Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

Л. Ю. Колотилина

СЛУЧАЙ РАВЕНСТВА В ОБОБЩЕННОМ НЕРАВЕНСТВЕ ВИЛАНДТА

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – это эрмитова положительно определенная матрица и пусть x, $y \in \mathbb{C}^n$ – ненулевые векторы. Неравенство Виландта [3] (см. также [2, теорема 7.4.34]) утверждает, что если $x^*y = 0$, то

$$|x^*Ay|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^2 x^*Ax\ y^*Ay, \tag{1}$$

где

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

– это собственные значения матрицы A, упорядоченные в порядке невозрастания.

Бауэр и Хаузхольдер [1, следствие II] получили следующее обобщение неравенства Виландта на случай произвольных ненулевых векторов x и y: если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ эрмитова и положительно определена, то для любых ненулевых векторов x, $y \in \mathbb{C}^n$ справедливо неравенство

$$|x^*Ay|^2 \leqslant \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_n + (\lambda_1 + \lambda_n)|\varphi|}{\lambda_1 + \lambda_n + (\lambda_1 - \lambda_n)|\varphi|}\right]^2 x^*Ax\ y^*Ay, \tag{2}$$

где

$$\varphi = \frac{x^*y}{\|x\|\,\|y\|}. \tag{3}$$

Здесь и ниже мы используем обозначение

$$\|z\| = \|z\|_2 = (z^*z)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

В этой заметке мы будем называть неравенство (2) обобщенным неравенством Виландта или, сокращенно, ОНВ.

Поскольку, очевидно,

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_n + (\lambda_1 + \lambda_n)|\varphi|}{\lambda_1 + \lambda_n + (\lambda_1 - \lambda_n)|\varphi|} \leqslant 1,$$

ОНВ также уточняет и классическое неравенство Коши–Шварца.

Как известно (см, например, [2, 7.4.26]), как неравенство Виландта так и ОНВ оба обращаются в равенства в том случае, когда
$$x = \frac{x_1 + x_n}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x_1 - x_n}{\sqrt{2}},$$
где x_1, $x_n \in \mathbb{C}^n$ – это нормированные ($\|x_1\| = \|x_n\| = 1$) собственные векторы матрицы A, ассоциированные с ее экстремальными собственными значениями λ_1 и λ_n соответственно.

С другой стороны, если векторы x и y коллинеарны, т.е. $x = \gamma y$, $\gamma \neq 0$, то $|\varphi| = 1$, и ОНВ (так же как и неравенство Коши–Шварца) очевидным образом сводится к равенству
$$|x^* A y|^2 = x^* A x \; y^* A y.$$

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы описать все пары ненулевых векторов x, $y \in \mathbb{C}^n$, на которых ОНВ обращается в равенство в предположении, что матрица A отлична от скалярной. Точнее, мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова положительно определенная матрица, причем $\lambda_1 > \lambda_n$, и пусть x, $y \in \mathbb{C}^n$ – ненулевые векторы. Тогда равенство*
$$|x^* A y|^2 = \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_n + (\lambda_1 + \lambda_n)|\varphi|}{\lambda_1 + \lambda_n + (\lambda_1 - \lambda_n)|\varphi|}\right]^2 x^* A x \; y^* A y, \tag{4}$$
где
$$\varphi = \frac{x^* y}{\|x\| \, \|y\|},$$
выполняется в том и только том случае, когда векторы x и y либо коллинеарны, либо имеют вид
$$\begin{aligned} \frac{x}{\|x\|} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\xi\sqrt{1+|\varphi|}\; x_1 + \eta\sqrt{1-|\varphi|}\; x_n\Big), \\ \frac{y}{\|y\|} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\Big(\xi\sqrt{1+|\varphi|}\; x_1 - \eta\sqrt{1-|\varphi|}\; x_n\Big), \end{aligned} \tag{5}$$
где
$$\begin{aligned} A x_1 &= \lambda_1 x_1, \quad \|x_1\| = 1, \\ A x_n &= \lambda_n x_n, \quad \|x_n\| = 1, \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$|\varepsilon| = |\xi| = |\eta| = 1. \tag{7}$$

В частности, если векторы x и y ортогональны (т.е. $\varphi = 0$), то неравенство Виландта (1) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда*

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi x_1 + \eta x_n), \quad \frac{y}{\|y\|} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(\xi x_1 - \eta x_n).$$

Для доказательства этой теоремы нам необходимо сперва воспроизвести доказательство ОНВ. Обозначим

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{x}{\|x\|} & \frac{y}{\|y\|} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times 2}. \tag{8}$$

Тогда

$$Z^*Z = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \overline{\varphi} & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

и

$$B \equiv Z^*AZ = \begin{bmatrix} \dfrac{x^*Ax}{\|x\|^2} & \dfrac{x^*Ay}{\|x\|\,\|y\|} \\ \dfrac{y^*Ax}{\|x\|\,\|y\|} & \dfrac{y^*Ay}{\|y\|^2} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Если $u_+ \in \mathbb{C}^2$ – это собственный вектор матрицы B, ассоциированный с ее наибольшим собственным значением μ_+, т.е.

$$Bu_+ = \mu_+ u_+,$$

то

$$\begin{aligned} \mu_+ = \frac{u_+^* B u_+}{u_+^* u_+} &= \frac{(Zu_+)^*A(Zu_+)}{(Zu_+)^*(Zu_+)}\ \frac{u_+^* Z^* Z u_+}{u_+^* u_+} \\ &\leqslant \lambda_1\, \lambda_{\max}(Z^*Z) = \lambda_1\big(1 + |\varphi|\big), \end{aligned}$$

где $\lambda_{\max}(Z^*Z) = 1 + |\varphi|$ – наибольшее собственное значение матрицы Z^*Z, так что

$$\mu_+ \leqslant \lambda_1(1 + |\varphi|). \tag{11}$$

Кроме того, приведенное доказательство неравенства (11) показывает, что оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$Z^*Zu_+ = (1 + |\varphi|)u_+, \tag{12}$$

$$AZu_+ = \lambda_1 Zu_+. \tag{13}$$

Аналогичным образом можно легко убедиться, что

$$\mu_- \geqslant \lambda_n\ (1 - |\varphi|), \tag{14}$$

где через μ_- мы обозначаем наименьшее из двух собственных значений матрицы B, причем неравенство (14) обращается в равенство в том и только том случае, когда

$$Z^* Zu_- = (1 - |\varphi|)u_- \tag{15}$$

и одновременно

$$AZu_- = \lambda_n Zu_-, \tag{16}$$

где u_- – собственный вектор матрицы B, отвечающий собственному значению μ_-.

Ниже нам также понадобится следующий простой результат.

Лемма. *Пусть*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{bmatrix} \neq 0$$

– некоторая эрмитова положительно полуопределенная матрица, причем $a, c \neq 0$, *и пусть* $\lambda_+ \geqslant \lambda_-$ *– это собственные значения матрицы* M. *Тогда*

$$\left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}\right)^2 \geqslant \frac{|b|^2}{ac}, \tag{17}$$

и неравенство (17) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:*

(i) $a = c$;

(ii) $\det M = 0$.

Далее, если $a = c$, *то*

$$a = c = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2}, \quad |b| = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}. \tag{18}$$

Замечание. Если матрица M в лемме положительно определена, то, как нетрудно убедиться, неравенство (17) в действительности является частным случаем неравенства Канторовича (см., например, [2, 7.4.42])

$$\frac{x^*Mx\ x^*M^{-1}x}{\|x\|^4} \leqslant \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)^2}{4\lambda_+\lambda_-}, \quad x \neq 0,$$

при $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Доказательство леммы. Собственные значения $\lambda_\pm$ матрицы M определяются формулой

$$\lambda_\pm = \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}}{2},$$

из которой мы немедленно получаем соотношение

$$\left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{\lambda_+ + \lambda_-}\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + 4|b|^2}{(a+c)^2}. \tag{19}$$

С другой стороны, поскольку матрица M положительно полуопределена, мы имеем

$$\det M = ac - |b|^2 \geqslant 0,$$

откуда тривиально следует, что

$$ac(a-c)^2 \geqslant |b|^2 \ (a-c)^2 \tag{20}$$

и, далее, что справедливо неравенство

$$ac\Big[(a-c)^2 + 4|b|^2\Big] \geqslant |b|^2(a-c)^2 + 4ac|b|^2 = |b|^2(a+c)^2,$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{(a-c)^2 + 4|b|^2}{(a+c)^2} \geqslant \frac{|b|^2}{ac}. \tag{21}$$

Теперь неравенство (17) немедленно следует из (19) и (21). Кроме того, неравенство (17) обращается в равенство тогда и только тогда, когда (20) является равенством, т.е. когда выполнено одно из условий (i) или (ii).

Наконец, поскольку

$$\operatorname{tr} M = a + c = \lambda_+ + \lambda_-,$$

то при условии, что $a = c$, мы приходим к соотношению

$$a = c = \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2},$$

из которого следует, что

$$|b|^2 = ac - \det M = \frac{(\lambda_+ + \lambda_-)^2}{2} - \lambda_+\lambda_- = \left(\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2}\right)^2.$$

Лемма доказана. □

Применяя эту лемму к матрице $B = Z^*AZ$, мы получаем неравенство

$$\left(\frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_+ + \mu_-}\right)^2 \geqslant \frac{|x^*Ay|^2}{x^*Ax\ y^*Ay},$$

которое может быть переписано в виде

$$|x^*Ay|^2 \leqslant \left(\frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_+ + \mu_-}\right)^2 x^*Ax\ y^*Ay. \tag{22}$$

Ввиду (22), для доказательства ОНВ нам достаточно лишь заметить, что, с учетом (11) и (14),

$$\frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_+ + \mu_-} \leqslant \frac{\lambda_1(1+|\varphi|) - \lambda_n(1-|\varphi|)}{\lambda_1(1+|\varphi|) + \lambda_n(1-|\varphi|)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_n + (\lambda_1 + \lambda_n)|\varphi|}{\lambda_1 + \lambda_n + (\lambda_1 - \lambda_n)|\varphi|}.$$

Доказательство теоремы. Тот факт, что условия (5)–(7) достаточны для того, чтобы выполнялось равенство (4), устанавливается непосредственной проверкой. Поэтому мы предполагаем, что имеет место (4), и в этом предположении покажем, что векторы x и y либо коллинеарны, либо имеют вид (5), причем справедливы соотношения (6)–(7).

Из приведенного выше доказательства ОНВ ясно, что оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

$$\mu_+ = \lambda_1(1+|\varphi|), \quad \mu_- = \lambda_n(1-|\varphi|); \tag{23}$$

$$\left(\frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_+ + \mu_-}\right)^2 = \frac{|x^*Ay|^2}{x^*Ax\ y^*Ay}. \tag{24}$$

По лемме, равенство (24) имеет место, только если либо

$$\det B = 0, \tag{25}$$

либо

$$\frac{x^*Ax}{\|x\|^2} = \frac{y^*Ay}{\|y\|^2} = \frac{\mu_+ + \mu_-}{2}, \quad \frac{|x^*Ay|}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{\mu_+ - \mu_-}{2}. \tag{26}$$

Если справедливо равенство (25), т.е. матрица B вырождена, то, поскольку A положительно определена, мы заключаем, что векторы x и y коллинеарны.

Пусть теперь

$$|\varphi| < 1. \tag{27}$$

В этом случае матрица B положительно определена, и выполнены равенства (26). Вводя обозначение

$$\varepsilon = \frac{x^* A y}{\|x\|\,\|y\|} \tag{28}$$

и используя (26), мы приходим к следующему представлению матрицы B:

$$B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mu_+ + \mu_- & \varepsilon(\mu_+ - \mu_-) \\ \overline{\varepsilon}(\mu_+ - \mu_-) & \mu_+ + \mu_- \end{bmatrix}.$$

Заметим, что, поскольку (по предположению) $\lambda_1 > \lambda_n$, из (23) следует, что внедиагональные элементы матрицы B отличны от нуля, а ее собственные векторы имеют вид

$$u_\pm = \zeta_\pm \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\overline{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad \zeta_\pm \neq 0. \tag{29}$$

Как было установлено выше, из равенств (23) следует (см. (12) и (15)), что векторы $u_\pm$ являются собственными для матрицы Z^*Z и ассоциированы с ее собственными значениями $1 \pm |\varphi|$ соответственно. Следовательно, используя выражения (29), мы получаем равенства

$$\begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ \overline{\varphi} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\overline{\varepsilon} \end{bmatrix} = (1 \pm |\varphi|) \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\overline{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

из которых легко следует, что

$$\varphi = \varepsilon|\varphi|. \tag{30}$$

Из равенств (23) также следует (см. (13) и (16)), что векторы

$$Zu_\pm = \zeta_\pm\left(\frac{x}{\|x\|} \pm \overline{\varepsilon}\frac{y}{\|y\|}\right) \tag{31}$$

являются собственными векторами матрицы A, отвечающими λ_1 и λ_n соответственно. Следовательно, векторы

$$x_1 = \frac{Zu_+}{\|Zu_+\|} \quad \text{и} \quad x_n = \frac{Zu_-}{\|Zu_-\|}$$

– это нормированные собственные векторы A, что и устанавливает (6). Принимая во внимание, что, в силу (3) и (30),

$$\|Zu_\pm\|^2 = |\zeta_\pm|^2 \left(2 \pm \overline{\varepsilon}\varphi \pm \varepsilon\overline{\varphi}\right) = 2|\zeta_\pm|^2 \, (1 \pm |\varphi|),$$

и используя формулы (31), мы приходим к соотношениям

$$x_1 = \frac{\zeta_+}{|\zeta_+|} \, \frac{\dfrac{x}{\|x\|} + \overline{\varepsilon}\dfrac{y}{\|y\|}}{\sqrt{2(1+|\varphi|)}}, \qquad x_n = \frac{\zeta_-}{|\zeta_-|} \, \frac{\dfrac{x}{\|x\|} - \overline{\varepsilon}\dfrac{y}{\|y\|}}{\sqrt{2(1-|\varphi|)}},$$

из которых легко выводятся следующие окончательные выражения для векторов x и y:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\|x\|} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\xi\sqrt{1+|\varphi|}x_1 + \eta\sqrt{1-|\varphi|}x_n\Big), \\ \frac{y}{\|y\|} &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\Big(\xi\sqrt{1+|\varphi|}x_1 - \eta\sqrt{1-|\varphi|}x_n\Big), \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения

$$\xi = |\zeta_+|/\zeta_+, \qquad \eta = |\zeta_-|/\zeta_-.$$

Равенства (7) выполняются очевидным образом, и теорема доказана полностью. $\square$

Литература

1. F. L. Bauer and A. S. Householder, *Some inequalities involving the euclidean condition of a matrix.* — Numer. Math. **2** (1960), 308–311.
2. R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge (1985).
3. H. Wielandt, *Inclusion theorems for eigenvalues.* — National Bureau of Standards, Appl. Math. Series **29** (1953), 75–78.

Kolotilina L. Yu. The case of equality in the generalized Wielandt inequality.

This note provides a description of all those pairs of nonzero vectors x, $y \in \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, for which the generalized Wielandt inequality

$$|x^*Ay|^2 \leqslant \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_n + (\lambda_1 + \lambda_n)|\varphi|}{\lambda_1 + \lambda_n + (\lambda_1 - \lambda_n)|\varphi|}\right]^2 x^*Ax\ y^*Ay, \quad \varphi = \frac{x^*y}{\|x\|\,\|y\|},$$

where $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ is an Hermitian positive-definite matrix with eigenvalues $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ such that $\lambda_1 > \lambda_n$, holds with equality.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 мая 2000 г.