то $h_n([X]) = 0$.* $\square$

8.4. *Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $\ker k_n \subset \ker h_n$.*

Можно проверить, что $\ker k_1 = 0$. При $n \geqslant 5$ утверждение следует из 8.1, 8.2 и 8.3. $\square$

Положим $S^n = \{\, t \in \mathbb{R}^{n+1} : |t| = 1 \,\}$ – со стандартной ориентацией.

8.5. *Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $j_n \circ h_n([S^n]) = 1$.*

Доказательство. Пусть $F\colon S^n \to \mathbb{C}$ – сужение сюръективного линейного отображения $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Определим невырожденный линейный морфизм $a\colon \epsilon_{S^n}^{\mathbb{C}} \to \tau(S^n)$, полагая $a_x = (d_x F)^*$, $x \in S^n$.

Пусть $\mathrm{M}\colon (S^n, a) \mapsto (T, s, R)$ и $\Gamma(s, R) = (\sigma, p)$. Тогда T – окружность, и, как нетрудно понять, накрытие σ тривиально. $\square$

8.6. *Пусть* $n \equiv 1 \pmod 4$. *Тогда* $k_n = j_n \circ h_n$.

Это следует из 8.4 и 8.5. $\square$

8.7. Лемма. *Пусть* $\mathrm{M}\colon (X^n, a) \mapsto (T, s, R)$, $n \equiv 1 \pmod 4$, *и многообразие* X *ориентировано. Тогда* $\mathsf{k}(X) = \mathsf{j}(T, \Gamma(s, R))$.

Это следует из 8.6. $\square$

Вопрос. Как найти полухарактеристику многообразия по множеству критических значений его общего отображения в плоскость? (Можно учитывать какие-нибудь “метки” на этом множестве.)

§9. Полухарактеристика подмногообразий

Конструкция $\Phi\colon (V, A, F, L, X) \mapsto (T, f, g)$**.** Пусть даны риманово многообразие V, линейный морфизм $A\colon \epsilon_V^{\mathbb{C}} \to \tau(V)$, гладкое отображение $F\colon V \to \mathbb{C}$, линейный морфизм

$$L\colon \operatorname{Cliff}_0(\tau(V) \oplus \epsilon_V) \to \epsilon_V$$

и компактное ориентированное подмногообразие $X^n \subset V$, $n \equiv 1 \pmod 4$. Пусть $p\colon \tau_X(V) \to \tau(X)$ – морфизм ортогональной проекции. Предположим, что линейный морфизм $a = pA_X$ невырожден. Пусть $\mathrm{M}\colon (X, a) \mapsto (T^1, s, R)$. Считая, что

$$\operatorname{Cliff}_0(\tau(X) \oplus \epsilon_X) \subset \operatorname{Cliff}_0(\tau_X(V) \oplus \epsilon_X)$$

(подразумевается мономорфизм, индуцированный морфизмом включения $\tau(X) \to \tau_X(V)$), определим комплексно-линейный морфизм

$$l\colon \operatorname{Cliff}_0(\tau(X) \oplus \epsilon_X) \to \epsilon_X^{\mathbb{C}},$$

полагая

$$l_x(u) = (L_x(u) - iL_x(iu))/2, \quad u \in \operatorname{Cliff}_0(\tau_x(X) \oplus \mathbb{R}), \quad x \in X.$$

Предположим, что $f = F|T$ – погружение. Пусть $\Theta\colon (T, \tau_T(X) \oplus \epsilon_T, s, R, l, f) \mapsto g$ (предположим, что это построение выполнимо).

9.1. *Пусть* $\Phi\colon (V, A, F, L, X^n) \mapsto (T^1, f, g)$. *Предположим, что погружение* f *самотрансверсально. Тогда* $\mathsf{k}(X) = \delta_2(f) + \deg_2 g$.

Это следует из лемм 8.7 и 4.1. $\square$

9.2. *Пусть* $\Phi\colon (V,A,F,L,X_j)\mapsto (T_j,f_j,g_j)$, $j=1,2$. *Пусть* $O\subset V$ *– открытое множество. Тогда если* $X_1\cap O = X_2\cap O$ *(с учетом ориентаций), то* $T_1\cap O=T_2\cap O$ *и на этом множестве* $f_1=f_2$ *и* $g_1=g_2$. □

9.3. *Пусть* V *– риманово многообразие,* $X_j^n\subset V$, $n\equiv 1 \pmod 4$, $j=1,\dots,N$, *– набор компактных ориентированных подмногообразий. Тогда существуют линейный морфизм* $A\colon \epsilon_V^{\mathbb{C}}\to\tau(V)$, *гладкое отображение* $F\colon V\to\mathbb{C}$ *и линейный морфизм*

$$L\colon \operatorname{Cliff}_0(\tau(V)\oplus\epsilon_V)\to\epsilon_V$$

такие, что построения

$$\Phi\colon (V,A,F,L,X_j)\mapsto (T_j,f_j,g_j),\quad j=1,\dots,N,$$

выполнимы и получающиеся погружения f_j *самотрансверсальны.*

Достаточно взять общую тройку (A,F,L). □

Доказательство теоремы 0.2. Снабдим многообразие V римановой структурой. Используем 9.3: пусть

$$\Phi\colon (V,A,F,L,X_j)\mapsto (T_j,f_j,g_j),\quad j=1,\dots,N,$$

причем погружения f_j самотрансверсальны. Пусть $c\in C$ – регулярное значение отображений g_j, $j=1,\dots,N$. По 9.1,

$$\mathsf{\kappa}(X_j)=\delta_2(f_j)+|g_j^{-1}(c)|_2,\quad j=1,\dots,N.$$

В силу 9.2 из предположения теоремы следует, что при суммировании по индексу j каждое из слагаемых дает 0. □

Литература

1. М. Ф. Атья, И. М. Зингер, *Индекс эллиптических операторов.* V. — Успехи мат. наук **27**, No. 4 (1972), 179–188.
2. U. Karras, M. Kreck, W. D. Neumann, E. Ossa, *Cutting and pasting of manifolds; SK-groups.* Boston, Publish or Perish, Inc. (1973).
3. U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle morphisms – a singularity approach.* Lect. Notes Math., **847** (1981).
4. M. F. Atiyah, *Vector fields on manifolds.* Arbeitsgemeinschaft Forsch. Nordrhein-Westfalen, Heft 200 (1970).
5. R. C. Kirby, L. R. Taylor, Pin *structures on low-dimensional manifolds.* — London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **151** (1990), 177–242.
6. Н. Кейпер, *Гомотопический тип унитарной группы гильбертова пространства.* — В кн.: М. Атья, Лекции по K-теории, Мир, М. (1967).

Podkorytov S. S. Quadratic property of the rational semicharacteristic.

Let $n \equiv 1 \pmod 4$. Let V be a manifold, $\mathbf{E}_n(V)$ the set of germs of n-dimensional oriented submanifolds of V, and $!\mathbf{E}_n(V)$ the $\mathbb{Z}_2$-module of all $\mathbb{Z}_2$-valued functions on $\mathbf{E}_n(V)$. For a oriented submanifold $X^n \subset V$ let $\mathbf{1}(X) \in {!\mathbf{E}_n(V)}$ be the indicator function of the set of germs of X.

It is proved that there exists a quadratic map $q\colon {!\mathbf{E}_n(V)} \to \mathbb{Z}_2$ such that for any compact oriented submanifold $X^n \subset V$ one has the relation $q(\mathbf{1}(X)) = \kappa(X)$, where $\kappa(X)$ is the (*rational*) *semicharacteristic* of X^n, i.e., the residue class defined by the formula

$$\kappa(X) = \sum_{r \equiv 0 \pmod 2} \dim H_r(X; \mathbb{Q}) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2.$$

С.-Петербургское
отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
email ssp@r410.pdmi.ras.ru

Поступило 19 февраля 2000 г.