Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБЩИХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПАРЫ МАТРИЦ

1. Введение

Пусть заданы комплексные $n \times n$ – матрицы A и B. Можно ли установить наличие (или отсутствие) общего инвариантного подпространства размерности $p, 1 \leq p < n$, посредством процедуры, использующей лишь конечное число арифметических операций с элементами матриц? (Именно такие процедуры мы называем рациональными.) Легко предложить достаточное рациональное проверяемое условие – это коммутируемость матриц A и B. Как известно, в этом случае матрицы имеют общие инвариантные подпространства любой размерности. Однако и некоммутирующие матрицы могут иметь нетривиальное общее инвариантное подпространство. Для размерности $p = 1$ рациональное необходимое и достаточное условие получено в [1] (см. также обзор [2]). Дальнейшее продвижение в задаче об общих собственных подпространствах оказалось связанным с изучением подалгебры $\mathcal{A}(A, B)$, порождаемой матрицами A и B в полной подалгебре M_n комплексных матриц порядка n. Существенную роль, как видно из дальнейшего изложения (следующего статьям [3–7]), играют свойства полупростоты, понятия радикала и цоколя алгебры $\mathcal{A}(A, B)$.

Характер изложения таков, что во многих случаях мы ограничиваемся формулировкой результата, его обсуждением и ссылкой на более полные источники. Как это часто делается, мы отождествляем матрицу A с линейным оператором в пространстве комплексных столбцов $\mathbf{C}^n$, действующим по правилу $x \mapsto Ax$. Все подпространства, упоминаемые в статье, лежат в $\mathbf{C}^n$; это не будет специально оговариваться. Сведения из теории алгебр приводятся лишь в той общности, которая нужна для наших целей, – для ассоциативных алгебр комплексных матриц конечного порядка. В более общем виде эта теория изложена в книгах [8–

11].

2. Критерий Шемеша. Конденсированная форма пары матриц и её приложения

Мы начнём с вопроса о существовании одномерного общего инвариантного подпространства, иначе говоря, общего собственного вектора, двух матриц. Удивительно, но этот естественный вопрос был поставлен и решён сравнительно (с возрастом линейной алгебры) недавно [1]. Приведём это решение.

Теорема 1. *Общий собственный вектор для A и B существует тогда и только тогда, когда подпространство*

$$\mathcal{N}_1 = \bigcap_{k,l=1}^{n-1} \ker\left[A^k, B^l\right] \tag{1}$$

имеет положительную размерность.

Символ $[F, G]$ есть стандартное обозначение коммутатора $FG-GF$ матриц G и F. Подлинный смысл подпространства $\mathcal{N}_1$ выражается замечанием из [?], которое мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Подпространство $\mathcal{N}_1$ инвариантно относительно обеих матриц A и B, причём A и B перестановочны на $\mathcal{N}_1$. Всякое общее инвариантное подпространство для A и B, на котором эти матрицы перестановочны, содержится в $\mathcal{N}_1$.*

Скажем, что матрицы A и B частично коммутируют, если они имеют общий собственный вектор, то есть, если пространство $\mathcal{N}_1$ имеет положительную размерность.

Существенно, что подпространство $\mathcal{N}_1$ находится рационально: вычисление его базиса сводится к решению системы линейных уравнений $Lx = 0$ с матрицей коэффициентов

$$L = \begin{bmatrix} [A, B] \\ \vdots \\ \left[A^{n-1}, B^{n-1}\right] \end{bmatrix},$$

составленной из коммутаторов, входящих в формулу (1).

Мы используем теорему 2 для приведения матриц A и B посредством одного подобия к специальной блочно-треугольной форме.

Теорема 3 [3]. *Пусть A и B – частично коммутирующие матрицы. Тогда существует подобие P, приводящее эти матрицы к виду*

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1,k-1} & R_{1,k} \\ & R_{22} & \dots & R_{2,k-1} & R_{2,k} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & R_{k-1,k-1} & R_{k-1,k} \\ & & & & R_{kk} \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1,k-1} & S_{1,k} \\ & S_{22} & \dots & S_{2,k-1} & S_{2,k} \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & S_{k-1,k-1} & S_{k-1,k} \\ & & & & S_{kk} \end{bmatrix},$$

где диагональные блоки R_{ii}, S_{ii} $(i = 1, ..., k-1)$ коммутируют, а блоки R_{kk}, S_{kk} либо коммутируют, либо не имеют общего собственного вектора (то есть не частично коммутируют). Матрица P вычисляется рационально.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что, выбрав матрицу подобия P_1 так, чтобы первые ее столбцы составляли базис в $\mathcal{N}_1$, получим следующие подобные формы для A и B:

$$R_1 = P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & \tilde{R}_{12} \\ 0 & \tilde{R}_{22} \end{bmatrix}, \quad S_1 = P_1^{-1} B P_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & \tilde{S}_{12} \\ 0 & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix}.$$

Здесь R_{11}, S_{11} – матрицы сужения операторов A и B на инвариантное подпространство $\mathcal{N}_1$. Матрицы R_{11}, S_{11} коммутируют.

Если матрицы $\tilde{R}_{11}, \tilde{S}_{11}$ частично коммутируют, то применим к ним аналогичное преобразование подобия. Составив подходящую матрицу P_2 для матриц R_1, S_1 , получим на втором шаге такие подобные формы для A и B:

$$R_2 = P_2^{-1} R_1 P_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \tilde{R}_{13} \\ 0 & R_{22} & \tilde{R}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{R}_{33} \end{bmatrix},$$

$$S_2 = P_2^{-1} S_1 P_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \tilde{S}_{13} \\ 0 & S_{22} & \tilde{S}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{33} \end{bmatrix},$$

где пары R_{11}, S_{11} и R_{22}, S_{22} коммутируют. Коммутатор $[R_2, S_2]$ имеет блочный вид

$$\begin{bmatrix} 0 & C_{12} & \tilde{C}_{13} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $C_{12} \neq 0$. Действительно, противное предположение равносильно тому, что подматрицы

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}.$$

перестановочны. Но если так, то имеется инвариантное для A и B подпространство, собственно содержащее подпространство $\mathcal{N}_1$, и такое, на котором A и B коммутируют. Это противоречит теореме 2.

Продолжая процедуру выделения коммутирующих блоков, пока это возможно, получим описанные в формулировке теоремы матрицы R и S. Матрицы $P_1, P_2, ..., P_{k-1}$ вычисляются, как видно из их определения, рационально. Следовательно, и результирующая матрица подобия $P = P_1 P_2 \cdot ... \cdot P_{k-1}$ вычисляется рационально.

Если блоки R_{kk}, S_{kk} коммутируют, то будем говорить, что матрицы A и B приводятся к конденсированной форме (a), если же они не частично коммутируют, – что A и B приводятся к конденсированной форме (b).

Из доказательства теоремы видно, что в выборе матриц P_1, $P_2, \ldots$ имеется произвол, следовательно, конденсированные формы определяются не единственным образом. Но порядки диагональных блоков и число k не зависят от этого произвола. Назовём число k индексом конденсированной формы. Если A и B коммутируют, положим $k = 1$.

Рассмотрим коммутатор конденсированных форм

$$T = [R, S] = \begin{bmatrix} 0 & T_{12} & \ldots & T_{1,k-1} & T_{1,k} \\ & 0 & \ldots & T_{1,k-1} & T_{1,k} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 0 & T_{k-1,k} \\ & & & & T_{k,k} \end{bmatrix}.$$

Здесь $T_{12}, ..., T_{k-2,k-1}$ – ненулевые блоки, а блоки $T_{k-1,k}, T_{k,k}$ не могут быть нулевыми одновременно. Из этого наблюдения следует приводимая ниже оценка для ранга коммутатора.

Теорема 4 [3]. *Пусть A и B – частично коммутирующие матрицы с индексом конденсированной формы, равным k. Тогда*

$$\mathrm{rank}[A, B] \geq k - 1.$$

Рассмотрим два применения конденсированной формы.

1. Проблема триангулируемости пары матриц. Вопрос о том, можно ли две матрицы одним подобием привести к треугольному виду – один из старых вопросов линейной алгебры. Известен критерий Маккоя [12, 13]:

Теорема 5. *Матрицы A и B одновременно триангулируемы тогда и только тогда, когда матрица*

$$p(A, B)[A, B] \qquad (2)$$

нильпотентна для всякого многочлена $p(s, t)$ с комплексными коэффициентами от некоммутирующих переменных s и t.

Условие теоремы Маккоя предполагает проверку нильпотентности бесконечного числа матриц (2). Более элементарное доказательство этой теоремы [14, 15] также не содержит рациональной процедуры проверки выполнения условия теоремы. Следующее утверждение показывает, что такой процедурой является процесс приведения пары A, B к конденсированной форме.

Теорема 6. *Матрицы A и B тогда и только тогда одновременно триангулируемы, когда они приводятся к конденсированной форме* (a).

Доказательство. Достаточность. Пусть Q_i – матрица подобия, приводящая коммутирующие блоки R_{ii}, S_{ii} к треугольному виду. Тогда блочно-диагональная матрица $\mathrm{diag}(Q_1, ..., Q_k)$ триангулирует A и B.

Необходимость. Пусть A и B совместно триангулируемы. Тогда они, очевидно, частично коммутируют. Докажем, что процесс, описанный в доказательстве теоремы 3, приводит эти матрицы именно к форме (a). Допустим противное: итогом работы алгоритма является форма (b) – матрицы R_{kk}, S_{kk} не имеют общего собственного вектора. Матрицы, не имеющие общего собственного вектора, не могут быть одновременно триангулируемы. Для них, согласно теореме 5, найдётся такой многочлен

$p_0(s,t)$, что матрица $p_0(R_{kk}, S_{kk})[R_{kk}, S_{kk}]$ ненильпотентна. Но тогда и матрица $p_0(R,S)[R,S]$ ненильпотентна, и то же верно, если в последнем выражении матрицы R и S заменить на подобные им матрицы A и B соответственно. Получили, ! что для A и B не выполнено условие теоремы Маккоя, что противоречит предположению о совместной триангулируемости A и B.

Другой метод рационального разрешения вопроса об одновременной триангулируемости, связанный с алгебрами Ли и идеалами ассоциативных алгебр см. в [16].

2. Пары Лаффея. Ещё одно применение конденсированной формы относится к замечательному результату Лаффея [17]:

Теорема 7. *Если* $\operatorname{rank}[A,B] = 1$ *(в этом случае мы говорим, что A и B составляют пару Лаффея), то матрицы A и B совместно триангулируемы.*

Оказывается, что пары Лаффея имеют особенно простую конденсированную форму.

Теорема 8 [3]. *. Пусть A, B – пара Лаффея. Тогда она приводится к форме* (a) *вида*

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. То, что пара Лаффея приводится к форме (a), немедленно следует из теорем 6 и 7. Осталось доказать, что индекс формы равен двум. Применяя теорему 4 к нашему случаю, получим

$$k - 1 \le \operatorname{rank}[A,B] = 1 \quad \Rightarrow \quad k \le 2.$$

Поскольку A и B не коммутируют ($k \neq 1$), имеем ($k = 2$).

Замечание. Если ранг коммутатора интерпретировать как меру перестановочности матриц, то пары Лаффея – ближайшие к коммутируемости. Теорема 2 поддерживает эту характеристику с другой точки зрения. А именно, пары Лаффея имеют наименьший индекс конденсированной формы среди некоммутирующих пар.

3. Стандартные многочлены. Обобщение теоремы Шемеша

Теорема 2 может быть обобщена с помощью понятия стандартного многочлена. Напомним, что стандартным многочленом степени r называется многочлен от некоммутирующих переменных $x_1, ..., x_r$ следующего вида

$$S_r(x_1, ..., x_r) = \sum(\mathrm{sign}(\sigma))x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(r)}.$$

Здесь суммирование производится по всем перестановкам из символов 1,...,р. В частности, при $r = 2$,

$$S_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1.$$

Согласно классической теореме Амицура–Левицкого [9] для любого набора матриц $C_1, ..., C_{2k} \in M_l$, $l \leq k$ справедливо равенство

$$S_{2k}(C_1, ...C_{2k}) = 0.$$

При этом для любого l, $l \geq k+1$, существует набор $G_1, ..., G_{2k}$ матриц порядка l, для которого

$$S_{2k}(G_1, ..., G_{2k}) \neq 0.$$

Другими словами, алгебра M_l удовлетворяет тождеству ! $S_{2k} = 0$ при $l \leq k$, ! и не удовлетворяет при $l \geq k+1$.

Матрицы $p(A, B)$ (см. формулировку теоремы 5) составляют подалгебру полной матричной алгебры M_n, порожденную матрицами A, B. Обозначим эту подалгебру $\mathcal{A} = A(A, B)$. Иначе можно определить $\mathcal{A}$ как наименьшее (относительно включения) подмножество M_n, содержащее матрицы I, A, B и замкнутое относительно умножения и сложения матриц и умножения матриц на комплексные числа. Если подпространство инвариантно относительно матриц A и B, то оно, понятно, инвариантно относительно любой матрицы из $\mathcal{A}(A, B)$, то есть, инвариантно относительно алгебры $\mathcal{A}$. Согласно теореме Бернсайда (см., например, [8]), подалгебра алгебры M_n не имеет нетривиальных инвариантных подпространств только тогда, когда она совпадает с M_n.

Рассмотрим сужения операторов из $\mathcal{A}(A, B)$ на инвариантное подпространство L. Эти сужения образуют алгебру, которую мы обозначим $\mathcal{A}|L$. Последняя порождается матрицами $A|L$ и $B|L$ и может рассматриваться как подалгебра в M_p, где $p = \dim L$. Она совпадает с M_p, как следует из теоремы Бернсайда, только в том случае, когда L не содержит $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств, отличных от $\{o\}$ и L. В последнем случае говорят, что L – неприводимое инвариантное подпространство.

Справедливо следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 9 [4, 5]. *Положим*

$$\mathcal{N}_k = \cap \ker(S_{2k}(C_1, ..., C_{2k})C_{2k+1}, \tag{3}$$

где пересечение берется по всевозможным наборам матриц $C_1, ...,$ $C_{2k+1} \in \mathcal{A}(A, B)$. Пространство $\mathcal{N}_k$ представляет собой инвариантное подпространство алгебры $\mathcal{A}$, на котором эта алгебра удовлетворяет тождеству $S_{2k} = 0$. Последнее означает, что для всех $x \in \mathcal{N}_k$

$$S_{2k}(C_1, ..., C_{2k})x = 0 \; \forall C_1, ..., C_{2k} \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

Всякое инвариантное подпространство, на котором выполняется тождество $S_{2k} = 0$, содержится в $\mathcal{N}_k$.

При $k = 1$ формула 3 дает описание $\mathcal{N}_1$, отличное от формулы (1)

$$\mathcal{N}_1 = \cap \ker([C_1, C_2]C_3) \; ! \;\; \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{A}.$$

Поскольку функция S_{2k} линейна по каждому аргументу, то, чтобы определить подпространство $\mathcal{N}_k$, пересечение в (3) достаточно организовать по конечному множеству наборов $C_1, ...,$ C_{2k+1}, в которых каждое C_i, независимо от прочих пробегает элементы некоторого базиса алгебры $\mathcal{A}$. Как показано в [3], базис $\mathcal{A}(A, B)$ вычисляется рационально. Рассуждение, аналогичное проведённому ранее для $\mathcal{N}_1$, сводит вычисления базиса $\mathcal{N}_k$ к решению некоторой системы линейных однородных уравнений. Таким образом, $\mathcal{N}_k$ вычисляется рационально. Отметим очевидные включения:

$$\{0\} \equiv \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_1 \subset ... \subset \mathcal{N}_n = \mathbf{C}^n \tag{5}$$

Из следующих теорем выясняется польза подпространств $\mathcal{N}_k$ для исследования проблемы инвариантных подпространств.

Теорема 10. *Пусть подпространство L инвариантно относительно алгебры $\mathcal{A}(A, B)$. Тогда*

1) *если* $\dim L \leq k$, *то* $L \subseteq N_k$,

2) *если* $\dim L \geq k+1$, *и* L *неприводимо, то* $L \nsubseteq N_k$.

Доказательство. В случае 1) алгебра $A|L$ как подалгебра M_l, где $l = \dim L$, удовлетворяет тождеству $S_{2k} = 0$. Следовательно, равенства (4) верны для всех $x \in L$, и по теореме 9 $L \subseteq \mathcal{N}_k$. В случае же 2) подалгебра $A|L$ совпадает с M_l, и в силу теоремы Амицура–Левицкого не удовлетворяет тождеству $S_{2k} = 0$. Но тогда теорема 9 влечёт, что $L \nsubseteq N_k$.

Теперь легко доказать обобщение теоремы 1.

Теорема 11. *Ненулевое* $\mathcal{A}(A, B)$*-инвариантное подпространство размерности, не превосходящей* k*, существует тогда и только тогда, когда* $\mathcal{N}_k \neq \{0\}$.

Действительно, если такое подпространство есть, то оно, как утверждается в теореме 10, содержится в $\mathcal{N}_k$. Следовательно, $\mathcal{N}_k \neq 0$. Наоборот, пусть $\mathcal{N}_k \neq 0$. Подпространство $\mathcal{N}_k$ содержит ненулевое неприводимое подпространство, размерность которого, согласно теореме 10, не превышает k.

Вопрос о том, имеет ли алгебра $\mathcal{A}$ инвариантное подпространство размерности, в точности равной k, оказывается более трудным. Рациональный алгоритм, решающий этот вопрос, предложен в [18], однако, этот алгоритм содержит существенное ограничение: хотя бы одна из двух матриц, порождающих алгебру, не должна иметь кратных собственных значений. Для матриц общего положения мы докажем рациональную разрешимость двух вопросов:

а) существует ли неприводимое инвариантное k-мерное подпространство,

б) существует ли 2-мерное инвариантное подпространство.

Вначале займёмся полупростыми алгебрами.

4. Случай полупростых алгебр и $*$-алгебр

Матрица $C \in \mathcal{A}$ называется собственно нильпотентным элементом алгебры $\mathcal{A}$, если матрица CQ нильпотентна при всякой матрице $Q \in \mathcal{A}$. Совокупность R собственно нильпотентных матриц называется радикалом алгебры $\mathcal{A}$. Если радикал состоит лишь из нулевой матрицы, то алгебра называется полупростой. Используя известные свойства следа, радикал можно описать (см., например, [10]), как множество матриц $C \in \mathcal{A}$, для которых

$$\operatorname{tr}(CQ) = 0 \ \forall Q \in \mathcal{A}.$$

Если известен базис $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_t$ алгебры, то достаточно проверить равенства $\mathrm{tr}(C\mathcal{E}_j) = 0, j = 1, ..., t$. Для принадлежности матрицы $C = x_1\mathcal{E}_1 + ... + x_t\mathcal{E}_t$ радикалу необходимо и достаточно, чтобы числа $x_1, ..., x_t$ были решением системы линейных уравнений

$$\mathrm{tr}((\sum_{i=1}^{t} x_i\mathcal{E}_i)\mathcal{E}_j) = 0, j = 1, ..., t,$$

Полупростота, стало быть, равносильна невырожденности матрицы коэффициентов $(\mathrm{tr}\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j)$.

Поскольку базис алгебры $\mathcal{A}(A, B)$ находится рационально, а при известном базисе вычисление радикала сводится к решению системы линейных уравнений, то отсюда заключаем, что вычисление радикала алгебры $\mathcal{A}(A, B)$ и, в частности, установление ее полупростоты, – рационально разрешимая задача.

Нам потребуется еще следующая геометрическая характеризация полупростоты: если L и U – инвариантные подпространства алгебры и $L \subseteq U$, то существует инвариантное прямое дополнение L до U. Отсюда следует, что в полупростом случае всякое инвариантное подпространство есть прямая сумма неприводимых инвариантных подпространств.

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{A}(A, B)$ – полупростая алгебра. Неприводимое $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство размерности k существует тогда и только тогда, когда* $\dim\mathcal{N}_{k-1} < \dim\mathcal{N}_k$.

Доказательство. Пусть указанное в теореме подпространство существует. По теореме 10 оно содержится в $\mathcal{N}_k$, но не лежит в $\mathcal{N}_{k-1}$. Следовательно, $\dim\mathcal{N}_{k-1} < \dim\mathcal{N}_k$. Наоборот, пусть выполнено последнее неравенство, и пусть Φ_k – такое инвариантное подпространство, что

$$\mathcal{N}_{k-1} \oplus \Phi_k = \mathcal{N}_k. \tag{6}$$

Из той же теоремы 10 следует, что все неприводимые инвариантные подпространства, лежащие в Φ_k, имеют размерность k, и это завершает доказательство.

Поскольку базисы, а значит и размерности подпространств $\mathcal{N}_k$ вычисляются рационально, то условие теоремы 12 рационально проверяемо. Нетрудно вычислить и число слагаемых в разложении Φ_k в прямую сумму k-мерных подпространств: оно равно $\dim \Phi_k/k$. Из формулы (6) явствует, что $\dim \Phi_k = \dim \mathcal{N}_k - \dim \mathcal{N}_{k-1}$.

Рассмотрим важный частный случай полупростых алгебр – $*$-алгебры. Последние характеризуются тем свойством, что вместе с каждым своим элементом G содержат сопряженную к G матрицу G^*. Пространство $\mathbf{C}^n$ будем теперь считать унитарным, со стандартным скалярным произведением. Еще одно свойство, характеризующее $*$-алгебры, состоит в следующем. Если L и U инвариантные подпространства, и $L \subseteq U$, то ортогональное дополнение L до U тоже инвариантно. В частности, Φ_k есть ортогональное дополнение $\mathcal{N}_{k-1}$ до $\mathcal{N}_k$. Поскольку последние два подпространства вычисляются рационально, то и Φ_k рационально вычислимо. Таким образом, рационально вычислимо ортогональное разложение

$$\mathbf{C}^n = \Phi_{k_1} \oplus \Phi_{k_2} \oplus \cdots \oplus \Phi_{k_f} \tag{7}$$

(мы учитываем здесь только ненулевые слагаемые).

Разложению (7) соответствуют (также рационально вычислимые) блочно-диагональные формы матриц A и B:

$$A \sim A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_f, \quad B \sim B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_f \tag{8}$$

(символ $\sim$ обозначает унитарное подобие). Поскольку подпространство Φ_{k_i} разлагается в ортогональную сумму подпространств размерности k_i, то пара A_i, B_i $(i = 1, \ldots, f)$ одним унитарным подобием приводится к прямой сумме блоков порядка k_i:

$$A_i \sim A_{i1} \oplus A_{i2} \oplus \cdots \oplus A_{il_i}, \quad B_i \sim B_{i1} \oplus B_{i2} \oplus \cdots \oplus B_{il_i}. \tag{9}$$

Суммы (9) в общем случае рационально не вычисляются. Если, например, $A = B$, и A – нормальная матрица, то (9) есть спектральное разложение A, которое, как правило, не вычисляется даже в радикалах. Однако, можно указать следующую вычислимую характеристику разложений (9). Пусть μ_i – максимальное число пар в последовательности (A_{im}, B_{im}), $m = 1, \ldots, l_i$, не переводящихся друг в друга одним унитарным подобием. Тогда согласно обобщенной теореме Бернсайда [8] $\dim \mathcal{A}(A_i, B_i) = \mu_i k_i^2$. Левая часть этого равенства рационально вычислима. Следовательно, и число μ_i рационально вычислимо.

Интересный пример $*$-алгебр представляют алгебры $\mathcal{A}(A, A^*)$, исследованные в [19, 20, 6]. В данном параграфе мы, в основном, следуем [6], но изложение ведется для более общего случая $*$-алгебр $\mathcal{A}(A,B)$. Приведем два специфических для алгебр $\mathcal{A}(A,A^*)$ свойства.

А именно, для таких алгебр подпространство $\mathcal{N}_1$ имеет смысл наибольшего общего инвариантного подпространства матриц A и A^*, на котором сужение A есть нормальноая матрица.

Кроме того, верна

Теорема 13 [20]. *Пусть d – число различных собственных значений матрицы A порядка n. Матрица A тогда и только тогда будет нормальной, когда* $\dim \mathcal{A}(A,A^*) = d$.

5. Критерий существования двумерного общего инвариантного подпространства двух матриц

Вначале опишем, как проверить наличие неприводимого k-мерного $(1 < k < N)$ инвариантного подпространства для произвольных матриц A и B (а не только таких, для которых $\mathcal{A}(A,B)$ – полупростая алгебра). Нам потребуется понятие цоколя алгебры. Цоколь – это сумма всех неприводимых инвариантных подпространств данной алгебры. Другая характеристика цоколя состоит в том, что это – наибольшее инвариантное подпространство, сужение на которое дает полупростую алгебру [9]. Цоколю можно дать еще следующее описание [5]: это множество

$$\Lambda = \bigcap_{Q\in R} \ker Q.$$

Если известен базис, $R_1, \ \dots\ , R_m$ радикала R, то вышеприведенную формулу можно заменить формулой

$$\Lambda = \bigcap_{j=1}^{m} \ker R_j \text{ или, эквивалентно, } \Lambda = \ker \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}.$$

В предыдущем параграфе было отмечено, что базис радикала алгебры $\mathcal{A}(A,B)$ находится рациональным вычислением. Поскольку вычисление ядра матрицы состоит в решении системы линейных уравнений, то приходим к заключению: цоколь алгебры $\mathcal{A}(A,B)$ находится рациональной процедурой.

Теперь ясно, как рациональной процедурой проверить наличие k-мерного неприводимого инвариантного подпространства матриц A и B. Следует вычислить цоколь Λ алгебры $\mathcal{A}(A, B)$ и сужение $\mathcal{A}|\Lambda$. Затем с помощью теоремы 11 решить указанный вопрос для полупростой алгебры $\mathcal{A}|\Lambda$. Тем самым – поскольку цоколь содержит все неприводимые $\mathcal{A}$-инвариантные подпространства – он будет решен и для алгебры $\mathcal{A}(A, B)$.

Перейдем к вопросу о существовании двумерного инвариантного подпространства. Этот вопрос оказывается разрешимым рационально. Более того, можно выяснить: а) существует ли неприводимое двумерное подпространство, б) существует ли приводимое подпространство той же размерности.

Рациональная процедура решения вопроса о неприводимом подпространстве произвольной размерности описана выше в этом параграфе. Вопрос же о существововании приводимого подпространства размерности два (рационально) решается с помощью конденсированной формы. Нетрудно видеть, что утвердительный ответ получается в точности тогда, когда сумма размеров коммутирующих пар блоков конденсированной формы не меньше чем два. Таким образом, приводимого двумерного инвариантного подпространства не существует лишь в двух случаях: если матрицы A и B не имеют общего собственного вектора, либо, если конденсированная форма для A и B имеет вид

$$\begin{bmatrix} \alpha & a \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta & b \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

где α, β – числа, а блоки A_{22}, B_{22} не имеют общего собственного вектора. Решение задачи о двумерном подпространстве в виде пошагового алгоритма изложено в [4, 5].

Как нетрудно убедиться, попытка провести аналогичное разбиение на рационально верифицируемые подслучаи применительно к подпространствам размерности три и выше уже не приводит к успеху.

В заключение приведем еще одно приложение понятия цоколя к рациональному вычислению инвариантных подпространств (см. также [7]). Рассмотрим алгебру, порожденную матрицей A, то есть алгебру всех многочленов от A. Поскольку, как известно, неприводимые инвариантные подпространства комплексной матрицы одномерны, то цоколь моногенной алгебры есть прямая сумма одномерных инвариантных подпространств, то есть сумма собственных подпространств матрицы. Итак, хотя собственные векторы в общем случае не могут быть вычислены даже в радикалах, но линейная оболочка всех собственных векторов матрицы вычисляется рационально.

Литература

1. D. Shemesh, *Common eigenvectors of two matrices.* Linear Algebra Appl., **62** (1984), 11–18.
2. Х. Д. Икрамов, Н. В. Савельева, В. О. Чугунов, *О рациональных критериях существования общих собственных векторов или инвариантных подпространств.* Программирование, No. 3 (1997), 43–57.
3. Yu. A. Alpin, L. Elsner, Kh. D. Ikramov, *On condensed forms for partially commuting matrices.* Linear Algebra Appl., **306** (2000), 165–182.
4. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *О рациональной процедуре, проверяющей наличие двумерного общего инвариантного подпространства у заданной пары матриц.* Докл. РАН., **371**, No. 4 (2000), 439–441.
5. Yu. A. Alpin, A. George, Kh. D. Ikramov, *Solving the two-dimensional CIS problem by a rational algorithm.* Linear Algebra Appl., **312** (2000), 115–123.
6. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *О решении обобщенной задачи Джоковича.* Докл. РАН., **372**, No. 5 (2000), 583–585.
7. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Докл. РАН.,* **371**, *No. 5 (????), 583-584.*
8. Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра.* М.: Наука (1979).
9. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры.* М.: Мир (1986).
10. Н. Г. Чеботарев, *Введение в теорию алгебр.* М.: Гостехиздат (1949).
11. Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, *Конечномерные алгебры.* Киев.: Вища школа (1980).
12. N. H. McCoy, *On the characteristic roots of matrix polinomials.* Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), 592-600.
13. Р. Хорн, Р. Джонсон, *Матричный анализ.* М.: Мир (1989).
14. M. P. Drazin, J. W. Dungey, K. W. Gruenberg, *Some theorems on commutative matrices.* J. London Math. Soc., **26** (1951), 221–228.
15. В. В. Прасолов, *Задачи и теоремы линейной алгебры.* М.: Наука (1996).
16. Ю. А. Альпин, Н. А. Корешков, *Об одновременной триангулируемости матриц.* Матем. заметки., No. 9 (2000).
17. T. J. Laffey, *Simultaneous triangularization of matrices – low-rank cases and the nonderogatory case.* Linear and Multilinear Algebra, **6** (1978), 269–305.
18. A. George, Kh. D. Ikramov, *Common invariant subspaces of two matrices.* Linear Algebra Appl., **287** (????), 171–179.
19. D. Ž. Doković, *Unitary similarity of projectors.* Aequations Math., **42** (1991), 220–224.
20. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Об алгебрах, порождаемых парами сопряженных матриц.* Вестн. Моск. ун-та, сер. 15, Вычисл. матем. и киберн., No. 1 (1999), 49–50.

Alpin Yu. A., Ikramov Kh. D. Rational procedures in the problem of common invariant subspaces of two matrices.

The paper discusses criteria of the existence of common invariant subspaces of two complex matrices verifiable in a finite number of arithmetic operations.

Казанский
государственный университет

Московский
государственный университет

Поступило 2 октября 2000 г.