Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

В. Н. Кублановская

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАНГОВОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ К АНАЛИЗУ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Резюме. Метод ранговой факторизации (ΔW-q метод), предложенный автором в [1] для решения многопараметрических задач алгебры для матриц F с полиномиальным вхождением параметров, применяется для анализа конечного спектра матрицы F. Особое внимание уделяется той части $\sigma[F]$, спектра q-параметрической полиномиальной матрицы F, точки которой не зависят, по крайней мере, от одного из спектральных параметров.

В терминах спектров регулярной матрицы W (реализующей ΔW-q разложение матрицы F) и ее столбцовых подматриц $W = [W_1, W_0]$, $W_0 = N_c[F]$, исследуется структура $\sigma[F]$.

Вводится понятие "уровень двойственности" точек спектра F, которое в некотором смысле является обобщением понятия элементарный делитель для собственных значений однопараметрической полиномиальной матрицы.

Приводятся определения векторных спектральных характеристик и способы вычисления некоторых из них.

Дается характеристика особых точек спектра матрицы F.

Введение

Пусть $F(\mu_1, \dots, \mu_q) = \{f_{ij}(\mu_1, \dots, \mu_q)\}$ есть q-параметрическая полиномиальная $m{\times}n$ матрица ранга ρ; $f_{ij}(\mu_1, \dots, \mu_q)$ – полиномы от q-переменных:

$$F(\lambda, \overline{\mu}) := C_s(\overline{\mu})\lambda^s + \ldots + C_0(\overline{\mu}),$$

где $\overline{\mu} := (\mu_2, \dots, \mu_q)$, $C_k(\overline{\mu})$, $k = 0, \dots, s$, полиномиальные $(q-1)$-параметрические $m \times n$ матрицы.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-01-00110).

Статья является продолжением исследований, рассмотренных автором в [1, 2] по применению метода ранговой факторизации (ΔW-q-метода) к решению некоторых q-параметрических задач алгебры с полиномиальным вхождением параметров.

Под ΔW-q-методом понимается метод, основанный на факторизации матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ вида:

$$F(\lambda, \overline{\mu})\, W(\lambda, \overline{\mu}) = \big[\Delta(\lambda, \overline{\mu}), \mathbb{O}\big].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, $\Delta(\lambda, \overline{\mu})$ и $W(\lambda, \overline{\mu}) = [W_1(\lambda, \overline{\mu}), W_0(\lambda, \overline{\mu})]$ полиномиальные q-параметрические $m \times \rho$ и $n \times n$ матрицы соответственно; $W(\lambda, \overline{\mu})$ – регулярная матрица, унимодулярная по параметру λ с $n \times (n-\rho)$ блоком $W_0(\lambda, \overline{\mu})$, столбцы которого образуют базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

Статья состоит из введения и четырех параграфов.

В §1 рассматриваются скалярные спектральные характеристики матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Дается классификация точек конечного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Особое внимание уделяется той части конечного спектра, которая не зависит от ведущего (спектрального) параметра λ. Вводится понятие точек смешанного спектра.

В §2 исследуются свойства спектральных характеристик матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ (реализующей ΔW-q-разложение матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$) и ее подматриц $W_1(\lambda, \overline{\mu})$ и $W_0(\lambda, \overline{\mu})$.

В §3 устанавливается связь между спектрами матриц $F(\lambda, \overline{\mu})$ и $W(\lambda, \overline{\mu})$. Вводятся в рассмотрение обобщенные собственные векторы. В терминах обобщенных собственных векторов дается определение регулярных, сингулярных и регулярно-сингулярных собственных значений и им соответствующих собственных векторов матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Рассматриваются особые точки спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ и их свойства. Вводятся понятия простых и двойственных точек спектра матрицы, исследуются их свойства.

В §4 приводятся алгоритмы вычисления точек спектра, построения собственных векторов и вычисления точек пересечения регулярных и сингулярных собственных значений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

§1. Скалярные спектральные характеристики q-параметрических полиномиальных матриц общего вида

1.1. Определения.

Пусть $\mathcal{M}_\rho^{m\times n}$ есть множество q-параметрических полиномиальных $m\times n$ матриц $F(\lambda,\overline{\mu}\,) \equiv F(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q)$ ранга ρ. Матрицу $F(\mu_1,\ldots,\mu_q)$ будем записывать также в виде матричного полинома:

$$F(\lambda,\overline{\mu}\,) = C_s(\overline{\mu})\lambda^s + C_{s-1}(\overline{\mu})\lambda^{s-1} + \ldots + C_0(\overline{\mu}),$$

где параметр λ называется ведущим (спектральным); $\overline{\mu} = (\mu_2,\ldots,\mu_q)$ – мультииндекс из дополнительных параметров $\mu_2,\ldots,\mu_q$, s-степень матрицы по параметру λ. В качестве ведущего может быть выбран любой из параметров $\mu_1,\ldots,\mu_q$. Для определенности считаем $\lambda = \mu_1$. Когда способы записи параметров не являются существенными, будем опускать эти параметры при записи матрицы, её элементов и других объектов, связанных с ними.

Различают регулярные и сингулярные матрицы. Регулярной называется квадратная многопараметрическая матрица $F(\lambda,\overline{\mu}\,) \in \mathcal{M}_m^{m\times m}$, определитель которой отличен от тождественного нуля. В противном случае матрица $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ называется сингулярной. Через $\rho = \operatorname{rank} F$ обозначается нормальный ранг матрицы F, т.е. максимальный порядок её минора

$$F\begin{pmatrix} i_i\ldots i_\rho \\ j_1\ldots j_\rho \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} 1\leqslant i_1<\ldots<i_\rho\leqslant m \\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_\rho\leqslant n, \end{matrix}$$

отличного от тождественного нуля. Конечным спектром $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}\,) \in \mathcal{M}_\rho^{m\times n}$ называется геометрическое место точек, на которых ранг матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ меньше ρ. Координаты точек спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений от q-переменных (СНАУ-q) вида

$$Z[F] := F\begin{pmatrix} i_i\ldots i_\rho \\ j_1\ldots j_\rho \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{matrix} 1\leqslant i_1<\ldots<i_\rho\leqslant m \\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_\rho\leqslant n. \end{matrix} \tag{1.1}$$

Левые части уравнений системы (1.1) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$, так что система (1.1) имеет $N = C_m^\rho C_n^\rho$ уравнений. Решения системы (1.1) состоят из $(q-1)$-мерных и $(q-k)$-мерных корней $1<k\leqslant \min(N,q)$ (см., например, [4]).

Запишем (1.1) в виде трех СНАУ

$$\delta[F] = 0, \tag{1.2}$$

система, корни которой $(q-1)$-мерные решения (1.1);

$$\widehat{Z}\,[F] = 0, \tag{1.3}$$

система, корни которой суть $(q-k)$-мерные решения $(k = 2, \dots, q)$ системы (1.1);

$$\begin{cases} \delta\,[F] = 0, \\ \widehat{Z}\,[F] = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

система, корни которой образуют, так называемые, “смешанные” решения системы (1.1).

Здесь обозначены: $\delta[F] := \delta(\lambda, \overline{\mu})$, общий наибольший делитель всех миноров, стоящих в левой части СНАУ (1.1); $\widehat{Z}\,[F] = \frac{1}{\delta[F]} Z[F]$ вектор, компоненты которого $z_i(\lambda, \overline{\mu})$, $i = 1, \dots, N$, суть взаимно простые полиномы над кольцом полиномов, зависящих от q-переменных.

В решении спектральных задач q-параметрических полиномиальных матриц важную роль играют матрицы, спектр которых или состоит из точек, не зависящих от спектрального параметра λ, или содержит такие точки.

Исследованию свойств спектра матриц $F(\lambda, \overline{\mu})$, все точки которого являются равноправными, посвящена статья [3]. Здесь мы особое внимание будем уделять матрицам $F(\lambda, \overline{\mu})$, точки спектра которых не зависят от λ, используя для этой цели метод ΔW-q-факторизации.

Обозначим $\sigma_{r1}[F]$ – множество точек $\sigma_r[F]$ конечного регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащих решениям уравнения (1.2) (многжество $(q-1)$ мерных решений системы (1.1)); $\sigma_{s1}[F]$ – множество точек $\sigma_s[F]$, конечного сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащих решениям уравнения (1.3) (множество $(q-k)$-мерных $(k \neq 1)$ решений системы (1.1)); $\sigma_{\mathrm{mix}}[F]$ – множество точек конечного смешанного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащих решениям системы (1.4).

Символы $\widehat{\sigma}_r[F]$, $\widehat{\sigma}_{r1}[F]$, $\widehat{\sigma}_s[F]$, $\widehat{\sigma}_{s1}[F]$ и $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F]$ обозначают аналогичные множества точек спектра $\widehat{\sigma}[F]$ (или $\sigma[F]$), не зависящих от параметра λ.

Полином $\widehat{\delta}[F]$ для матриц $F(\lambda,\overline{\mu})$, спектр которых содержит точки, независящие от λ, в общем случае может быть представлен в виде

$$\widehat{\delta}[F] \equiv \delta(\lambda,\overline{\mu}) = \delta(\overline{\mu})\widehat{\delta}(\lambda,\overline{\mu}), \tag{1.5}$$

где $\delta(\overline{\mu})$ полином от переменных из множества $\{\mu_2,\ldots,\mu_q\}$; $\widehat{\delta}(\lambda,\overline{\mu})$ – полином вида

$$\widehat{\delta}(\lambda,\overline{\mu}) = \sum_{k=0}^{t} \widehat{\alpha}_k(\overline{\mu})\lambda^k, \tag{1.6}$$

где $\{\widehat{\alpha}_k(\overline{\mu})\}_{k=0,\ldots,t}$ есть последовательность взаимно простых полиномов над кольцом $\mathbb{C}[\overline{\mu}]$.

1.2. Точки смешанного спектра.

Множество $\sigma_{\mathrm{mix}}[F]$ представим в виде:

$$\sigma_{\mathrm{mix}}[F] = \sigma^2_{rs}[F] \cup \widehat{\sigma}^1_{rs}[F] \cup \widehat{\sigma}^0_{rs}[F].$$

К множеству $\sigma^2_{rs}[F]$ отнесем точки спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, удовлетворяющие условиям:

(а) Набор параметров $\overline{\mu}^*$ является узловой точкой полинома $\delta(\overline{\mu})$, принадлежащего $\widehat{\delta}[F]$.

(б) Точки $\lambda = \lambda_*$, являющиеся корнями уравнения $\widehat{\delta}(\lambda,\overline{\mu}^*) = 0$, вместе с набором $\overline{\mu}^*$ образуют $(\lambda_*,\overline{\mu}^*)$-точку, принадлежащую $(q{-}k)$-мерному корню СНАУ (1.1). В частности, если $\overline{\mu}^*$-узловая точка нулевого уровня полинома $\delta(\overline{\mu})$, то $(\lambda_*,\overline{\mu}^*)$ есть точки нульмерного решения СНАУ (1.1).

Теорема 1.1. *Для того, чтобы $\sigma^2_{rs}[F]$ было непустым множеством,*) необходимо и достаточно выполнение следующий условий.*

1) *Полином $\delta[F]$ представим в виде (1.5), (1.6).*
2) *Среди корней полинома $\delta(\overline{\mu})$ существует $\overline{\mu}^*_{q-k}$ узловая точка $(q-k)$-го уровня.**)*
3) *Корни $\overline{\lambda}_k$ полинома*

$$\widehat{\delta}(\overline{\lambda}) := \widehat{\delta}(\overline{\lambda},\overline{\mu}^*_{q-k})$$

---

*) Здесь и ниже $(\overline{\lambda}_k,\overline{\mu}^*_{q-k})$ обозначает точку из C^q, где $\overline{\mu}^*_{q-k}$ – набор фиксированных координат, $\overline{\lambda}_k$ свободные (произвольно выбираемые) координаты, причем $\lambda \in \overline{\lambda}_k$.

**) Узловой точкой k-го уровня [6] называется точка пересечения кривых $\psi_{k+1}(\mu_{k+1})$, $\psi_{k+1\,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}),\ldots,\psi_{k+1\ldots q}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q)$, которые входят в *вместе с набором* $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k}$ *являются* $(q-k)$*-мерным решением СНАУ* (1.1).

Справедливость теоремы следует из определения точек смешанного спектра $\sigma^2_{rs}[F]$.

Следствие 1.2. *Для того, чтобы множество* $\sigma^2_{rs}[F]$ *было непусто необходимо, чтобы полином* $\widehat{\delta}\,[F]$ *был представим в виде* (1.5), (1.6).

Для определения множеств $\widehat{\sigma}^i_{rs}[F]$, $i = 0,1$, $\widehat{\sigma}_{rs}[F] = \widehat{\sigma}^0_{rs}[F] \cup \widehat{\sigma}^1_{rs}[F]$, смешанного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$, привлекаются не только скалярные характеристики, но и векторные характеристики.

Точка $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ принадлежит $\widehat{\sigma}_{rs}[F]$, если существует столбцово-нормированный*) полиномиальный вектор $x(\lambda, \overline{\mu})$, удовлетворяющий условиям:

$$(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \in \left\{\sigma^-_s[x] \cap \widehat{\sigma}[F]\right\}$$

или (что то же) точка $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} F(\lambda, \overline{\mu})x(\lambda, \overline{\mu}) = 0 \\ Z[x(\lambda, \overline{\mu})] = 0. \end{cases}$$

Дадим другое определение точек множеств $\sigma^i_{rs}[F] \subseteq \sigma[F]$. Для этого введем в рассмотрение подпространства $\mathcal{X}_r[\lambda, \overline{\mu}\,]$ и $\mathcal{X}_s[\lambda, \overline{\mu}\,]$,

---

относительную факторизацию полинома $\delta(\overline{\mu})$:

$$\delta(\overline{\mu}) = \prod_{k=2}^{k} \prod_{2 \leqslant i_2 < \ldots < i_q \leqslant q} \psi_{i_2 \ldots i_k}(\mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k}).$$

Здесь $\psi_{i_2 \ldots i_k}(\mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k})$ – скалярный полином от $(k-1)$-переменных $\mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k}$, не имеющий своими делителями полиномов от любого числа i-переменных $(2 \leqslant i \leqslant k)$ из множества $\{\mu_{i_2}, \ldots, \mu_{i_k}\}$. Об относительной факторизации полиномов от $q \geqslant 2$ переменных и алгоритме её реализации, см. [5].

*) Вектор $x(\lambda, \overline{\mu})$ называется столбцово-нормированным, если все его компоненты суть взаимно-простые полиномы ($\delta[x] = \mathrm{const}$); $\sigma^-_s[x]$ есть множество $(q-k)$-мерных $(k \neq 1)$ решений СНАУ вида

$$x(\lambda, \overline{\mu}) = 0.$$

которые суть линейные оболочки из собственных векторов, соответствующих $(q-1)$-мерным и $(q-k)$-мерным решениям СНАУ (1.1). Рассмотрим множество векторов

$$\Gamma(\lambda,\overline{\mu}) := \{\mathcal{X}_r[\lambda,\overline{\mu}] \cap \mathcal{X}_s[\lambda, F]\}.$$

К точкам множеств $\widehat{\sigma}^i_{rs}[F] \subseteq \widehat{\sigma}[F]$, $i = 0, 1$, относятся точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$, для которых $\Gamma(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ есть непустое множество. При этом точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$, на которых $\Gamma(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ есть нулевой вектор, составляют множество $\widehat{\sigma}^0_{rs}[F]$. Точки (λ, μ_{rs}), на которых $\Gamma(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ ненулевой вектор, составляют множество $\widehat{\sigma}^1_{rs}[F]$.

Существование и свойства точек смешанного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ будут рассмотрены в §3 настоящей статьи.

§2. Свойства спектральных характеристик матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$

Пусть $W(\lambda,\overline{\mu})$ есть q-параметрическая полиномиальная $n \times n$ матрица, реализующая ΔW-q-разложение матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}^{m\times n}_{\rho}$:

$$F(\lambda,\overline{\mu})W(\lambda,\overline{\mu}) = [\Delta(\lambda,\overline{\mu}), \mathbb{O}], \tag{2.1}$$

$$F(\lambda,\overline{\mu}) = \lambda^s C_s(\overline{\mu}) + \lambda^{s-1} C_{s-1}(\overline{\mu}) + \cdots + C_0(\overline{\mu}).$$

Здесь $\mathbb{O}$ есть нулевая $m{\times}(n-\rho)$ матрица; $\Delta(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}^{m\times\rho}_{\rho}$, $W(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}^{n\times n}_{n}$. Пусть $[W_1(\lambda,\overline{\mu}), W_0(\lambda,\overline{\mu})] = W(\lambda,\overline{\mu})$ есть блочное представление матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$: $W_1(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}^{m\times\rho}_{\rho}$, $W_0(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}^{n\times(n-\rho)}_{n-\rho}$.

Следующие свойства имеют место.

1°. Точки спектров каждой из матриц $W(\lambda,\overline{\mu})$, $W_1(\lambda,\overline{\mu})$ и $W_0(\lambda,\overline{\mu})$ не зависят от параметра λ.

2°. Спектры матриц $W_1(\lambda,\overline{\mu})$ и $W_0(\lambda,\overline{\mu})$ содержатся в спекте матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$.

3°. Столбцы матрицы $W_0(\lambda,\overline{\mu})$ образуют базис $N_c[F]$, правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, унимодулярный по ведущему параметру λ.

Справедливость свойств 1°–3° следует из алгоритма построения разложения (2.1) (см. [1]).

4°. Спектры каждой из матриц $W_1(\lambda,\overline{\mu})$ и $W_0(\lambda,\overline{\mu})$ не содержат точек смешанного спектра $\sigma^2_{rs}[W_i]$, $i = 0, 1$.

Действительно, по определению смешанный спектр матрицы $W_i(\lambda,\overline{\mu})$, $i = 1, 0$, состоит из решений СНАУ вида

$$\begin{cases} \delta\,[W_i] = 0 \\ \widehat{Z}\,[W_i] = 0. \end{cases}$$

Необходимым условием (см. Следствие 1.2) существования таких решений является наличие в полиноме $\delta[W_i]$, как множителя, полинома от q-переменных $\lambda, \mu_2, \ldots, \mu_q$. Но по построению матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ все её собственные значения суть нули полиномов, зависящих только от переменных из множества $\{\mu_2, \ldots, \mu_4\}$, так как матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ (согласно ΔW-q-алгоритма) формируется (с точностью до перестановок столбцов) как произведение левых треугольных матриц, диагональные элементы которых суть полиномы от перемнных из множества $\{\mu_2, \ldots, \mu_4\}$. Отсюда, учитывая, что $\sigma[W_i] \subseteq \sigma[W]$ следует справедливость свойства 4°.

Пусть $Y(\lambda, \overline{\mu}^*)$ есть правый собственный вектор матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$, соответствующий*) точке $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \sigma[W]$:

$$W(\lambda, \overline{\mu}^*)\, Y(\lambda, \overline{\mu}^*) = 0, \quad Y(\lambda, \overline{\mu}^*) \neq 0.$$

Обозначим через $y_1(\lambda, \overline{\mu}^*)$ и $y_2(\lambda, \overline{\mu}^*)$ блочные составляющие вектора $Y(\lambda, \overline{\mu}^*)$, состоящие соответственно из ρ и $(n-\rho)$ компонент

$$Y(\lambda, \overline{\mu}^*) = \Big(y_1(\lambda, \overline{\mu}^*), y_2(\lambda, \overline{\mu}^*)\Big)^T.$$

Полином $\varphi(\overline{\mu}) := \det W(\lambda, \overline{\mu})$ представим в виде

$$\varphi(\overline{\mu}) = \varphi_1(\overline{\mu})\, \varphi_2(\overline{\mu})\, \varphi_{12}(\overline{\mu}). \tag{2.2}$$

Здесь

$$\big\{\varphi_1(\overline{\mu}) = 0\big\} = \sigma[W_1]; \quad \big\{\varphi_2(\overline{\mu}) = 0\big\} = \sigma[W_0]$$

$$\varphi_{12}(\overline{\mu}) = \frac{\varphi(\overline{\mu})}{\varphi_1(\overline{\mu})\varphi_2(\overline{\mu})} \qquad \big\{\varphi_{12}(\overline{\mu}) = 0\big\} := \sigma_{12}[W].$$

Каждой точке $(\lambda, \overline{\mu}^*_1) \in \sigma\,[W_1]$ соответствует правый собственный вектор $Y_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1) = (y_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1), \mathbb{O})^T$, $y_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1) \neq 0$ и имеет место равенство:

$$W(\lambda, \overline{\mu}^*_1)\, Y_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1) = W_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1)\, y_1(\lambda, \overline{\mu}^*_1) = 0. \tag{2.3}$$

Каждой точке $(\lambda, \overline{\mu}^*_2) \in \sigma[W_0]$ соответствует правый собственный вектор $Y_2(\lambda, \overline{\mu}^*_2) = (\mathbb{O}, y_2(\lambda, \overline{\mu}^*_2))^T$, $y_2(\lambda, \overline{\mu}^*_2) \neq 0$, и имеет место равенство:

$$W(\lambda, \overline{\mu}^*_2)\, Y_2(\lambda, \overline{\mu}^*_2) = W_0(\lambda, \overline{\mu}^*_2)\, y_2(\lambda, \overline{\mu}^*_2) = 0. \tag{2.4}$$

*)Здесь и ниже $\overline{\mu}^*$ обозначает набор $(q-1)$-параметров, среди которых могут быть не все фиксированы.

Каждой точке $(\lambda, \overline{\mu}^{\,*}_{12}) \in \sigma_{12}[W]$ соответствует правый собственный вектор

$$Y_{12}(\lambda, \overline{\mu}^{\,*}_{12}) = \big(y_1(\lambda, \overline{\mu}^{\,*}_{12}), y_2(\lambda, \overline{\mu}^{\,*}_{12})\big)^T \neq 0$$

и имеет место равенство

$$\begin{aligned} &W(\lambda, \widehat{\mu}^*_{12})\, Y_{12}(\lambda, \widehat{\mu}^*_{12}) = \\ =&W_1(\lambda, \overline{\mu}_{12})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}) + W_0(\lambda, \overline{\mu}_{12})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Множество точек $\{\varphi_{12}(\overline{\mu}) = 0\}$ представим в виде суммы двух множеств

$$\big\{\varphi_{12}(\overline{\mu}) = 0\big\} = \sigma^1_{12}[W] \cup \sigma^0_{12}[W].$$

К точкам $(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \sigma^1_{12}[W]$ отнесем те точки $\sigma[W]$, собственные векторы $Y_{12}(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = (y_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}), y_2(\lambda, \overline{\mu}_{12}))^T$ которых, удовлетворяют условиям:

$$y_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \neq 0, \quad y_2(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \neq 0,$$

$$W_1(\lambda, \overline{\mu}_{12})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = -W_0(\lambda, \overline{\mu}_{12})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \neq 0. \tag{2.6}$$

К точкам $(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12}) \in \sigma^0_{12}[W]$ отнесем точки $\sigma[W]$, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &W_1(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12}) = 0; \\ &W_0(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12}) = 0; \\ &y_1(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12}) \pm 0; \quad y_2(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12}) \neq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *В точках множества* $\{\varphi_{12}(\overline{\mu}) = 0\}$ *пересечение подпространств* $\operatorname{span} W_1(\lambda, \overline{\mu})$ *и* $\operatorname{span} W_0(\lambda, \overline{\mu})$ *есть непустое множество.*

Справедливость леммы следует из определений точек множеств $\sigma^1_{12}[W]$ и $\sigma^0_{12}[W]$. В дальнейшем к точкам $(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \sigma[W]$, удовлетворяющим условиям (2.6), будем ссылаться как к точкам спектра $\sigma^1_{12}[W]$. К точкам $(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \sigma[W]$, удовлетворяющим условиям (2.7), будем ссылаться как к точкам спектра $\sigma^0_{12}[W]$, точкам пересечения спектров $\sigma[W_1]$ и $\sigma[W_0]$.

Теорема 2.2. 1. *Для того, чтобы* $(\lambda, \overline{\mu}_{12})$ *была точкой спектра* $\sigma^1_{12}[W]$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\{\operatorname{span} W_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \cap \operatorname{span} W_0(\lambda, \overline{\mu}_{12})\} \tag{2.8}$$

есть непустое, нетривиальное множество.

2. *Для того, чтобы точка* $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})$ *принадлежала точкам спектра* $\sigma^0_{12}[W]$ *необходимо и достаточно, чтобы множество*

$$\Big\{\operatorname{span} W_1(\lambda, \overline{\mu}^0_{12}) \cap \operatorname{span} W_0(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})\Big\} \tag{2.9}$$

состояло из нулевого вектора.

Справедливость следует из определений множеств $\sigma^1_{12}[W]$ и $\sigma^0_{12}[W]$.

С учетом свойства 4° матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ можно утверждать, что к точкам $\sigma^0_{12}[W]$ спектра матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ относятся точки, удовлетворяющие любому из следующих условий:

1) $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12}) \in \{\sigma_r\,[W_1] \cap \sigma_r[W_0]\}$, т.е. $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})$ есть точка пересечения $(q-1)$-мерных решений систем $Z[W_1] = 0$ и $Z[W_0] = 0$.

2) $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12}) \in \{\sigma_r\,[W_1] \cap \sigma^-_s[W_0]\}$, т.е. $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})$ есть точка пересечения $(q-1)$-мерного решения СНАУ $Z[W_1] = 0$ с $(q-k)$-мерным решением СНАУ $Z[W_1] = 0$.

3) $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12}) \in \{\sigma^-_s\,[W_1] \cap \sigma_r[W_0]\}$, т.е. $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})$ есть точка пересечения $(q-1)$-мерного решения СНАУ $Z[W_0] = 0$ с $(q-k)$-мерным решением СНАУ $Z[W_1] = 0$.

4) $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12}) \in \Big\{\sigma^-_s[W_1] \cap \sigma^-_s[W_0]\Big\}$, т.е. $(\lambda, \overline{\mu}^0_{12})$ есть точка пересечения $(q-k)$-мерных решений систем $Z[W_1] = 0$ и $Z[W_0] = 0$.

§3. Спектальные характеристики матриц, спектр которых не зависит от λ

Конечный спектр $\sigma\,[F]$ матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$ в общем случае можно представить в виде:

$$\sigma\,[F] = \widehat{\sigma}\,[F] \cup \widetilde{\sigma}\,[F].$$

Здесь $\widehat{\sigma}\,[F]$ – множество точек спектра $\sigma\,[F]$, не зависящих от ведущего параметра λ; $\widetilde{\sigma}\,[F]$ – множество точек $\sigma\,[F]$, зависящие от параметра λ.

Свойства спектральных характеристик точек множества $\widetilde{\sigma}\,[F]$ исследованы в работе [3]. Нас будут интересовать свойства спектральных характеристик, соответствующих точкам из $\widehat{\sigma}\,[F]$.

Будем рассматривать правые скалярные и векторные характеристики. Свойства левых характеристик матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ совпадают со свойствами правых для матрицы $F^T(\lambda,\overline{\mu})$, если $\{\sigma_s^+[F]\cap \sigma_s^-[F]\}$ есть пустое множество.

Для определенности*) в §3 будем предполагать, что матрица $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ имеет полный строчный ранг и её конечный спектр не зависит от ведущего параметра λ.

3.1. Классификация точек спектра $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$**.**

Пусть

$$F(\lambda,\overline{\mu}\,)=\sum_{k=0}^{s} C_k(\,\overline{\mu}\,)\lambda^k\in\mathcal{M}_m^{m\times n}\quad \text{и}\quad \sigma\,[F]=\widehat{\sigma}\,[F],$$

т.е. конечный спектр $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ состоит из точек $(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})$, не зависящих от параметра λ.

По определению конечного спектра в точках спектра матрица $F(\lambda,\overline{\mu}\,)$ имеет ранг меньше m, так что для каждой точки $(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})\in\widehat{\sigma}\,[F]$ существует вектор $x(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})$, удовлетворяющий уравнению

$$F(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})x(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})=0. \tag{3.1}$$

Столбцово-нормированный вектор $x(\lambda,\overline{\mu})$, удовлетворяющий системе

$$F(\lambda,\overline{\mu}\,)\,x(\lambda,\overline{\mu})=0$$

в точках $(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})\in\widehat{\sigma}\,[F]$, назовем *обобщенным собственным вектором*.

В случае $F(\lambda,\overline{\mu}\,)\in\mathcal{M}_m^{m\times m}$, т.е. в случае регулярной матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, правый ненулевой обобщенный собственный вектор совпадает с правым собственным вектором, соответствующим точке $(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})\in\widehat{\sigma}\,[F]$.

Точку $(\lambda,\overline{\mu}^{\,*})$, удовлетворяющую СНАУ (3.1), можно рассматривать как решение системы вида

$$Z[Fx]:=F(\lambda,\overline{\mu}\,)\,x(\lambda,\overline{\mu})=0 \tag{3.2}$$

*)Все результаты легко распространенить на случай матриц, спектр которых содержит как точки, не зависящие от параметра λ, так и точки, зависящие от параметра λ.

из n нелинейных алгебраических уравнений

$$z_i(\lambda,\overline{\mu}) = 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

где $z_i(\lambda,\overline{\mu})$, $i = 1,\dots,n$ – суть компоненты вектора $Z[Fx]$.

СНАУ (3.2) будем записывать в эквивалентном виде:

$$\delta\,[Fx] = 0, \tag{3.3}$$

$$\widehat{Z}\,[Fx] = 0. \tag{3.4}$$

Здесь $\delta\,[Fx] := \delta(\lambda,\overline{\mu})$ есть скалярный полином, являющийся общим наибольшим делителем полиномов $\{z_i(\lambda,\overline{\mu})\}$, $i = 1,\dots,n$; $\widehat{Z}\,[Fx]$ есть вектор из компонентов

$$\widehat{z}_i(\lambda,\overline{\mu}) := \frac{1}{\delta(\lambda,\overline{\mu})}\, z_i(\lambda,\overline{\mu}), \quad i = 1,\dots,n,$$

так что $\{\widehat{z}_i(\lambda,\overline{\mu})\}$, $i = 1,\dots,n$, есть последовательность взаимно простых полиномов от q-переменных.

Решения системы (3.2) состоят из трех групп: из решений системы вида

$$\begin{cases} Fx = 0, \\ Z[x] = 0; \end{cases} \tag{3.5}$$

из $(q-1)$-мерных решений СНАУ (3.3), не принадлежащих решениям СНАУ (3.5), и из $(q-k)$-мерных решений СНАУ (3.4), не принадлежащих решениям СНАУ (3.5).

3.2. Векторные характеристики матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

Определение векторных спектральных характеристик матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, соответствующих решениям СНАУ (3.2), дадим в терминах матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$, реализующей ΔW-q-разложение (2.1) матрицы

$$F(\lambda,\overline{\mu}) = \sum C_k(\overline{\mu})\lambda^k \in \mathcal{M}_m^{m\times n},$$

спектр которой не зависит от λ. Здесь мы используем следующие свойства матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$.

1°. Точки спектров $W(\lambda,\overline{\mu})$, $W_1(\lambda,\overline{\mu})$ и $W_0(\lambda,\overline{\mu})$ не зависят от параметра λ.

2°. Столбцы матрицы $W(\lambda,\overline{\mu})$ образуют базис пространства $C^n\,[\lambda,\overline{\mu}]$, в котором действует оператор $F(\lambda,\overline{\mu})$.

3°. Столбцы матрицы $W_0(\lambda, \overline{\mu})$ образуют базис $N_c[F]$, нуль пространства из правых полиномиальных решений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. При этом

$$\sigma_s^+[F] = \sigma_s^-[W_0].$$

Из свойств 1°–2° следует, что любой вектор $x(\lambda, \overline{\mu}) \in C^n[\lambda, \overline{\mu}]$ может быть представлен в виде

$$x(\lambda, \overline{\mu}) = x^1(\lambda, \overline{\mu}) + x^0(\lambda, \overline{\mu}). \tag{3.6}$$

Здесь

$$x^1(\lambda, \overline{\mu}) = W_1(\lambda, \overline{\mu})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}); \quad x^0(\lambda, \overline{\mu}) = W_0(\lambda, \overline{\mu})\, y_2(\lambda, \overline{\mu})$$

суть проекции $x(\lambda, \overline{\mu})$ соответственно на $\operatorname{span} W_1(\lambda, \overline{\mu})$ и $\operatorname{span} W_0(\lambda, \overline{\mu})$.

Представление (3.6) для обобщенного собственного вектора имеет вид

$$\begin{gathered} x(\lambda, \overline{\mu}^*) = x^1(\lambda, \overline{\mu}^*) + x^0(\lambda, \overline{\mu}^*), \quad (\lambda, \overline{\mu}^*) \in \widehat{\sigma}\,[F] \\ x^1(\lambda, \overline{\mu}^*) = W_1(\lambda, \overline{\mu}^*)\, y_1(\lambda, \overline{\mu}^*); \\ x^0(\lambda, \overline{\mu}^*) = W_0(\lambda, \overline{\mu}^*)\, y_2(\lambda, \overline{\mu}^*). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Обобщенный собственный вектор $x(\lambda, \overline{\mu}^*)$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} &F(\lambda, \overline{\mu}_*))\, x(\lambda, \overline{\mu}_*) = 0, \quad (\lambda, \overline{\mu}^*) \equiv (\lambda, \overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_r[F], \\ &x^1(\lambda, \overline{\mu}_*) \neq 0, \qquad\qquad\qquad x^0(\lambda, \mu_*) = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

называется *регулярным собственным вектором*, соответствующим точке $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Точка $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$ называется *точкой регулярного собственного значения* матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. При этом равенство

$$x^0(\lambda, \overline{\mu}_*) = W_0(\lambda, \overline{\mu}_*)\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_*) = 0 \tag{3.9}$$

означает, что $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ есть решение системы:

$$Z\,[W_0] = 0. \tag{3.10}$$

Обобщенный собственный вектор $x(\lambda, \overline{\mu}^*)$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{gathered} F(\lambda, \overline{\nu}_*)\, x(\lambda, \overline{\nu}_*) = 0, \quad (\lambda, \overline{\mu}_*) = (\lambda, \overline{\nu}_*) \in \widehat{\sigma}_s[F], \\ x^1(\lambda, \overline{\nu}_*) = 0, \qquad x^0(\lambda, \overline{\nu}_*) \neq 0, \end{gathered} \tag{3.11}$$

называется *сингулярным собственным вектором*, соответствующим точке $(\lambda, \overline{\nu}_*)$ сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Точка $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \widehat{\sigma}_s[F]$ называется *точкой сингулярного собственного значения* матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. При этом равенство

$$x^1(\lambda, \overline{\nu}_*) \equiv W_1(\lambda, \overline{\nu}_*)\, y_1(\lambda, \overline{\nu}_*) = 0 \tag{3.12}$$

означает, что $(\lambda, \overline{\nu}_*)$ есть решение системы

$$Z\,[W_1] = 0. \tag{3.13}$$

Из определений регулярного и сингулярного собственных значений следует справедливость утверждения.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы точка $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \widehat{\sigma}\,[F]$ была точкой регулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ необходимо, чтобы $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \sigma\,[W_0]$.*

Для того, чтобы точка $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \widehat{\sigma}\,[F]$ была точкой сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ необходимо, чтобы $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \sigma\,[W_1]$.

Среди точек, удовлетворящих уравнению (3.2), рассмотрим точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$, которые являются решениями СНАУ, составленной из компонент обобщенного собственного вектора, т.е. СНАУ вида

$$x(\lambda, \overline{\mu}) = 0. \tag{3.14}$$

Равенство $x(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = 0$ имеет место при выполнении, по крайней мере, одного из условий

$$\begin{aligned} x^1(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs}) &\equiv W_1(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs}) = 0, \\ x^0(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs}) &\equiv W_0(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs}) = 0; \end{aligned} \tag{3.15}$$

или

$$x^1(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \equiv W_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = -W_0(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \neq 0 \tag{3.16}$$

Выполнение (3.15) означает, что точка $(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs})$ принадлежит решению системы

$$\begin{cases} Z\,[W_0] = 0 \\ Z\,[W_1] = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Выполнение равенства (3.16) означает, что точка $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ не принадлежит ни регулярному, ни сингулярному собственным значениям матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. К таким точкам будем ссылаться как к точкам регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \mu)$. Вектор

$$W_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = -W_0(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \tag{3.18}$$

назовем регулярно-сингулярным собственным вектором, соответствующим точке $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

Приводим определение регулярно-сингулярного собственного вектора в терминах обобщенного собственного вектора.

Обобщенный собственный вектор $x(\lambda, \overline{\mu}^*)$, удовлетворяющий условиям

$$(\lambda, \overline{\mu}^*) = (\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \in \widehat{\delta}^1_{rs}[F]; \qquad x^1(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = -x^0(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \neq 0$$
$$F(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, W_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = 0, \qquad F(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, W_0(\lambda, \overline{\mu}_{rs})\, y_2(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = 0$$

называется *регулярно-сингулярным собственным вектором*, соответствующим точке $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

Множество точек из (3.16) обозначим $\widehat{\sigma}'_{rs}[F]$; множество точек из (3.15) обозначим $\widehat{\sigma}^{\,0}_{rs}[F]$, $\widehat{\sigma}_{rs}[F] := \widehat{\sigma}^{\,0}_{rs}[F] \cup \widehat{\sigma}^{\,1}_{rs}[F]$ есть множество точек смешанного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

Теорема 3.2. 1. *Для того, чтобы точка $(\lambda, \overline{\mu}^*)$ спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ была точкой пересечения регулярного и сингулярного собственных значений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, необходимо, чтобы она была точкой пересечения спектров $\sigma[W_1]$ и $\sigma[W_0]$.*

2. *В точках $(\lambda, \overline{\mu}^0_{rs})$ пересечения регулярного и сингулярного собственных значений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ пересечение подпространств* $\operatorname{span} W_1(\lambda, \mu^0_{rs})$ *и* $\operatorname{span} W_0(\lambda, \mu^0_{rs})$ *есть нулевой вектор.*

Теорема 3.3. 1. *Для того, чтобы точка $(\lambda, \overline{\mu}^*)$ спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ была точкой регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda.\overline{\mu})$, необходимо и достаточно, чтобы она была точкой множества $\sigma'_{12}[W] \subset \sigma[W]$: $(\lambda, \overline{\mu}^*) = (\lambda, \overline{\mu}_{rs}) = (\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \sigma'_{12}[W]$.*

2. *В точках $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ пересечение* $\operatorname{span} W_1(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ *и* $\operatorname{span} W_0(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ *есть ненулевой вектор.*

Справедливость утверждение (3.2), (3.3) следует из определения точек пересечения регулярных и сингулярных собственных значений и определения регулярно-сингулярных собственных значений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

Дадим формулировку теорем 3.2 и 3.3 в терминах обобщенных собственных векторов.

Пусть $\mathcal{X}(\lambda, \overline{\mu})$ – пространство обобщенных собственных векторов матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Обозначим $\mathcal{X}_r$, $\mathcal{X}_s$ и $\mathcal{X}_{rs}$ линейные оболочки из собственных векторов, отвечающих регулярным, сингулярным и регулярно-сингулярным собственным значениям матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ соответственно. Из сказанного выше следует справедливость утверждений

Теорема 3.4. 1. *Для того, чтобы точка $(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{rs})$ была точкой пересечения регулярного и сингулярного собственных значений матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, достаточно, чтобы пересечение подпространств $\mathcal{X}_r(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12})$ и $\mathcal{X}_s(\lambda, \overline{\mu}^{\,0}_{12})$ было нулевым вектором.*

2. *Для того, чтобы $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ была точкой регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, необходимо и достаточно, чтобы пересечение подпространств $\mathcal{X}_r(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ и $\mathcal{X}_s(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ было ненулевым вектором.*

Замечание. Точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ спектра матрицы $W(\lambda, \overline{\mu})$ являются так же точками спектра матрицы $W^T(\lambda, \overline{\mu})$, т.е. справедливы равенства

$$W_1^T(\lambda, \overline{\mu}_{12}) z(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = 0$$

$$W_0^T(\lambda, \overline{\mu}_{12}) z(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = 0,$$

так что $(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma[W_1^T] \cap \sigma[W_0^T]\}$. Следующие варианты могут иметь место:

$$(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma_r[W_1] \cap \sigma_r[W_0]\}; \quad (\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma_r[W_1] \cap \sigma_s^+[W_0^T]\};$$

$$(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma_s^+[W_1^T] \cap \sigma_r[W_0^T]\}; \quad (\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma_s^+[W_1^T] \cap \sigma_s^+[W_0^T]\};$$

$(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \{\sigma_{rs}[W_1^T] \cap \sigma_{rs}[W_0^T]\}$. Последний вариант имеет место, когда $z(\lambda, \overline{\mu}_{12}) = 0$.

Из сказанного следует справедливость утверждения

Теорема 3.5. *Общие точки смешанных спектров каждой из матриц* $W_0^T(\lambda,\overline{\mu})$ *и* $W_1^T(\lambda,\overline{\mu})$, *т.е. точки, принадлежащие общим решениям систем*

$$\begin{cases} W_0^T(\lambda,\overline{\mu})z(\lambda,\overline{\mu})=0 \\ z(\lambda,\overline{\mu})=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} W_1^T(\lambda,\overline{\mu})z(\lambda,\overline{\mu})=0 \\ z(\lambda,\overline{\mu})=0b \end{cases}$$

принадлежат множеству $\{\sigma_{12}[W^T]=\{\varphi_{12}(\overline{\mu})=0\}$.

Теорема 3.6. 1. *Для того, чтобы точка* $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ *смешанного спектра матрицы* $F(\lambda,\overline{\mu})\in\mathcal{M}_m^{m\times n}$, $\sigma[F]=\widehat{\sigma}[F]$ *была точкой регулярного спектра матрицы* $F(\lambda,\overline{\mu})$ *достаточно выполнение условия:*

$$(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\Big\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\widehat{\sigma}_s^{\,+}[F]\Big\},$$

или (что то же) условия:

$$(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\Big\{\sigma_{12}[W]\cap\sigma_s^-[W_0]\Big\}.$$

2. *Для того, чтобы точка* $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ *смешанного спектра матрицы* $F(\lambda,\overline{\mu})\in\mathcal{M}_m^{m\times n}$, $\sigma[F]=\widehat{\sigma}[F]$ *была точкой сингулярного спектра матрицы* $F(\lambda,\overline{\mu})$ *достаточно выполнение условия:*

$$(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\Big\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_s^-[W_1]\Big\},$$

или (что то же) условия:

$$(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\Big\{\sigma_{12}[W]\cap\sigma_s^-[W_1]\Big\}.$$

Справедливость утверждений 1 и 2 с учетом теорем 3.3 и 3.4 следует из определений точек регулярного, сингулярного и регулярно-сингулярного собственных значений матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

3.3. Простые и двойственные точки спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

Точка $(\lambda,\overline{\mu}^*)$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ называется *простой* точкой регулярного, сингулярного и регулярно-сингулярного спектров матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ соответственно, если выполяются следующие условия

- $\Big\{\widehat{\sigma}_r[F]\cap\sigma[W_0]\Big\}=\varnothing$ для точек $(\lambda,\overline{\mu}_*)\in\widehat{\sigma}_r[F]$;
- $\Big\{\widehat{\sigma}_s^+[F]\cap\sigma[W_1]\Big\}=\varnothing$ для точек $(\lambda,\overline{\nu}_*)\in\widehat{\sigma}_s^+[F]$;

- $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma\,[W_0]\right\}=\varnothing$ и $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma\,[W_1]\right\}=\varnothing$

  для точек $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\widehat{\sigma}_{rs}[F]$.

Точка $(\lambda,\overline{\mu}^*)$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ называется *двойственной* точкой регулярного, сингулярного и регулярно-сингулярного спектров $F(\lambda,\overline{\mu})$ соответственно, если выполнены следующие условия:

- $\left\{\widehat{\sigma}_{r}[F]\cap\sigma\,[W_0]\right\}\neq\varnothing$ для точек $(\lambda,\overline{\mu}_*)\in\widehat{\sigma}_r[F]$;
- $\left\{\widehat{\sigma}_{s}^{+}[F]\cap\sigma\,[W_1]\right\}\neq\varnothing$ для точек $(\lambda,\overline{\nu}_*)\in\widehat{\sigma}_s^{+}[F]$;
- $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma\,[W_0]\right\}\neq\varnothing$ и $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma\,[W_1]\right\}\neq\varnothing$

  для точек $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\widehat{\sigma}_{rs}[F]$.

Теорема 3.7. *Для того, чтобы $(\lambda,\overline{\mu}^*)$ была простой точкой спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, достаточно выполнение условий:*

- $\left\{\widehat{\sigma}_{r}[F]\cap\sigma_r[W_0]\right\}=\varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_{r}[F]\cap\sigma_s^-[W_0]\right\}=\varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_{r}[F]\cap\sigma_{rs}[W_0^T]\right\}=\varnothing$

  для точек $(\lambda,\overline{\mu}^*)=(\lambda,\overline{\mu}_*)\in\widehat{\sigma}_r[F]$*;*
- $\left\{\widehat{\sigma}\,_s^{+}[F]\cap\sigma_r[W_1]\right\}=\varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}\,_s^{+}[F]\cap\sigma_s^-[W_1]\right\}=\varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}\,_s^{+}[F]\cap\sigma_{rs}^{i}[W_1^T]=\varnothing\right.$

  для точек $(\lambda,\overline{\mu}^*)=(\lambda,\overline{\nu}_*)\in\widehat{\sigma}\,_s^{+}[F]$*;*
- $$\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_r[W_0]\right\}=\varnothing,\qquad\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_r[W_1]\right\}=\varnothing,$$

  $$\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_s^-[W_0]=\varnothing,\qquad\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_s^-[W_1]=\varnothing,\right.\right.$$
  $$\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_{rs}[W_0^T]\right\}=\varnothing,\quad\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F]\cap\sigma_{rs}[W_1^T]\right\}=\varnothing,$$

  для точек $(\lambda,\overline{\mu}^*)=(\lambda,\overline{\mu}_{rs})\in\widehat{\sigma}_{rs}[F]$*;*

Справедливость следует из определения простых точек и стуктуры спектров $\sigma\,[W_0]$ и $\sigma[W_1]$, т.е. из соотношений вида:

$$\sigma\,[W_i]=\sigma_r[W_i]\cup\sigma_s^-[W_i]\cup\sigma_{rs}[W_i^T],\quad i=0,1.$$

Следствие 3.8. 1) *Для того, чтобы $(\lambda,\overline{\mu}_*)$ была простой точкой регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ необходимо, чтобы в этой точке $\left\{\widehat{\sigma}_r[F]\cap\widehat{\sigma}_s^{+}[F]\right\}=\varnothing$.*

2) *Для того, чтобы* $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ *были простой точкой регулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \overline{\mu})$ *необходимо, чтобы в этой точке* $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \widehat{\sigma}_s^+[F]\right\} = \varnothing$.

Справедливость следует из теоремы 3.7.

Теорема 3.9. *Для существования двойственных точек в спектре матрицы* $F(\lambda, \overline{\mu})$, *необходимо и достаточно выполнение, по крайней мере, одного из следующих условий:*

- $\left\{\widehat{\sigma}_r[F] \cap \sigma_r[W_0]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_r[F] \cap \sigma_s^-[W_0]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_r[F] \cap \sigma_{rs}[W_0^T]\right\} \neq \varnothing$ *для точек* $(\lambda, \overline{\mu}^*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$;
- $\left\{\widehat{\sigma}_s^+[F] \cap \sigma_r[W_1]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_s^+[F] \cap \sigma_s^-[W_1]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_s^+[F] \cap \sigma_{rs}[W_1^T]\right\} \neq \varnothing$ *для точек* $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \widehat{\sigma}_s^+[F]$;
- $\left\{\sigma_{rs}[F] \cap \sigma_r[W_i]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\sigma_{rs}[F] \cap \sigma_s^-[W_i]\right\} \neq \varnothing$, $\left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \sigma_{rs}[W_i^T]\right\} \neq \varnothing$, $i = 0, 1$, *для точек* $(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \in \widehat{\sigma}_{rs}[F]$.

Справедливость следует из определения двойственных точек спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ и структуры спектров $\sigma[W_0]$ и $\sigma[W_1]$.

Следствия 3.10. 1. *Для того, чтобы* $(\lambda, \overline{\mu}_k)$ *была двойственной точкой регулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \overline{\mu})$ *достаточно выполнение в этой точке следующего условия:*

$$\widehat{\sigma}_r[F] \cap \widehat{\sigma}_s^+[F] \neq \varnothing.$$

2. *Для того, чтобы точка* $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ *была двойственной точкой регулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \overline{\mu})$ *достаточно выполнение в этой точке следующего условия:*

$$\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \widehat{\sigma}_s^+[F] \neq \varnothing.$$

3. *Для того, чтобы точка* $(\lambda, \overline{\nu}_{rs})$ *была двойственной точкой сингулярного спектра матрицы* $F(\lambda, \overline{\mu})$ *достаточно выполнение в этой точке следующего условия:*

$$\{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \widehat{\sigma}_s^-[W_1] \neq \varnothing.$$

Справедливость следует из теоремы 3.9 и равенства

$$\sigma_s^+[F] = \widehat{\sigma}_s^-[W_0].$$

Уровнем двойственности точки $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащей множеству $\sigma_r[W_0]$, называется число l, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered}(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \Big\{\Big\{\widehat{\sigma}_r[F] \cap \sigma_r[W_0]\Big\} \cap \Big\{\sigma_r[W_0] \cap \sigma_r[W_0^{(1)}]\Big\} \cap \ldots \\ \ldots \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-2)}\big] \cap \sigma_r\big[W_0^{(l-1)}\big]\Big\}\Big\}; \qquad (3.19) \\ (\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-1)}\big] \cap \sigma_r\big[W_0^{(l)}\big]\Big\}\Big\}.\end{gathered}$$

Здесь и ниже $W^{(k)}(\lambda, \overline{\mu}) := \big[W_1^{(k)}(\lambda, \overline{\mu}), W_0^{(k)}(\lambda, \overline{\mu})\big]$ есть матрица, реализующая ΔW-q разложение матрицы $[W_0^{(k-1)}(\lambda, \overline{\mu})]^T$, $k = 1, \ldots, l$; $W_0^{(0)}(\lambda, \overline{\mu}) = W_0(\lambda, \overline{\mu}) = N_c[F]$.

Уровнем двойственности точки $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma[F]$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащей множеству $\sigma^-[W_0]$, называется число l, удовлетворяющее соотношениям:

$$\begin{gathered}(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \Big\{\Big\{\widehat{\sigma}_r[F] \cap \sigma_s^-[W_0]\Big\} \cap \Big\{\sigma_r[W_0] \cap \sigma_s^-[W_0^{(1)}]\Big\} \cap \ldots \\ \ldots \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-2)}\big] \cap \sigma_s^-\big[W_0^{(l-1)}\big]\Big\}\Big\}; \qquad (3.20) \\ (\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-1)}\big] \cap \sigma_s^-\big[W_0^{(l)}\big]\Big\}\Big\}.\end{gathered}$$

Уровнем двойственности точки $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, принадлежащей множеству $\sigma_{rs}[W_0^T]$, называется число l, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered}(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \Big\{\Big\{\widehat{\sigma}_r^-[F] \cap \sigma_{rs}[W_0^T]\Big\} \cap \Big\{\sigma_r[W_0^{(1)}] \cap \sigma_{rs}[(W_0^{(1)})^T]\Big\} \cap \ldots \\ \ldots \cap \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-2)}\big] \cap \sigma_{rs}\big[(W_0^{(l-1)})^T\big]\Big\}\Big\}; \qquad (3.21) \\ (\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \Big\{\sigma_r\big[W_0^{(l-1)}\big] \cap \sigma_{rs}\big[(W_0^{(l)})^T\big]\Big\}\Big\}.\end{gathered}$$

Уровнем двойственности точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, для которой выполняется условие

$$(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \in \{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \sigma_s^+[F]\}, \qquad (3.22)$$

называется число l, удовлетворяющее соотношениям

$$(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \in \Big\{\Big\{\sigma_s^-[W_0] \cap \sigma_{12}[W]\Big\} \cap \Big\{\sigma_s^-[W_0^{(1)}] \cap \sigma_{12}[W^{(1)}]\Big\} \cap \ldots$$

$$\ldots \cap \Big\{\sigma_s^- \big[W_0^{(l-1)}\big] \cap \sigma_{12}\big[W_0^{(l-1)}\big]\Big\}\Big\}; \qquad (3.23)$$

$$(\lambda, \overline{\mu}_{rs}) \notin \Big\{\sigma_s^- \big[W_0^{(l)}\big] \cap \sigma_{12}\big[W^{(l)}\big]\Big\}\Big\}.$$

Аналогично определяется уровень двойственности точек сингулярного и смешанного спектров матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$. Так, например, уровнем двойственности точки (λ, ν_{rs}) сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, для которой выполняется условие

$$(\lambda, \overline{\nu}_{rs}) \in \{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \sigma_s^-[W_1]\}, \qquad (3.24)$$

называется число l, удовлетворяющее соотношениям

$$(\lambda, \overline{\nu}_{rs}) \in \Big\{\Big\{\sigma_s^-[W_1] \cap \sigma_{12}[W]\Big\} \cap \Big\{\sigma_s^-[W_1^{(1)}] \cap \sigma_{12}[W^{(1)}]\Big\} \cap \ldots$$

$$\ldots \cap \Big\{\sigma_s^- \big[W_1^{(l-1)}\big] \cap \sigma_{12}\big[W^{(l-1)}\big]\Big\}\Big\}; \qquad (3.25)$$

$$(\lambda, \overline{\nu}_{rs}) \notin \Big\{\sigma_s\big[W_1^{(l)}\big] \cap \sigma_{12}\big[W^{(l)}\big]\Big\}\Big\}.$$

Замечания. 1. Если $l[F]$, уровень двойственности точки $(\lambda, \overline{\mu}_{rs})$ регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ относительно спектра матрицы $W_0(\lambda, \overline{\mu})$, больше единицы, то уровень двойственности той же точки регулярного спектра матрицы $W_0(\lambda, \overline{\mu})$ относительно спектра $W_0^{(1)}(\lambda, \overline{\mu})$ на единицу меньше

$$l_r[W_0] = l_r[F] - 1.$$

В частности, если уровень двойственности $l[F]$ точки регулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ равен единице, то эта точка является простой точкой регулярного спектра матрицы $W_0(\lambda, \overline{\mu})$ или (другими словами) имеет нулевой уровень двойственности ($l[W_0] = 0$). Аналогичные утверждения справедливы для двойственных точек как сингулярного, так и смешанного спектров матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$.

2. В ситуации, когда $F(\lambda, \overline{\mu})$ имеет полный столбцовый ранг и $\sigma[F] = \widehat{\sigma}[F]$, к двойственным точкам регулярного, сингулярного и смешанного спектров матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ относятся двойственные точки соответственно регулярного, сингулярного и смешанного спектров матрицы $F^T(\lambda, \overline{\mu})$. В этом случае в равенствах (3.19)–(3.25) следует заменить $F(\lambda, \overline{\mu})$ на $F^T(\lambda, \overline{\mu})$; в качестве матрицы $W(\lambda, \overline{\mu}) = [W_1(\lambda, \overline{\mu}), W_0(\lambda, \overline{\mu})]$ использовать матрицу, реализующую ΔW-q разложение матрицы $F^T(\lambda, \overline{\mu})$ так, что $W_0(\lambda, \overline{\mu}) = N_c[F^T]$.

3.4. Структура спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

3.4.1. Из сказанного выше можно сделать следующие выводы относительно структуры конечного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

1. Если матрица $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$ имеет конечный спектр $\sigma[F]$, не зависящий от спектрального параметра λ (т.е. $\sigma[F] = \widehat{\sigma}[F]$), то
$$\widehat{\sigma}\,[F] = \widehat{\sigma}_r[F] \cup \widehat{\sigma}_s^+[F] \cup \widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F].$$
Здесь обозначены

- $\widehat{\sigma}_r[F] = \widehat{\sigma}_{r1}[F] \cup \widehat{\sigma}_{r2}[F]$: $\widehat{\sigma}_{r1}[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_0]\big\} = \varnothing$ – множество простых точек конечного регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, $\widehat{\sigma}_{r2}[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_0]\big\} \neq \varnothing$ – множество двойственных точек конечного регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$;
- $\widehat{\sigma}_{s1}^+[F] = \widehat{\sigma}_{s1}^+[F] \cup \widehat{\sigma}_{s2}^+[F]$: $\widehat{\sigma}_{s1}^+[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_1] = \varnothing$ – множество простых точек конечного сингулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, $\widehat{\sigma}_{s2}^+[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_1] \neq \varnothing$ – множество двойственных точек конечного сингулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$;
- $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F] = \widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}1}[F] \cup \widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}2}[F]$: $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}1}[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_0] \cap \sigma[W_1]\big\} = \varnothing$ – множество простых точек конечного $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F]$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}2}[F] := \big\{\widehat{\sigma}[F] \cap \sigma[W_0] \cap \sigma[W_1]\big\} \neq \varnothing$ – множество двойственных точек конечного $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F]$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

2. Если спектр матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$ состоит из точек как зависящих, так и не зависящих от параметра λ, то
$$\sigma[F] = \widehat{\sigma}\,[F] \cup \widetilde{\sigma}[F].$$
Здесь $\widetilde{\sigma}[F]$ обозначена часть спектра, точки которого зависят от λ, так что
$$\sigma[F] = \widehat{\sigma}\,[F] \cup \widetilde{\sigma}_r[F] \cup \sigma_{rs}^2[F].$$
$\sigma_{rs}^2[F]$ – множество точек спектра $\sigma_{\mathrm{mix}}[F]$ матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, $\widetilde{\sigma}_r\,[F]$ – регулярная часть спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, состоящая из точек, зависящих от всех q-параметров $\lambda_1 = \mu$, $\mu_2, \dots, \mu_q$.

3. Если $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_\rho^{m\times n}$, $\rho < \min(m,n)$, $\sigma_s^+[F] \cap \sigma_s^-[F] = \varnothing$, то
$$\sigma[F] = \Big\{\widehat{\sigma}[F] \cup \widetilde{\sigma}[F] \cup \widehat{\sigma}_s^-[F] \cup \sigma_{rs}^-[F] \cup \sigma_{rs}^2[F]\Big\},$$
где $\widehat{\sigma}_s^-[F]$ – точки сингулярного спектра матрицы $F^T(\lambda,\overline{\mu})$; $\sigma_{rs}^-[F]$ – точки смешанного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

4. Если $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_\rho^{m\times n}$, $\rho < \min(m,n)$, множество $\{\sigma_s^+[F] \cap \sigma_s^-[F]\}$ не является пустым, то для определения структуры спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ требуются дополнительные исследования с учетом точек пересечения спектров $\sigma_s^+[F]$ и $\sigma_s^-[F]$.

Для более детального исследования структуры спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$, $\sigma[F] = \widehat{\sigma}[F]$, рассмотрим уравнение

$$F(\lambda,\overline{\mu})x(\lambda,\overline{\mu}) = 0, \tag{3.26}$$

где $x(\lambda,\overline{\mu})$ есть столбцова нормированный $k \leqslant q$ – параметрический полиномиальный вектор.

Точки $(\lambda,\overline{\mu}^*)$, принадлежащие решениям уравнения (3.26) могут удовлетворять следующим условиям:

1) $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \delta[Fx]$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \notin \sigma_s^-[x]$;
2) $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \sigma_s^-[Fx]$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \notin \sigma_s^-[x]$;
3) $(\lambda,\overline{\mu}^\alpha) \in \delta[Fx]$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \sigma_s^-[x]$;
4) $(\lambda,\overline{\mu}^\alpha) \in \sigma_s^-[Fx]$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \sigma_s^-[x]$;
5) $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \big\{\delta[Fx] \cap \sigma_s^-[Fx]\big\}$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \notin \sigma_s^-[x]$;
6) $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \big\{\delta[Fx] \cap \sigma_s^-[Fx]\big\}$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) \in \sigma_s^-[x]$.

Здесь и ниже через $\delta[Z]$ и $\sigma_s^-[Z]$ обозначены соответственно $(q-1)$-мерные и $(q-k)$-мерные $(k \neq 1)$ решения СНАУ вида

$$z(\lambda,\overline{\mu}) = 0,$$

где $z(\lambda,\overline{\mu})$ есть q-параметрический полиномиальный вектор.

В ситуации 1) точка $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_{r1}[F]$ является точкой регулярного собственного значения матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$; ненулевой обобщенный собственный вектор, соответствующий точке $(\lambda,\overline{\mu}_x)$.

В ситуации 2) точка $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\nu}_*) \in \widehat{\sigma}_{s1}[F]$ является точкой сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$; ненулевой обобщенный собственный вектор $x(\lambda,\overline{\nu}_x)$ есть сингулярный собственный вектор, соответствующий точке $(\lambda,\overline{\nu}_*)$.

В ситуации 5) точка $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\mu}_{rs}) \in \widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}1}[F]$ является точкой регулярно-сингулярного собственного значения матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$; ненулевой обобщенный собственный вектор $x(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ есть регулярно-сингулярный собственный вектор, соответствующий точке $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$.

В ситуациях 3), 4) и 6) точки $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\mu}_*)$, $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\nu}_*)$ и $(\lambda,\overline{\mu}^*) = (\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ принадлежат соответственно смешанным спектрам $\widehat{\sigma}_r[F]$, $\widehat{\sigma}_s[F]$ и $\widehat{\sigma}_{\mathrm{mix}}[F]$. Каждой из этих точек соответствует нулевой обобщенный собственный вектор $x(\lambda,\overline{\mu}_x)$, $x(\lambda,\overline{\nu}_x)$ и $x(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$.

3.4.2. Точку пересечения (в том числе попарного пересечения) регулярного, сингулярного и смешанного спектров матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ будем относить соответственно.

• к *кратным* точкам спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, если соответствующие собственные векторы (ненулевые обобщенные собственные векторы) в этой точке совпадают;

• к *особым* точкам спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$, если соответствующие обобщенные векторы в этой точке являются нулевыми.

Так, например, двойственная точка $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ есть особенная точка регулярного спектра $F(\lambda,\overline{\mu})$, если выполнены условия:

(а) $(\lambda,\overline{\mu}_{rs}) \in \left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \widehat{\sigma}_s^+[F]\right\}$; (б) Обобщенный собственный вектор, соответствующий $(\lambda,\ \overline{\mu}_{rs})$, как точке спектра $\widehat{\sigma}_{rs}[F]$ и обобщенный собственный вектор, соответствующий $(\lambda,\overline{\mu}_{rs})$ как точке спектра $\widehat{\sigma}_s^+[F]$, являются нулевыми.

Аналогично, двойственная точка $\lambda,\overline{\nu}_{rs})$ спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$ есть особенная точка сингулярного спектра $F(\lambda,\overline{\mu})$, если выполнены условия:

(а) $(\lambda,\overline{\nu}_{rs}) \in \left\{\widehat{\sigma}_{rs}[F] \cap \sigma_s^-[W_1]\right\}$;

(б) Обобщенный собственный вектор, соответствующий $(\lambda,\ \overline{\nu}_{rs})$, как точке спектра $\widehat{\sigma}_{rs}[F]$ и обобщенный собственный вектор, соответствующий $(\lambda,\overline{\nu}_{rs})$ как точке спектра $\widehat{\sigma}_s^-[F]$, являются нулевыми.

§4. Вычисление спектральных характеристик матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$

4.1. Вычисление точек сингулярного спектра матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$.

Пусть

$$F(\lambda,\overline{\mu}) = \sum C_k(\overline{\mu})\lambda^k, \quad F(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_m^{m\times n} \quad \text{и} \quad \sigma[F] = \widehat{\sigma}[F].$$

Пусть

$$F(\lambda,\overline{\mu})\,W(\lambda,\overline{\mu}) = \left[\Delta(\lambda,\overline{\mu}),\mathbb{O}\right]$$

есть ΔW-q-разложение матрицы $F(\lambda,\overline{\mu})$. Здесь $W(\lambda,\overline{\mu}) = \left[W_1(\lambda,\overline{\mu}),W_0(\lambda,\overline{\mu})\right]$, $W_1(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_\rho^{n\times\rho}$, $W_0(\lambda,\overline{\mu}) \in \mathcal{M}_{n-\rho}^{n\times(n-\rho)}$.

Столбцы $W_0(\lambda, \overline{\mu})$ образуют базис $N_c[F]$, спектр которого не зависит от параметра λ; $\sigma_s^+[F] = \sigma_s^-[W_0]$. Пусть

$$\det W(\lambda, \overline{\mu}) = \varphi_1(\,\overline{\mu}\,)\varphi_2(\,\overline{\mu}\,)\,\varphi_{12}(\,\overline{\mu}\,),$$

где

$$\begin{aligned}
&\Big\{\varphi_1(\,\overline{\mu}\,) = 0\Big\} = \sigma[W_1], \quad \Big\{\varphi_2(\,\overline{\mu}\,) = 0\Big\} = \sigma[W_0],\\
&\widehat{\varphi}_i(\overline{\mu}) := \sigma_r[W_i], \quad i = 0, 1,\\
&\Big\{\varphi_{12}(\,\overline{\mu}\,) = 0\Big\} = \sigma^1_{rs}[W] \cup \sigma^0_{rs}[W] :
\end{aligned}$$

$\sigma^1_{rs}[W]$ – множество точек $(\lambda, \overline{\mu}_{12})$ спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, удовлетворяющих условиям (3.16);

$\sigma^0_{rs}[W]$ – множество точек пересечения корней уравнений $\varphi_1(\,\overline{\mu}\,) = 0$ и $\varphi_2(\,\overline{\mu}\,) = 0$.

Ниже приводятся алгоритмы вычисления некоторых спектральных характеристик матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$ в предположении, что уровень двойственности точек спектра $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$ не превосходит единицы.

4.1.1. Алгоритм вычисления полиномов*) $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$ и $\widehat{\varphi}_2(\,\overline{\mu}\,)$.

Вычисление $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$ и $\widehat{\varphi}_2(\,\overline{\mu}\,)$ проводится по одному и тому же алгоритму. Для определенности рассмотрим вычисление $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$, выполняя следующие операции:

(1) Вычисляется любой из миноров порядка ρ матрицы $W_1(\lambda, \overline{\mu})$, например, находится скалярный полином

$$\psi(\,\overline{\mu}\,) = W_1 \begin{pmatrix} 1 \dots \rho \\ 1 \dots \rho \end{pmatrix} = \alpha_t(\,\overline{\mu}\,)\lambda^t + \dots + \alpha_0(\,\overline{\mu}\,).$$

(2) Находится $\delta(\,\overline{\mu}\,)$, т.е. ОНД полиномов $\{\alpha_i(\,\overline{\mu}\,)\}$, $i = 0, 1, \dots, t$ и разложения вида

$$\alpha_k(\,\overline{\mu}\,) = \delta(\,\overline{\mu}\,)\widehat{\alpha}_k(\,\overline{\mu}\,),$$

где $\{\widehat{\alpha}_k(\,\overline{\mu}\,)\}$ – последовательность взаимно-простых полиномов.

(3) Вычисляется полином $\varphi(\,\overline{\mu}\,) = \det W(\lambda, \overline{\mu})$.

---

*) Здесь и ниже $\widehat{\varphi}_i(\overline{\mu})$ обозначен полином $\rho[W_i]$, $i = 1, 0$.

(4) Находится ОНД полинома $\varphi(\overline{\mu})$ и $\delta(\overline{\mu})$. В результате выполнения операций (1)–(4) будет найден полином

$$\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu}) = \text{ОНД}\{\varphi(\overline{\mu}), \delta(\overline{\mu})\}.$$

Раскрытие функционального определителя, т.е. операции (1) и (3) могут быть реализованы применением метода следов Д. К. Фаддеева [1, 2]. Вычисление ОНД полиномов от многих переменных можно реализовать алгоритмом, описанном в [1, 2].

4.1.2. Алгоритм вычисления узловых точек полинома от $q \geqslant 2$ переменных. Для определенности рассмотрим вычисление узловых точек полинома $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$, выполняя следующие операции.

(1) Находится относительная факторизация полинома $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$, используя алгоритм, описанный в [5].

Пусть

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu}) = \prod_{k=2}^{q} \prod_{1\leqslant i_2<\ldots<i_k\leqslant q} &= \Psi^{(k)}_{i_2\ldots i_k}(\mu_{i_2},\ldots,\mu_{i_k}) = \\ &= \prod_{k=1}^{q} \Phi^{(q-k)}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q)\end{aligned} \tag{4.3}$$

есть относительная факторизация полинома $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$, так что полином $\Psi^{(k)}_{i_2\ldots i_k}(\mu_{i_2},\ldots,\mu_{i_k})$ от $(k-1)$-переменной не имеет своими делителями полиномов от любого i числа переменных ($i < (k-1)$) из множества $\{\mu_2,\ldots,\mu_q\}$.

$\Phi^{(q-k)}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q) \equiv \Phi^{(q-k)}(\overline{\mu}_{q-k})$ обозначен собственный полином (т.е. делитель $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$) уровня $(q-k)$:

$$\begin{aligned}&\Phi^{(q-k)}(\overline{\mu}_{q-k}) := \\ =&\Psi_{k+1}(\mu_{k+1})\,\Psi_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2})\ldots\Psi_{k+1,\ldots,q}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q).\end{aligned}$$

(2) Находятся решения $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k} = (\mu^*_{k+1},\ldots,\mu^*_q)$ системы вида

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0,\\ &\Psi_{k+1,k+2}(\mu_{k+1},\mu_{k+2}) = 0,\ldots,\Psi_{k+1,\ldots,q}(\mu_{k+1},\ldots,\mu_q) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Так найденные $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k}$ являются узловыми точками полинома $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$. Заметим, что узловые точки однозначно определяются корнями СНАУ (4.4). При этом из свойств относительной факторизации следует, что набор $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k}$-узловых точек $(q-k)$-го уровня не имеет общих точек с набором $\overline{\mu}^{\,*}_{q-l}$ при $k > l$.

4.1.3. Вычисление точек $(\overline{\lambda}_*, \overline{\mu}^{\,*}_{q-k})$, принадлежащих $\sigma_s^+[F] \equiv \sigma_s^-[W_0]$.

Для вычисления точек $(\overline{\lambda}_*, \overline{\mu}^{\,*}_{q-k})$, принадлежащих сингулярному спектру $\sigma_s^+[F]$, выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется полином $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$.

(2) Находятся узловые точки $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k}$, $k = q, \ldots, 1$ полинома $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$.

(3) Для каждой узловой точки $\overline{\mu}^{\,*}_{q-k}$ полинома $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$ вычисляется полином $\omega(\,\overline{\lambda}\,)$, корни которого совпадают с точками регулярного спектра матрицы $W_0(\overline{\lambda}, \overline{\mu}^{\,*}_{q-k})$. Учитывая, что $W_0(\overline{\lambda}, \overline{\mu}^{\,*}_{q-k})$ есть матрица полного столбцового ранга, вычисление $\omega(\,\lambda\,)$ можно реализовать тем же алгоритмом, что и вычисление $\widehat{\varphi}_1(\,\overline{\mu}\,)$.

В результате выполнения (1)–(3) будет построена СНАУ

$$\begin{cases} \Psi_{k+1}(\mu_{k+1}) = 0 \\ \Psi_{k+1,k+2}(\mu_{k+1}, \mu_{k+2}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{k+1,\ldots,q}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q) = 0 \\ W_0(\overline{\lambda}, \overline{\mu}^{\,*}_{q-k}) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

решения которой суть точки сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$.

4.2. Вычисление собственных векторов.

Вычисление собственных векторов матрицы $F(\lambda, \overline{\mu}\,)$ можно реализовать, применив следующий алгоритм.

4.2.1. Для построения регулярных собственных векторов, соответствующих точкам $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$ следует выполнить операции.

(1) Вычислить полином $\widehat{\varphi}_2(\,\overline{\mu}\,)$, т.е. полином, корни $\mu = \mu_2^*$ которого образуют точки $(\lambda, \mu_2^*) \equiv (\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma_r[W_0]$.

(2) Вычислить балансное соотношение вида

$$F(\lambda, \overline{\mu}\,)T(\lambda, \overline{\mu}) = \widehat{\varphi}_2(\,\overline{\mu}\,)\,S(\lambda, \overline{\mu}).$$

Здесь $\begin{bmatrix} -S(\lambda, \overline{\mu}) \\ T(\lambda, \overline{\mu}) \end{bmatrix}$ есть свободный$^{*)}$ базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $\Phi(\lambda, \overline{\mu}) := [\widehat{\varphi}_2(\,\overline{\mu}\,)I, F^T]$, I – единичная матрица.

$^{*)}$Свободным называется базис, спектр матрицы из столбцов которого не содержит конечного регулярного спектра.

Алгоритм построения свободного базиса нуль-пространства из полиномиальных решений q-параметрической полиномиальной матрицы для $q \leqslant 2$ см. в [2]; для $q > 2$ – появится в печати.

Столбцы матрицы $T(\lambda, \overline{\mu})$ при $(\lambda, \overline{\mu}) = (\lambda, \overline{\mu}_2^*)$, $\overline{\mu}_2^* \in \{\widehat{\varphi}_2(\overline{\mu}) = 0\}$ образуют обобщенные собственные векторы $F(\lambda, \overline{\mu})$, соответствующие точкам $(\lambda, \overline{\mu}_2^*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$.

Для построения регулярных собственных векторов $F(\lambda, \overline{\mu})$, соответствующих $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$, следует

(1) Записать $T(\lambda, \overline{\mu}_2^*)$ в виде

$$T(\lambda, \overline{\mu}_2^*) = W_1(\lambda, \overline{\mu}_2^*) Y_1(\lambda, \overline{\mu}_2^*) + W_0(\lambda, \overline{\mu}_2^*) Y_2(\lambda, \overline{\mu}_2^*),$$

где

$$Y(\lambda, \overline{\mu}_2^*) = \begin{pmatrix} Y_1(\lambda, \overline{\mu}_2^*) \\ Y_2(\lambda, \overline{\mu}_2^*) \end{pmatrix} = W^{-1}(\lambda, \overline{\mu}_2^*) T(\lambda, \overline{\mu}_2^*).$$

Здесь $W(\lambda, \overline{\mu}_2^*)$ есть унимодулярная матрица.

(2) Линейно независимые столбцы матрицы

$$X(\lambda, \overline{\mu}_2^*) := W_1(\lambda, \overline{\mu}_2^*) Y_1(\lambda, \overline{\mu}_2^*)$$

дадут регулярные собственные векторы матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, соответствующие собственному значению $(\lambda, \overline{\mu}_2^*)$.

Для отбора линейно независимых собственных векторов следует к матрице $X^T(\lambda, \overline{\mu}_2^*)$ примерить алгоритм ΔW-1 факторизации [2]

$$X^T(\lambda, \overline{\mu}_2^*) \widehat{W}(\lambda) = \left[\widehat{\Delta}(\lambda), 0\right] \quad \widehat{W} = [\widehat{W}_1(\lambda), \widehat{W}_0(\lambda)].$$

Столбцы матрицы $\widehat{W}_0(\lambda)$ дадут искомые регулярные собственные векторы, соответствующие $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \widehat{\sigma}_r[F]$.

4.2.2. Вычисление сингулярных составенных векторов матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, соответствующих собственным значениям $(\lambda, \overline{\nu}_*) \in \widehat{\sigma}_s^+[F]$, проводится аналогично с заменой $\widehat{\varphi}_2(\overline{\mu})$ на $\widehat{\varphi}_1(\overline{\mu})$. Или другими словами, вместо $W_0(\lambda, \overline{\mu})$ в операциях (1), (2) следует взять $W_1(\lambda, \overline{\mu})$.

4.2.3. Для вычисления точек $(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*)$ регулярно-сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$ и им соответствующих спектральных характеристик $W_0(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*) Y_2(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*)$ и $W_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*) Y_1(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*)$ следует выполнить следующие операции.

(1) Найти неполную относительную факторизацию [1] матрицы $F(\lambda, \overline{\mu})$, т.е. разложение

$$F(\lambda, \overline{\mu}) = \nabla_1(\overline{\mu}) G_1(\lambda, \overline{\mu}),$$

где $\nabla(\overline{\mu})$ суть регулярная $m{\times}m$ матрица, полиномильано зависящая от $(q-1)$ параметров $\mu_2, \dots, \mu_q$; $G_1(\lambda, \overline{\mu}) \in \mathcal{M}_m^{m\times n}$, полиномиальная q-параметрическая матрица, спектр которой не зависит от λ.

(2) Найти ΔW-q-факторизацию [1] матрицы $G_1(\lambda, \overline{\mu})$

$$G(\lambda, \overline{\mu}) W^{(1)}(\lambda, \overline{\mu}) = \left[\Delta^{(1)}(\lambda, \overline{\mu}), 0\right].$$

(3) Вычислить $\det \Delta^{(1)}(\lambda, \overline{\mu}) = a_t(\overline{\mu})\lambda^t + \dots + a_0(\overline{\mu})$.

(4) Найти ОНД $\widehat{\delta}(\mu)$ полиномов $\{a_k(\overline{\mu})\}$ и разложения $a_k(\overline{\mu}) = \widehat{\delta}(\mu)\widehat{a}_k(\overline{\mu})$, где $\{\widehat{a}_k(\overline{\mu})\}$ – взаимно простые полиномы над кольцом $C(\overline{\mu})$. Тогда полученный полином

$$\sum_{k=0}^{t} \lambda^k \widehat{a}_k(\mu)$$

совпадает с точностью до константы с полиномом $\varphi_{12}(\overline{\mu})$, так что нули $\varphi_{12}(\lambda, \overline{\mu}) = 0$ образуют искомое множество $(\lambda, \overline{\mu}_{12}^*)$ точек $\widehat{\sigma}_{rs}[F]$.

Вычисление регулярно-сингулярных собственных векторов, соответствующих точкам $(\lambda, \overline{\mu}_{12}) \in \widehat{\sigma}_{rs}[F]$, реализуется аналогично вычислению регулярных собственных векторов (см. п. 4.2.1) с заменой полинома $\widehat{\varphi}_2(\overline{\mu})$ на полином $\varphi_{12}(\overline{\mu})$ при вычислении балансного соотношения (см. операцию (2) алгоритма п. 4.2.1).

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгориты решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 7–329.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
4. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* Т. 1, Наука, М. (1988).
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. Вычисл. Матем. и Матем. физики **36**, No. 8 (1996), 6–11.

6. В. Н. Кублановская, *О некотором подходе к решению обратных задач на собственные значения матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **268** (2000).

Kublanovskaya V. N. The application of the rank-factorization method to the analysis of spectral characteristics of a polynomial multiparameter matrix.

The method of rank-factorization (the ΔW-q method), previously suggested by the author as a method for solvving multiparameter algebraic problems for matrix F polynomially dependent on parameters, is applied to analyze the finite spectrum of the matrix F. Special attention is paid to the part of the spectrum $\sigma[F]$ of the q-parameter matrix F whose points are independent of at least one of the spectral parameters.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 февраля 2000 г.