Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

В. Н. Кублановская

О НЕКОТОРОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Введение

Рассматривается численное решение обратных задач на собственные значения матрицы с полиномиальным и рациональным вхождением параметров, т.е. задач нахождения таких значений параметров, при которых матрица имеет наперед заданные числа своими собственными значениями.

Предлагаются различные формулировки обратных задач и некоторый подход их решения, позволяющий определять существование решения и находить его. Статья состоит из введения и трех параграфов.

В §1 приводятся различные постановки обратных задач. Решение обратных задач сводится к нахождению, так называемых, дискретных решений систем нелинейных уравнений с полиномиальным или рациональным вхождением переменных.

В §2 рассматривается построение нелинейных систем с использованием известного метода следов (метода Д. К. Фаддеева), ранее предложенного для вычисления коэффициентов характеристического полинома постоянной матрицы.

В§3 предлагаются алгоритмы решения обратных задач, т.е. алгоритмы вычисления дискретных корней систем нелинейных уравнений от $q \geqslant 1$ переменных.

§1. Постановка задачи

Определения.

Пусть $f(\mu_1, \dots, \mu_q) \equiv f(\bar{\mu})$, $\bar{\mu} = \mu_1, \dots, \mu_q$, есть скалярный полином от q переменных ($q \geqslant 2$). Рассмотрим относительную фак-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 99-01-00110).

торизацию $f(\bar{\mu})$, т.е. факторизацию вида

$$
\begin{gathered}
f(\bar{\mu}) = \prod_{k=1}^{q} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant q} \psi_{i_1 \ldots i_k}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k}) = \\
\prod_{k=1}^{q-1} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant q} \psi_{i_1 \ldots i_k}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k}) \psi_{1,\ldots,q}(\mu_1, \ldots, \mu_q).
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь $\psi_{i_1 \ldots i_k}(\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_k})$ полином от k переменных из набора $\mu_1, \ldots, \mu_q$, не имеющий своими делителями полиномов от любых i-переменных из рассматриваемого набора $\mu_1, \ldots, \mu_q$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Из правой части (1.1) выделим цепочки из q полиномов, нетривиальных относительно своих переменных, вида

$$
\begin{gathered}
\psi_{k+1}(\mu_k), \psi_{k+1,k+2}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}), \ldots, \psi_{k+1,\ldots,q}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q), \\
\psi_{k,k+1,\ldots,q}(\mu_k, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_q), \ldots, \psi_{1,\ldots,q}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q) \\
k = 0, 1, \ldots, q-1.
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

При $k = 0$ цепочка вида (1.2) будет

$$
\psi_1(\mu_1), \psi_{12}(\mu_1, \mu_2), \ldots, \psi_{1,\ldots,q}(\mu_1, \ldots, \mu_q). \tag{1.3}
$$

Учитывая возможность перенумерации переменных, в дальнейшем в качестве представителя цепочек (1.2) будем рассматривать цепочку вида (1.3).

q-кратным узловым корнем уравнения

$$
f(\mu_1, \ldots, \mu_q) = 0 \tag{1.4}
$$

назовем точку пересечения кривых (1.2) (кривых (1.3)), т.е. корень $\bar{\mu}_* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ системы уравнений

$$
\left.
\begin{array}{l}
\psi_1(\mu_1) = 0 \\
\psi_{12}(\mu_1^*, \mu_2) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_{1\ldots q}(\mu_1^*, \ldots, \mu_{q-1}^*, \mu_q) = 0.
\end{array}
\right\} \tag{1.5}
$$

Из определения следует справедливость утверждения.

Для существования q-кратного узлового корня у скалярного полинома $f\bar{\mu})$ от q-переменных ($q \geqslant 2$) необходимо и достаточно, *чтобы в относительной факторизации* (1.1) *полинома* $f(\bar\mu)$ *существовала, по крайней мере, одна цепочка вида* (1.2) *из* q *нетривиальных*[1] *относительно своих переменных полиномов.*

1. Рассмотрим систему из n нелинейных алгебраических уравнений от q-переменных (СНАУ-q)

$$f_k(\bar\mu) \equiv f_k(\mu_1, \ldots, \mu_q) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Обозначим $\delta(\bar\mu) = \delta(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ общий наибольший делитель (ОНД) последовательности полиномов $\{f_k(\bar\mu)\}$, $k = 1, \ldots, n$, так что тмеют место равенства

$$f_k(\bar\mu) = \delta(\bar\mu)\widehat{f}_k(\bar\mu), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\{\widehat{f}_k(\bar\mu)\}$ – последовательность взаимно простых полиномов.

Дискретными решениями СНАУ-q (1.6) назовем объединение q-кратных узловых корней полинома $\delta(\bar\mu)$, т.е. ОНД системы (1.6), и нульмерных решений системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\widehat{f}_k(\mu_1, \ldots, \mu_q) \equiv \widehat{f}_k(\bar\mu) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

2. Рассмотрим систему из n рациональных уравнений:

$$\frac{f_k(\bar\mu)}{g_k(\bar\mu)} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Здесь $f_k(\bar\mu)$ и $g_k(\bar\mu)$ суть полиномы от q-переменных. Запишем (1.7) в эквивалентном виде, т.е. в виде

$$R(\bar\mu) \equiv \begin{bmatrix} g_1(\bar\mu) & & \\ & \ddots & \\ & & g_n(\bar\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\bar\mu) \\ \ldots. \\ f_n(\bar\mu) \end{bmatrix} = 0. \tag{1.8}$$

Рациональную $n \times 1$ матрицу $R(\bar\mu)$ в (1.8) представим в виде несократимой факторизации, т.е. факторизации вида

$$R(\bar\mu) = S(\bar\mu)T^{-1}(\bar\mu). \tag{1.9}$$

[1]Полином от q-переменных назовем нетривиальным относительно своих переменных, если каждая из них входит с ненулевой степенью.

Здесь $T(\bar{\mu})$ есть скалярный полином от q переменных, $S(\bar{\mu})$ есть полиномиальная $n \times 1$ матрица с элементами, зависящими от q-переметров. При этом уравнение[2]

$$\left[T(\bar{\mu})\, S(\bar{\mu})\right]^B X = 0$$

не имеет решений.

Дискретными решениями системы рациональных уравнений (1.7) назовем объединение q-кратных узловых корней скалярного полинома $T(\bar{\mu})$, и дискретных решений СНАУ-q вида

$$S(\bar{\mu}) = 0.$$

1.2. Формулировки обратных задач.

Пусть $D(\lambda, \bar{\mu})$ есть $n \times n$ регулярная функциональная матрица, элементы которой зависят от $(q+1)$ параметров λ, $\bar{\mu} = \mu_1, \dots, \bar{\mu}_q$, с полиномиальным вхождением параметра λ.

Конечным спектром $D(\lambda, \bar{\mu})$ называется объединение всех конечных корней уравнения

$$p_n(\lambda, \bar{\mu}) \equiv \det D(\lambda, \bar{\mu}) \equiv a_r(\bar{\mu})\lambda^r + \ldots + a_0(\bar{\mu}), \qquad (1.10)$$

где коэффициенты $a_k(\bar{\mu})$, $k = r, \dots, 0$, $r \leqslant ns$, зависят от q-параметров $\mu_1, \dots, \mu_q$.

Будем рассматривать раздельно случаи полиномиальной и рациональной зависимости элементов матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$ от параметров $\mu_1, \dots, \mu_q$.

В случае полиномиальной зависимости коэффициенты $a_k(\bar{\mu})$ полинома (1.10) суть скалярные полиномы от q-переменных; в случае рациональной зависимости $a_k(\bar{\mu})$ суть рациональные функции от q-переменных.

Рассмотрим формулировку обратных задач на собственные значения матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$ в общей постановке и, как частные случаи, обобщенную и алгебраическую обратные задачи.

Обратная задача на собственные значения матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$ в общей постановке состоит в установлении существования и нахождении таких наборов $\bar{\mu}_* := \mu_1^*, \dots, \mu_q^*$, при которых матрица

[2]Символ $[A, B]^B := \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ означает блочное транспонирование.

$D(\lambda, \bar{\mu}_*)$ имеет своими собственными значениями наперед заданные числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, $(r \leqslant ns)$, так что ε_k, $k = 1, \ldots, r$ являются корнями уравнения

$$p_n(\lambda, \bar{\mu}_*) \equiv \det D(\lambda, \bar{\mu}_*) = 0.$$

Другой формулировкой обратной задачи на собственные значения матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$ является следующая.

По заданным числам ε_k, $k = 1, \ldots, r$ и матрице $D(\lambda, \bar{\mu})$ найти дискретные корни системы

$$\det D(\varepsilon_k, \bar{\mu}) = 0, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{1.11}$$

которая является системой нелинейных алгебраических уравнений от $q \geqslant 2$ переменных, в случае полиномиального вхождения параметров $\mu_1, \ldots, \mu_q$ в элементы матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$, и системой рациональных уравнений, в случае рационального вхождения параметров $\mu_1, \ldots, \mu_q$ в элементы $D(\lambda, \bar{\mu})$.

При $q = 1$ искомые параметры $\bar{\mu}_*$ являются решениями нелинейной системы алгебраических и рациональных уравнений от одной переменной соответственно для полиномиального и рационального вхождения параметра μ в элементы $D(\lambda, \bar{\mu})$.

Обобщенной обратной задачей на собственные значения принято называть частный случай (при $s = 1$) обратной задачи в общей постановке, т.е. обратную задачу для пучка

$$D(\lambda, \bar{\mu}) = C_0(\bar{\mu}) + \lambda C_1(\bar{\mu}), \tag{1.12}$$

матрицы $C_0(\bar{\mu})$, $C_1(\bar{\mu})$ которого полиномиально (или рационально) зависят от $\mu_1, \ldots \mu_q$. На практике наиболее часто эта зависимость задается в следующем виде

$$C_0(\bar{\mu}) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k A_k; \quad C_1(\bar{\mu}) = B_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k B_k, \tag{1.13}$$

где A_k и B_k, $k = 0, \ldots, n$ суть действительные матрицы, элементы которых не зависят от параметров; параметры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ $(q = n)$ входят в элементы $D(\lambda, \bar{\mu})$ линейно.

Алгебраической обратной задачей на собственные значения матрицы принято называть обратную задачу для $D(\lambda, \bar{\mu}) = A(\bar{\mu}) - \lambda I$, где $A(\bar{\mu}) = A(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ действительная матрица. Частным случаем является

$$A(\bar{\mu}) \equiv A(\mu_1, \dots, \mu_n) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k A_k, \tag{1.14}$$

где A_i, $i = 0, \dots, n$, суть постоянные $n \times n$ матрицы.

Наиболее распространенными являются, так называемые, аддитивная и мультипликативная обратные задачи.

В случае аддитивной задачи

$$A(\bar{\mu}) = A_0 + \mathrm{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\};$$

в случае мультипликативной задачи

$$A(\bar{\mu}) = A_0 \mathrm{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_n\}.$$

Аддитивная и мультипликативная задачи для обобщенной обратной задачи получаются из общей формулы (1.14): аддитивная при $A_k = e_k e_k^T$, $k = 1, \dots, n$; мультипликативная при $B_0 = 0$, $B_k = e_k e_k^T$, $A_k = 0$, $k = 0, \dots, n$. Здесь e_k обозначает k-ый столбец единичной матрицы I.

Исследованию обобщенной и алгебраической обратных задач посвящены работы [1–24]. В них описаны методы и анализ, включающие локальную сходимость.

Мы предлагаем для решения обратных задач новый подход. Этот подход сводит решение обратной задачи к вычислению дискретных решений системы нелинейных алгебраических уравнений в случае полиномиальной зависимости элементов $D(\lambda, \bar{\mu})$ от параметров $\bar{\mu}$, и к вычислению дискретных решений системы рациональных уравнений в случае рациональной зависимости элементов $D(\lambda, \bar{\mu})$ от параметров $\bar{\mu}$.

§2. Применение метода Д. К. Фаддеева к решению обратных задач

Для построения нелинейной системы, дискретные корни которой дают наборы искомых параметров рассматриваемой обратной задачи, будем применять метод Д. К. Фаддеева [25]. Рассмотрим два способа построения нелинейных систем: первый способ основан на раскрытии определителя $\det D(\lambda, \bar{\mu})$, второй способ – на вычислении системы линейно независимых векторов матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$.

Для построения нелинейных систем будем применять метод Д. К. Фаддеева к матрице $D(\lambda,\bar\mu)$. Рассмотрим раздельно случаи полиномиального и рационального вхождения параметров $\bar\mu$ в элементы $D(\lambda,\bar\mu)$.

В случае полиномиального вхождения параметров $\bar\mu$ вычисляются две последовательности матриц $\{A_k(\lambda,\bar\mu)\}$ и $\{B_k(\lambda,\bar\mu)\}$, полиномиально зависящие от параметров $\lambda,\mu_1,\dots,\mu_q$, и последовательность скалярных полиномов $\{p_k(\lambda,\bar\mu)\}$ от $(q+1)$ переменных, следуя следующему предписанию

$$\begin{gathered}A_{k+1}(\lambda,\bar\mu)=D(\lambda,\bar\mu)B_k(\lambda,\bar\mu);\quad p_k(\lambda,\bar\mu)=\frac{\operatorname{sp}A_{k+1}(\lambda,\bar\mu)}{k+1};\\ B_{k+1}(\lambda,\bar\mu)=A_{k+1}(\lambda,\bar\mu)-p_{k+1}(\lambda,\bar\mu)I,\\ k=0,1,\dots,n-1;\quad B_0=I.\end{gathered}\tag{2.1}$$

В результате будут получены

- полином
$$p_n(\lambda,\bar\mu)=\det D(\lambda,\bar\mu)=a_r(\bar\mu)\lambda^r+\ldots+a_0(\bar\mu);\tag{2.2}$$
- равенство
$$D(\lambda,\bar\mu)B_{n-1}(\lambda,\bar\mu)=p_n(\lambda,\bar\mu)I.\tag{2.3}$$

Искомая СНАУ-q, дискретные корни которой $\bar\mu_*$ решают обратную задачу для $D(\lambda,\bar\mu)$, будет

$$p_n(\varepsilon_k,\bar\mu)=0,\quad k=1,\dots,n$$

или

$$a_r(\bar\mu)\varepsilon_k^r+a_{r-1}(\bar\mu)\varepsilon_k^{r-1}+\ldots+a_0(\bar\mu)=0,\tag{2.4}$$

$k=1,\dots,r$.Из (2.3) следует, что столбцы матрицы $B_{n-1}(\lambda,\bar\mu)$ (в корнях уравнения (2.2)) являются собственными векторами матрицы $D(\lambda,\bar\mu)$. Нелинейная система, дискретные корни которой решают обратную задачу для $D(\lambda,\bar\mu)$, будет

$$(D(\varepsilon_k,\bar\mu)x_k(\varepsilon_k,\bar\mu),x_k(\varepsilon_k,\bar\mu))=0\tag{2.5}$$

$k=1,\dots,r$; $x_k(\varepsilon_k,\bar\mu)$, $k=1,\dots,r$ суть линейно независимые столбцы матрицы $B_{n-1}(\varepsilon_k,\bar\mu)$.

В случае рационального вхождения параметров $\bar\mu$ в элементы $D(\lambda,\bar\mu)$, схему метода Фаддеева (2.1) целесообразно видоизменить с целью уменьшения операций с рациональными дробями.

Видоизмененная схема требует выполнения следующих операций.

(1) Исходная рациональная матрица записывается в виде

$$D(\lambda,\bar{\mu}) = K^{-1}(\lambda,\bar{\mu})D^{(1)}(\lambda,\bar{\mu}),$$

где $K(\lambda,\bar{\mu})$ и $D^{(1)}(\lambda,\bar{\mu})$ суть $(q+1)$ параметрические полиномиальные $n\times n$ матрицы:

$$K(\lambda,\bar{\mu}) = \mathrm{diag}\{k_1(\lambda,\bar{\mu}),\dots,k_n(\lambda,\bar{\mu})\},$$

$k_i(\lambda,\bar{\mu})$ есть наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей элементов i-ой строки $D(\lambda,\bar{\mu})$

$$D^{(1)}(\lambda,\bar{\mu}) = K(\lambda,\bar{\mu})D(\lambda,\bar{\mu}).$$

(2) Переход от шага k к шагу $k+1$ метода требует выполнеия следующих операций

(2.1) Рациональная матрица $B_k(\lambda,\bar{\mu})$ представляется в факторизованном виде

$$B_k(\lambda,\bar{\mu}) = \widetilde{D}_k(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{K}_k^{-1}(\lambda,\bar{\mu}),$$

где

$$\widetilde{K}_k(\lambda,\bar{\mu}) = \mathrm{diag}\{\bar{k}_1(\lambda,\bar{\mu}),\dots,\bar{k}_n(\lambda,\bar{\mu})\},$$

$k_i(\lambda,\bar{\mu})$ есть НОК знаменателей элементов i-го столбца матрицы $B_k(\lambda,\bar{\mu})$;

$$\widetilde{D}_k(\lambda,\bar{\mu}) = B_k(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{K}_k(\lambda,\bar{\mu}).$$

(2.2) Вычисляется рациональная матрица $A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu})$:

$$\begin{aligned} A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu}) = K^{-1}(\lambda,\bar{\mu})D^{(1)}(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{D}_k(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{K}_k^{-1}(\lambda,\bar{\mu}) = \\ K^{-1}(\lambda,\bar{\mu})\widehat{D}_k(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{K}_k^{-1}(\lambda,\bar{\mu}); \end{aligned}$$

где $\widehat{D}(\lambda,\bar{\mu}) := D^{(1)}(\lambda,\bar{\mu})\widetilde{D}_k(\lambda,\bar{\mu})$ есть полиномиальная матрица.

(3) Вычисляется

$$p_{k+1}(\lambda,\bar{\mu}) := \frac{\mathrm{sp}\, A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu})}{k+1},$$

где $\mathrm{sp}\, A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu})$ обозначает след рациональной матрицы $A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu})$.

(4) Вычисляется рациональная матрица

$$B_{k+1}(\lambda,\bar{\mu}) = A_{k+1}(\lambda,\bar{\mu}) - p_{k+1}(\lambda,\bar{\mu})I.$$

Операции (1)–(4) выполняются для $k = 0, \ldots, n-1$ с $B_0 = I$.

В результате n шагов будет найден полином

$$p_n(\lambda, \bar{\mu}) = a_r(\bar{\mu})\lambda^r + \ldots + a_0(\bar{\mu}) \tag{2.6}$$

с рациональными, зависящими от q параметров $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, коэффициентами $a_k(\bar{\mu})$, $k = 0, \ldots, r$ и равенство

$$D(\lambda, \bar{\mu})B_{n-1}(\lambda, \bar{\mu}) = p_n(\lambda, \bar{\mu})I. \tag{2.7}$$

Искомая система рациональных уравнений, дискретные корни которой дадут решение обратной задачи для матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$ с рациональным вхождением параметров $\bar{\mu}$ в ее элементы, будет

$$a_r(\bar{\mu})\varepsilon_k^r + a_{r-1}(\bar{\mu})\varepsilon_k^{r-1} + \ldots + a_0(\bar{\mu}) = 0, \tag{2.8}$$

$k = 1, \ldots, r$.

Из (2.7) следует, что в корнях $(\varepsilon_k, \bar{\mu}_*)$ $k = 1, \ldots, r$ полинома (2.6) столбцы матрицы $B_{n-1}(\varepsilon_k, \bar{\mu}_*)$ являются собственными векторами матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$. Искомая система рациональных уравнений, дискретные корни которой дают решение обратной задачи с рациональными вхождениями параметров $\bar{\mu}$ в элементы $D(\lambda, \bar{\mu})$, будут

$$(D(\varepsilon_k, \bar{\mu})x_k(\varepsilon_k, \bar{\mu}), x_k(\varepsilon_k, \bar{\mu})) = 0, \tag{2.9}$$

$k = 1, \ldots, r$; $x_k(\varepsilon_k, \bar{\mu})$ суть линейно независимые столбцы матрицы $B_{n-1}(\varepsilon_k, \bar{\mu})$.

В этом случае алгебраической обратной задачи, т.е. в случае $D(\lambda, \bar{\mu}) = A(\bar{\mu}) - \lambda I$, для раскрытия $\det D(\lambda, \bar{\mu})$ метод Фаддеева целесообразно применять, взяв в качестве исходной матрицу $A(\bar{\mu}) = A(\mu_1, \ldots, \mu_q)$, т.е. использовать формулы вида

$$\begin{gathered} A_{k+1}(\bar{\mu}) = A(\bar{\mu})B_k(\bar{\mu}), \quad p_{k+1}(\bar{\mu}) = \frac{\operatorname{sp} A_{k+1}(\bar{\mu})}{k+1} \\ B_{k+1}(\bar{\mu}) = A_{k+1}(\bar{\mu}) - p_{k+1}(\bar{\mu})I, \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ B_0 = I. \end{gathered} \tag{2.10}$$

В результате n шагов получим

$$\det\left[A(\bar{\mu}) - \lambda I\right] = \lambda^n - p_1(\bar{\mu})\lambda^{n-1} - \ldots - p_n(\bar{\mu}).$$

Искомая СНАУ-q, дискретные корни которой дают решение обратной алгебраической задачи, будут

$$\varepsilon_k^n - p_1(\bar{\mu})\varepsilon_k^{n-1} - \ldots - p_n(\bar{\mu}) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Здесь $p_k(\bar{\mu})$, $k = 1, \ldots, n$ суть полиномы от q-параметров, если параметры $\bar{\mu}$ входят полиномиально в элементы матрицы $A(\bar{\mu})$; $p_k(\bar{\mu})$, $k = 1, \ldots, n$ суть рациональные функции, если $\bar{\mu}$ входят рационально в элементы $A(\bar{\mu})$.

Вместо системы (2.11) для определения искомых параметров $\bar{\mu}_*$ могут быть использованы следующие нелинейные системы

• Система вида

$$\begin{gathered} kp_k(\bar{\mu}) = s_1 p_{k-1}(\bar{\mu}) + \ldots, s_k p_o(\bar{\mu}) \\ p_0(\bar{\mu}) = 1, \quad s_i := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^i, \quad i = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{2.12}$$

полученные из формул Ньтона, устанавливающих связь между коэффициентами скалярного полинома и его корнями [26];

• Система вида

$$\left.\begin{array}{l} p_1(\mu_1, \ldots, \mu_q) = -\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \\ p_2(\mu_1, \ldots, \mu_q) = \sum \varepsilon_i \varepsilon_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_p(\mu_1, \ldots, \mu_q) = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n (-1)^n \end{array}\right\}, \tag{2.13}$$

построенная с использованием теоремы Виета [26].

Для определенности, в дальнейшем при решении обратной алгебраической задачи будем рассматривать систему вида (2.12). Все сказанное будет справедливо для систем (2.11) и (2.13).

§3. Методы решения алгебраической обратной задачи

Пусть $A(\bar{\mu}) = A(\mu_1, \ldots, \bar{\mu}_q$ есть $n \times n$ регулярная матрица с элементами, зависящими от q-параметров $(1 \leqslant q \leqslant n)$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ – последовательность заданных чисел, среди которых нет равных.

Задача состоит в построении коэффициентов $p_k(\bar{\mu})$, $(k = 1, \ldots, n)$ характеристического полинома $\det\,[A(\bar{\mu}) - \lambda I]$ и в нахождении дискретных решений $\bar{\mu}_*$ системы из n нелинейных уравнений вида

$$\begin{gathered} kp_k(\bar{\mu}) = s_1 p_{k-1}(\bar{\mu}) + s_2 p_{k-2}(\bar{\mu}) + \ldots + s_k p_0(\bar{\mu}) \\ k = 1, \ldots, n; \quad p_0(\bar{\mu}) = 1; \quad s_i := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Будем рассматривать раздельно случаи полиномиальной и рациональной зависимости элементов матрицы $A(\bar{\mu})$ от параметров

$\mu_1, \dots, \mu_q$, что соответствует системе нелинейных алгебраических уравнений (3.1) и системе рациональных уравнений (3.1).

3.1. Обратная задача для однопараметрической полиномиальной матрицы.

Пусть $A(\bar{\mu}) := A(\mu)$ – полиномиальная матрица, для которой следует решить обратную задачу, т.е. найти решения системы нелинейных алгебраических уравнений (3.1) от одной переменной. Этот случай является наиболее простым как по вычислению коэффициентов $p_k(\mu)$ характеристического полинома матрицы $A(\mu)$, так и по вычислению корней системы (3.1).

Для вычисления корней (3.1) можно применить, например, любой из следующих двух способов [27].

Первый способ сводит задачу к вычислению собственных значений линейного пучка полного столбцового ранга и требует выполнения следующих операций

(1) Система (3.1) записывается в матричном виде

$$C_s\mu^s + C_{s-1}\mu^{s-1} + \ldots + C_0\mu^0 = 0,$$

где s – максимальная степень μ в коэффициентах $p_k(\mu)$, $k = 0, \dots, n$, или в виде

$$\mathfrak{A}\Lambda = 0,$$

где $\mathfrak{A} := [C_s, C_{s-1}, \dots, C_o]$, $\Lambda := (\mu^s, \mu^{s-1}, \dots, \mu^0)^T$.

(2) Находится матрица Q, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}$.

(3) Формируется линейный пучок $A - \mu B$, где A и B составлены соответственно из s первых и s последних строк матрицы Q.

(4) Из пучка $A - \mu B$ выделяется регулярное ядро $\widehat{A} - \mu\widehat{B}$, например, методом построения согласованных пучков $A_k - \mu B_k$, $A_0 = A$, $B_0 = B$, $k = 1, \dots, l$, уменьшающихся размеров.

Типичный шаг выделения $\widehat{A} - \mu\widehat{B} \equiv A_l - \mu B_l$ состоит в формировании $m_k \times 2n_k$ матрицы $[A_k,\, B_k]$ и нахождении ортонормированного базиса Q_k ее правого нуль-пространства. Тогда матрицы A_{k+1} и B_{k+1} получаются как блоки Q_k:

$$Q_k = \begin{bmatrix} -B_{k+1} \\ A_{k+1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n_k \\ \}n_k \end{matrix}.$$

Процесс заканчиваентся на шаге l, когда $m_l = n_l > 0$ или $m_l = n_l = 0$.

В первом случае выделяется искомое регулярное ядро $\widehat{A} - \mu\widehat{B} \equiv A_l - \mu B_l$, собственные значения которого дадут искомые параметры μ_*, решающие обратную задачу. Во втором случае, т.е. при $m_l = n_l = 0$, регулярное ядро отсутствует, так что обратная задача для $A(\mu)$ не имеет решения.

Второй способ решения системы (3.1) требует вычисления скалярного полинома $\delta(\mu)$,т.е. ОНД последовательности полиномов $\{f_k(\mu)\}$, $k = 1, \dots, n$, где $f_k(\mu) = kp_k(\mu) - sp_{k-1}(\mu) - \dots - s_k$. Корни алгебраического уравнения

$$\delta(\mu) = 0$$

дадут параметры μ_k, решающие обратную задачу для $A(\mu)$. При $\delta(\mu) = \mathrm{const}$ поставленная обратная задача не имеет решения.

Для вычисления $\delta(\mu)$ следует к матрице $[f_1(\mu), \dots, f_n(\mu)]$ применить алгоритм ΔW-1 факторизации [27], т.е. получить разложение

$$\bigl[f_1(\mu), \dots, f_n(\mu)\bigr]\, W(\mu) = \bigl[\delta(\mu), 0, \dots, 0\bigr].$$

Программы, реализующие первый и второй способы решения СНАУ-1, составлены В. Н. Симоновой (Лаборатория анализа и вычислительных методов ПОМИ РАН).

3.2. Обратная задача для q-параметрической полиномиальной матрицы.

Пусть $A(\bar\mu) = A(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть $n \times n$ матрица, элементы которой зависят от q-параметров ($q \geqslant 2$). Решение обратной задачи для $A(\bar\mu)$ сводится к вычислению дискретных решений $\bar\mu_* = (\mu_1^*, \dots, \mu_q^*)$ системы нелинейных алгебраических уравнений от q-переменных вида (3.1), т.е. системы

$$f_k(\bar\mu) := kp_k(\bar\mu) - s_1 p_{k-1}(\bar\mu) \dots - s_k = 0,$$

$k = 1, \dots, n$, где $f_k(\bar\mu)$ есть полином от q-переменных.

Схему метода решения (3.1) рассмотрим сначала для $q = 2$.

Пусть требуется найти дискретные корни СНАУ-2 вида

$$\begin{gathered} f_k(\mu_1, \mu_2) = kp_k(\mu_1, \mu_2) - s_1 p_{k-1}(\mu_1, \mu_2) - \dots - s_k, \\ k = 1, \dots, n, \qquad s_i = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^i. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Метод решения состоит из двух стадий.

Сначала находится $h(\mu_1,\mu_2)$, т.е. ОНД последовательности полиномов $\{f_k(\mu_1,\mu_2)\}$, $k=1,\ldots,n$, и находятся дискретные корни $\bar\mu_k=(\mu_1^*,\mu_2^*)$ полинома $h(\mu_1,\mu_2)$. Затем находятся нульмерные решения $\bar\mu_*$ СНАУ

$$\widehat{f}_k(\mu_1,\mu_2)=0,\qquad k=1,\ldots,n, \tag{3.3}$$

где $\{\widehat{f}_k(\mu_1,\mu_2)\}$ последовательность взаимно простых полиномов. Так найденные дискретные решения СНАУ (3.2) дают искомые наборы параметров $\bar\mu_*$, решающих обратную задачу для $A(\mu_1,\mu_2)$.

Реализация первой стадии требует выполнеия следующих операций.

(1) Каждый из полиномов $f_k(\bar\mu)$, $k=1,\ldots,n$, представляется в виде относительной факторизации, т.е. факторизации вида:

$$f_k(\mu_1,\mu_2)=\psi_1^{(k)}(\mu_1)\psi_1^{(k)}(\mu_2)\psi_{12}^{(k)}(\mu_1,\mu_2). \tag{3.4}$$

Здесь $\psi_i^{(k)}(\mu_i)$ – полином от одной переменной, $\psi_{12}^{(k)}(\mu_1,\mu_2)$ – полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной.

Разложение (3.4) можно получить, используя алгоритм относительной факторизации полинома от двух переменных [27].

(2) Используя алгоритмы из [27], находятся полиномы $\delta_1(\mu_1)$, $\delta_2(\mu_2)$, т.е. ОНД соответственно полиномов $\{\psi_1^{(k)}(\mu_1)\}$ и $\{\psi_2^{(k)}(\mu_2)\}$, $k=1,\ldots,n$, и разложения вида

$$\psi_1^{(k)}(\mu_1)=\delta_1(\mu_1)\omega_1^{(k)}(\mu_1);\quad \psi_2^{(k)}(\mu_2)=\delta_2(\mu_2)\omega_2^{(k)}(\mu_2), \tag{3.5}$$

$k=1,\ldots,n$. С учетом (3.5) полиномы $f_k(\mu_1,\mu_2)$ из (3.4) примут вид

$$f_k(\mu_1,\mu_2)=\delta_1(\mu_1)\delta_2(\mu_2)g_k(\mu_1,\mu_2), \tag{3.6}$$

где

$$g_k(\mu_1,\mu_2)=\omega_1^{(k)}(\mu_1)\omega_2^{(k)}(\mu_2)f_{12}^{(k)}(\mu_1,\mu_2).$$

(3) Формируется двухпараметрическая полиномиальная матрица

$$G(\mu_1,\mu_2)=\bigl[g_1(\mu_1,\mu_2),\ldots,g_n(\mu_1,\mu_2)\bigr]=C_t(\mu_2)\mu_1^t+\ldots,+C_0(\mu_2).$$

(4) Используя ΔW-2 алгоритм [27], находится ранговая факторизация вида

$$G(\mu_1,\mu_2)W(\mu_1,\mu_2)=\bigl[\Delta(\mu_1,\mu_2),0,\ldots,0\bigr].$$

(5) Полином $\Delta(\mu_1, \mu_2)$ представляется в виде

$$\Delta(\mu_1, \mu_2) = \varphi_1(\mu_2)\delta_{1,2}(\mu_1, \mu_2). \tag{3.7}$$

В результате выполнения операций (1)–(5) будет найден полином

$$h(\mu_1, \mu_2) = \delta_1(\mu_1)\delta_2(\mu_2)\delta_{1,2}(\mu_1, \mu_2), \tag{3.8}$$

т.е. ОНД полиномов $\{f_k(\mu_1, \mu_2)\}$, $k = 1, \dots, n$.

Дискретные корни полинома $h(\mu_1, \mu_2)$ определяются как корни двух систем

$$\begin{cases} \delta_1(\mu_1) = 0 \\ \delta_{1,2}(\mu_1^*, \mu_2) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta_2(\mu_2) = 0 \\ \delta_{1,2}(\mu_1, \mu_2^*) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

При этом предполагается, что каждый из полиномов, входящих в (3.9) нетривиален относительно своих переменных. В противном случае рассматриваемая система из (3.9) не имеет дискретных решений.

Реализация второго этапа состоит в вычислении нульмерных корней СНАУ-2 вида

$$\widehat{f}_k(\mu_1, \mu_2) : \frac{f_k(\mu_1, \mu_2)}{h(\mu_1, \mu_2)} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{3.10}$$

при этом полиномы $\widehat{f}_k(\mu_1, \mu_2)$ в явном виде не вычисляются. Вычисление нульмерных корней $\bar{\mu}_* = (\mu_1^*, \mu_2^*)$ системы (3.10) требует выполнения следующих операций.

(1) Находятся корни μ_{2j}^* алгебраического полинома

$$\varphi_1(\mu_2) = 0.$$

(2) Для каждого фиксированного корня $\mu_2^* = \mu_{2j}^*$ составляется СНАУ-1 вида

$$\widehat{f}_k(\mu_1, \mu_2^*) = \frac{f_k(\mu_1, \mu_2^*)}{h(\mu_1, \mu_2^*)} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

и находятся ее решения μ_{1i}^*.

Так вычисленные пары $(\mu_{1,i_j}^*, \mu_{2,j}^*) = \bar{\mu}_*$ дадут все конечные нульмерные решения, объединение которых с дискретными корнями $h(\mu_1, \mu_2)$, образуют искомые наборы параметров $\bar{\mu}_*$, решающих обратную задачу для $A(\mu_1, \mu_2)$.

3.2. Обратная задача для q-параметрической полиномиальной матрицы ($q > 2$).

Рассмотрим решение обратной задачи для q-параметрической полиномиальной $n \times n$ матрицы $A(\bar{\mu})$. Для определенности считаем $q = n$.

Применив метод Фаддеева к матрице $A(\bar{\mu})$, получим коэффициенты $p_k(\bar{\mu})$, $k = 1, \dots, n$, характеристического полинома:

$$\det\left[A(\bar{\mu}) - \lambda I\right] = \lambda^n - p_1(\bar{\mu})\lambda^{n-1} - \ldots - p_n(\bar{\mu}),$$

имеющего своими корнями заданные числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Система нелинейных алгебраических уравнений, дискретные корни которой дают решение обратной задачи на собственные значения матрицы $A(\bar{\mu})$, будет иметь вид (2.12) при $q = n$, т.е.

$$\begin{gathered} f_k(\bar{\mu}) := kp_k(\bar{\mu}) - s_1 p_{k-1}(\bar{\mu}) - \ldots - p_0(\bar{\mu})s_k = 0, \quad k = 1, \dots, n; \\ \bar{\mu} = \mu_1, \dots, \mu_n, \quad s_i = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^i, \quad p_0(\bar{\mu}) = 1. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Вычисление дискретных корней (3.11), как и в случае $q = 2$, осуществляется в две стадии. На первой стадии находится полином $h(\bar{\mu})$ от n переменных, т.е. ОНД полиномов $f_k(\bar{\mu})$, $k = 1, \dots, n$, системы (3.11), и вычисляются его дискретные корни. На второй стадии осуществляется переход к СНАУ-n $\widehat{f}_k(\bar{\mu}) = 0$, $k = 1, \dots, n$, из взаимно простых полиномов $\widehat{f}_k(\bar{\mu})$ и вычисляются ее нульмерные решения. При этом полиномы $\widehat{f}_k(\bar{\mu})$ в явном виде не находятся.

Реализация первой стадии требует выполнения следующих операций.

(1) Используя алгоритм относительной факторизации полиномов от многих переменных [28], находится относительная факторизация каждого из полиномов $f_j(\bar{\mu})$ системы (3.11), т.е. факторизация вида

$$f_j(\bar{\mu}) = f_j(\mu_1, \dots, \mu_n) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \psi^{(j)}_{i_1, \dots, i_k}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k}), \tag{3.12}$$

где $\psi^{(j)}_{i_1, \dots, i_k}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k})$ – полином от k переменных из набора $\mu_1, \dots, \mu_n$, не имеющий своими делителями полиномов от любых i $(1 \leqslant i \leqslant k - 1)$ переменных из упомянутого набора.

(2) Для каждого фиксированного k находятся полиномы $\delta_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})$, т.е. ОНД последовательности полиномов $\{\psi^{(j)}_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})\}$, $j=1,\dots,n$, и разложения вида

$$\psi^{(j)}_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})=\delta_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})\omega^{(j)}_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})$$
$$j=1,\dots n.$$

Здесь $\omega^{(j)}_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})$, $j=1,\dots,n$ (для каждого фиксированного $k=1,\dots n-1$) последовательность взаимно простых полиномов.

Полиномы (3.12) с учетом (3.11) примут вид

$$f_j(\mu_1,\dots,\mu_n)=$$
$$\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{1\leqslant i<\dots<i_k\leqslant n}\delta_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})\omega^{(j)}_{i_1,\dots,i_t}(\mu_{i_1},\dots,\mu_{i_k})g_j(\mu_1,\dots,\mu_n),$$
$$j=1,\dots,n \tag{3.13}$$

Здесь

$$g_j(\mu_1,\dots,\mu_n)=\delta_{1,\dots,n}(\mu_1,\dots,\mu_n)\omega^{(j)}_{i_1,\dots,n}(\mu_i,\dots,\mu_n).$$

Алгоритм вычисления ОНД полиномов от многих переменных см. в [29].

(3) Формируется матрица

$$G(\bar\mu)=\big[g_1(\bar\mu),\dots,g_n(\bar\mu)\big]=$$
$$C_s(\mu_2,\dots,\mu_n)\mu_1^s+C_{s-1}(\mu_2,\dots,\mu_n)\mu_1^{s-1}+\dots+C_0(\mu_2,\dots,\mu_n),$$

где s – максимальная степень по μ_1 в элементах матрицы $G(\bar\mu)$.

(4) Применяя алгоритм ΔW-q факторизации [29] (μ_1 есть ведущий параметр) находим ранговую факторизацию вида

$$G(\bar\mu)W(\bar\mu)=\big[\Delta(\bar\mu),0,\dots,0\big],$$

где $\Delta(\bar\mu)$ есть полином от n переменных.

(5) Полином $\Delta(\bar\mu)=\mu_1^s a_s(\mu_2,\dots,\mu_n)+\dots+a_0(\mu_2,\dots,\mu_n)$ представляется в виде

$$\Delta(\bar\mu)=\varphi_1(\mu_2,\dots,\mu_n)\delta_{1,2,\dots,n}(\mu_1,\dots,\mu_n). \tag{3.14}$$

Для этого находится полином $\varphi_1(\mu_2, \dots, \mu_n)$, т.е. ОНД полиномов $\{a_k(\mu_2, \dots, \mu_n))\}$, $k = 0, \dots, s$, и разложения вида

$$a_k(\mu_2, \dots, \mu_n) = \varphi_1(\mu_2, \dots, \mu_n)\hat{a}_k(\mu_2, \dots, \mu_n),$$

где $\{\hat{a}_k\}$ усть последовательность взаимно простых полиномов. Полагая

$$\delta_{1,\dots,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{k=0}^{s} \mu_1^k \hat{a}_k(\mu_2, \dots, \mu_n),$$

получим (3.14).

В результате выполнения операций (1)–(5) будет найдена относительная факторизация полинома $h(\bar{\mu})$, который является ОНД последовательности полиномов $\{f_k(\bar{\mu})\}$, $k = 1, \dots, n$:

$$h(\bar{\mu}) = \delta_{1,\dots,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} \delta_{i_1,\dots,i_k}(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k}).$$

(6) Вычисляются n-кратные узловые корни полинома $h(\bar{\mu}) = h(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Для этого (см.§1) следует выделить цепочки из n уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0 \\
\delta_{k+1,k+2}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta_{k+1,\dots,n}(\mu_{k+1}, \dots, \mu_n) = 0 \\
\delta_{k,k+1,\dots,n}(\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta_{1,\dots,n}(\mu_1, \dots, \mu_n) = 0
\end{array}\right\}, \qquad (3.15)$$

$k = 0, \dots, n-1$, и найти их корни, т.е. наборы $\bar{\mu}_* = (\mu_1^*, \dots, \mu_n^*)$. Существование уравнений вида (3.15), состоящих из полиномов, нетривиальных относительно своих переменных, будет свидетельствовать о существовании n-кратных узловых корней ОНД $h(\bar{\mu})$ системы (3.11), которые входят в число наборов $\bar{\mu}_*$, решающих обратную задачу для $A(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Реализация второй стадии решения системы (3.11) требует выполнеия следующих операций.

(1) Находится относительная факторизация полинома $\varphi_1(\mu_2, \dots, \mu_n)$ из (3.14) и его $(n-1)$ кратные узловые корни, образующие наборы $(\mu_2^*, \dots, \mu_n^*) \equiv \mu_{n-1,i}^*$. Эта операция реализуется

аналогично операциям (5)–(6) первой стадии алгоритма (2). Для каждого фиксированного набора $\bar{\mu}^*_{n-1}$, составляется СНАУ-1 вида

$$\frac{f(\mu_1, \bar{\mu}^*_{n-1})}{h(\mu_1, \bar{\mu}^*_{n-1})} = 0,$$

и находятся ее решения μ_{1*}. Так построенные наборы $(\mu_{1*}, \bar{\mu}_{n-1,*}) \equiv \bar{\mu}_*$ вместе с корнями $h(\bar{\mu})$ дадут дискретные решения СНАУ (3.11), т.е. решение рассматриваемой обратной задачи.

3.4. Обратная задача для рациональной матрицы.

Пусть $A(\bar{\mu}) \equiv A(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ регулярная $n \times n$ матрица с элементами, рационально зависящими от q-параметров $\mu_1, \ldots, \mu_q$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ заданные числа, среди которых нет равных.

Для решения обратной задачи на собственные значения матрицы $A(\bar{\mu})$ требуется найти дискретные корни нелинейной системы (3.11), коэффициенты $p_k(\bar{\mu})$ которой рациональные функции.

Систему (3.11) рациональных уравнений запишем в виде

$$\frac{f_k(\bar{\mu})}{g_k(\bar{\mu})} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.16}$$

где $f_k(\bar{\mu})$ и $g_k(\bar{\mu})$ – полиномы от q-переменных. В матричной форме система (3.16) будет

$$R(\bar{\mu}) = \begin{bmatrix} g_1(\bar{\mu}) & & \\ & \ddots & \\ & & g_n(\bar{\mu}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\bar{\mu}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{\mu}) \end{bmatrix} = 0. \tag{3.17}$$

Используя алгоритм несократимой факторизации (см. [28] для $q = 1, 2$ и [30] для $q \geqslant 2$) систему (3.16) запишем в эквивалентном виде

$$R(\bar{\mu}) = S(\bar{\mu})T^{-1}(\bar{\mu}) = 0. \tag{3.18}$$

Здесь $S(\bar{\mu})$ есть $n \times 1$ матрица, элементы которой суть скалярные полиномы от q переменных; $T(\bar{\mu})$ – скалярный полином от q-переменных; при этом система $[T(\bar{\mu}), S(\bar{\mu})]^B X = 0$ не имеет решений. Дискретные корни СНАУ вида

$$S(\bar{\mu}) = 0$$

и n-кратные узловые корни полинома $T(\bar{\mu})$, дадут решение обратной задачи на собственные значения матрицы $A(\bar{\mu})$ с рациональным вхождением параметров $\bar{\mu} = \mu_1, \ldots, \mu_q$ в ее элементы.

Литература

1. F. W. Biegler-König, *A Newton iteration process for inverse eigenvalue problems.* — Numer. Math. **37** (1981), 349–354.
2. Z. Bohte, *Numerical solution of the inverse algebraic eigenvalue problem.* — Computer J. **10** (1968), 385–388.
3. M. T. Chu, *Solving additive inverse eigenvalue problems for symmetric matrices by the homotopy method.* — IMA J. Numer. Anal. **9** (1990), 331–342.
4. Some inverse characteristic value problems, — J. Assoc. Comput. Mach. **3** (1956), 202–207.
5. S. Friedland, *Inverse eigenvalue problems.* — Linear Algebra Appl. **17** (1977), 15–51.
6. S. Friedland, J. Nocedal, and M. L. Overton, *The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems.* — SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 634–667.
7. B. S. Garbow, et al., *Matrix Eigensystem Routings EISPACK Guide Extension.* Springer-Verlag, 1977.
8. K. P. Hadeler, *Newton–Verfahren für inverse Eigenwertaufgaben.* — Numer. Math. **12** (1968), 35–39.
9. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.
10. В. Н. Кублановская, *Об одном подходе к решению обратной проблемы на собственные значения матрицы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ (1970), 138–154.
11. P. Lancaster, *On eigenvalues of matrices dependent on a parameter.* — Numer. Math. **5**, 377–387.
12. P. Lancaster, *Algorithms for lambda-matrices.* — Numer. Math. **6** (1964), 388–394.
13. P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices with Applications.* Academic Press, New York, 1985.
14. P. Morel, *Des algorithmes pour le problème inverse des valeurs propres.* — Linear Algebra Appl. **13** (1976), 251–273.
15. J. Nocedal and M. L. Overton, *Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems.* — Lect. Notes Math. **1005**, Springer-Verlag, Berlin, New York (1983), pp. 212–226.
16. M. Ortega and W. C. Rheinbolt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several variables.* Academic Press, New York, 1970.
17. F. Rellich, *Perturbation Theory of Eigenvalue problems.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris, 1969.
18. J.-G. Sun, *Multiple eigenvalue sensitivity analysis.* — Linear Algebra Appl **137/138** (1990), 183–211.

19. J.-Г. Сунанд Ч. Ые. Тхе унсолвабилиты оф инверсе алгебраиц еигенвалуе проблемс алмост еверыщхере, — Јоурнал оф Цомпутатионал Матх. **4** (1986), 212–226.
20. J. Y. Wang and B. S. Garlow, *A numerical method for solving inverse real symmetric eigenvalue problems.* — SIAM J. Sci. Statist. Comput. **4** (1983), 45–51.
21. J. H. Wilkinson and C. Reinsch, *Handbook for Automatic Computation.* Vol. II, Linear Algebra, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1971.
22. S.-F. Xu, *A homotopy algorithm for solving inverse eigenvalue problems (in Chinese).* — Math. Numer. Sinica **14** (1992), 128–135.
23 Q. Ye. A class of iterative algorithms for solving inverse eigenvalue problems (in Chinese), — Math. Numer. Sinica **9** (1987), 144–153.
24. Hua Dai and P. Lancaster, *Newton's method for an inverse eigenvalue problem of vibrating systems.* — Linear Algebra Appl (1997).
25. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.* Физматгиз, Москва, 1963.
26. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, Москва (1988).
27. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–329.
28. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физики **36 No. 8** (1996), 6–11.
29. В. Н. Кублановская, *О некотором подходе к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
30. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Спектральные задачи для рациональных матриц от многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ.

Kublanovskaya V. N. An approach to solving inverse eigenvalue problems for matrices.

The paper considers different formulations of inverse eigenvalue problems for matrices whose entries either polynomially or rationally depend on unknown parameters. An approach to solving inverse problems together with numerical algorithms is suggested. The solution of inverse problems is reduced to the problem of finding the so-called discrete solutions of nonlinear algebraic systems. The corresponding systems are constructed using the trace method, and their discrete roots are found by applying the algorithms for solving nonlinear algebraic systems in several variables previously suggested by the author.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 февраля 1998 г.