Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

В. Б. Михайлов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ (СПЕКТРАЛЬНОЕ) ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Введение

Во многих приложениях математическая постановка задачи приводит к дифференциально-алгебраическим системам уравнений с аргументом с временным сдвигом (в технике принят термин "запаздывающий аргумент").

Если мы будем рассматривать класс линейных систем и применим методы операционного исчисления (преобразований Лапласа) с нелинейным оператором вида $e^{-p\tau}$ (τ – параметр временного сдвига или задержка, p – оператор Лапласа), то в операторной форме записи уравнений мы будем иметь дело с параметрической матрицей $D(p)$, в которой параметр p входит в виде указанной нелинейной зависимости.

В настоящий момент практика математического моделирования сложных физических объектов и явлений настоятельно требует решения этой задачи в аналитическом виде, пригодном для вычислений, для самых разнообразных приложений.

Полиномиальные матрицы и их применение к решению дифференциально-алгебраических систем m-го порядка

Известно [1], что теория полиномиальных матриц тесно связана с решением систем из n линейных дифференциальных уравнений высокого порядка

$$\begin{gathered} A_m \frac{d^m}{dt^m} x(t) + \ldots + A_1 \frac{d}{dt} x(t) + A_0 x(t) = f(t), \\ x(t_0) = x_{t_0}; \ldots ; x^{(m-1)}(t_0) = x_{t_0}^{(m-1)}, \end{gathered} \tag{1}$$

с m векторами начальных условий (вплоть до производных

$m-1$-го порядка), где верхний индекс в скобках означает порядок производной.

Чтобы не путать термин порядок дифференциальных уравнений с термином порядок матрицы, в дальнейшем применительно к матрицам будем использовать термин размер.

Следует отметить, что численно-аналитические методы решения задачи (1) исходного размера n до настоящего момента недостаточно разработаны, хотя исходную задачу можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка размера mn, для которых теория аналитических решений полностью разработана в работе [2].

Чтобы от системы дифференциальных уравнений m-го порядка (1) перейти к системе первого порядка воспользуемся блочной формой Фробениуса [3], причем сразу же перейдем в термины спектральной проблемы, а именно

$$\begin{bmatrix} & I & & & & \\ & & I & & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & I & \\ & & & & & I \\ A_m & A_{m-1} & \dots & A_3 & A_2 & A_1 \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} x_{m-1} \\ x_{m-2} \\ \dots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & I & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & I & & \\ & & & & I & \\ & & & & & -A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m-1} \\ x_{m-2} \\ \dots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $A_m, \dots, A_1, A_0$ – квадратные блоки порядка n (число уравнений в исходной системе (1)); I – единичная матрица порядка n; $x_0, \dots, x_{m-1}$ – векторы порядка n.

Из [3] известно, что для правых и левых собственных векторов имеют место соотношения

$$x_1 = \lambda x_0; \dots ; x_{m-1} = \lambda^{m-1} x_0. \tag{3}$$

а для аналогичной структуры левого собственного вектора блочной формы имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= [A_m^T \lambda^{m-1} + \ldots + A_2^T \lambda] y_0; \\ y_2 &= [A_m^T \lambda^{m-2} + \ldots + A_3^T \lambda] y_0; \\ y_{m-1} &= A_m^T \lambda y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (3) следует, что мы имеем дело с обобщенной проблемой собственных значений в блочном виде Фробениуса

$$B_F \lambda x_F = A_F x_F, \tag{5}$$

где матрица в левой части (2) суть блочная форма матрицы B_F; матрица в правой части (2) суть блочная форма матрицы A_F; а соответствующий вектор в (2) суть блочное представление правого собственного вектора x_F задачи размера mn.

Вектор x_0 из (2) с учетом соотношений (3) является правым собственным вектором полиномиальной матрицы m-го порядка

$$[\lambda^m A_m + \ldots + \lambda A_1 + A_0] x_0 = O_n. \tag{6}$$

Таким образом, проблема собственных значений для полиномиальной матрицы из (6) может быть сведена к обобщенной проблеме собственных значений (5) путем использования блочной формы Фробениуса (2).

В работе [2] нами был рассмотрен вид аналитического решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений произвольного индекса с любым типом спектра собственных значений (в том числе с кратными при наличии одного или нескольких жордановых блоков) для регулярного пучка матриц $D(\lambda) = \lambda B - A$.

Рассмотрим вид аналитического решения дифференциально-алгебраической системы уравнений, не разрешенной относительно вектора производных, с блочными матрицами B_F и A_F в форме Фромениуса (2)

$$B_F x_F(t) = A_F x_F(t) + f_F(t); \quad x_F(t_0) = x_{F0};$$
$$f_F(t) = \begin{bmatrix} O_n \\ O_n \\ \ldots \\ O_n \\ f(t) \end{bmatrix}; \quad x_{F0} = \begin{bmatrix} x^{m-1}(t_0) \\ x^{m-2}(t_0) \\ \ldots \\ x^{(1)}(t_0) \\ x(t_0) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $f(t)$ – вектор правых частей (воздействий) в исходной системе (1); x_{F0} – вектор начальных условий, составленный из m векторов начальных условий исходной системы (1).

Как показано в работе [2], резольвента регулярного пучка матриц $D(\lambda) = B\lambda - A$ представляется одноранговыми матрицами в виде скелетных произведений векторов из правых и левых жордановых цепочек, и в наиболее общем случае имеет вид

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^j}\left[\sum_{i=1}^{m_k+1-j} u_{k(i)}v^T_{k(m_k+2-i-j)}\right] + \\ + \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1\lambda + \ldots + \mathcal{Q}_{r-1}\lambda^{r-1},$$

где s – общее число жордановых ящиков и линейных делителей; m_k – размер k-го жорданова ящика (равен единице для линейных делителей) для k-го собственного значения λ_k; $u_{k(i)}$ – вектор из k-й правой жордановой цепочки векторов с номером i; $v_{k(i)}$ – вектор из k-й левой жордановой цепочки векторов с номером i, r – индекс для соответствующей дифференциально-алгебраической системы; $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_{r-1}$ – постоянные вещественные матрицы коэффициентов.

При этом для правых жордановых цепочек векторов имеют место соотношения

$$(\lambda_k B - A)u_{k(1)} = O_n;$$
$$(\lambda_k B - A)u_{k(m)} + Bu_{k(m-1)} = O_n; \quad m = (2, \ldots, m_k).$$

Для левых жордановых цепочек векторов аналогично имеем

$$v^T_{k(1)}(\lambda_k B - A) = O^T_n;$$
$$v^T_{k(m)}(\lambda_k B - A) + v^T_{k(m-1)}B = O^T_n; \quad m = (2, \ldots, m_k).$$

Решение линейной дифференциально-алгебраической системы с постоянными коэффициентами индекса r в общем случае теперь можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\left[\sum_{i=1}^{m_k+1-j} u_{k(i)}v^T_{k(m_k+2-i-j)}\right]\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,e^{\lambda_k t}Bx_0 +$$

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k}\left[\sum_{i=1}^{m_k+1-j} u_{k(i)}v^T_{k(m_k+2-i-j)}\right]\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!}\,e^{\lambda_k(t-\tau)}f(\tau)d\tau +$$

$$+\mathcal{Q}_0 f(t) + \mathcal{Q}_1 \frac{d}{dt} f(t) + \ldots + \mathcal{Q}_{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} f(t),$$

где r – индекс дифференциально-алгебраической системы; $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_{r-1}$ – матрицы коэффициентов при $f(t)$ и ее производных вплоть до $r-1$-го порядка.

Для вычисления матриц $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_{r-1}$ выберем серию констант $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, не равных ни одному из собственных значений пучка матриц. Для любой из них справедливо следующее соотношение

$$\mathcal{Q}(\alpha) = (\alpha B - A)^{-1} - \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{(\alpha - \lambda_k)^j} \left[\sum_{i=1}^{m_k+1-j} u_{k(i)} v_{k(m_k+2-i-j)}^T \right] =$$

$$= \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1 \alpha + \ldots + \mathcal{Q}_{r-1} \alpha^{r-1}.$$

Из этих констант составим числовую матрицу Вандермонда

$$W = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{r-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & \alpha_r & \alpha_r^2 & \lambda & \alpha_r^{r-1} \end{bmatrix}$$

и пусть $\Omega = W^1$. Тогда постоянные матрицы для алгебраической части решения будут вычисляться [2] из соотношений

$$\mathcal{Q}_{i-1} = \sum_{j=1}^{r} \Omega_{ij} \mathcal{Q}(\alpha_j).$$

Этот способ существенно прост и достаточно легко алгоритмизуем.

Чтобы не усложнять восприятие последующих выкладок, положим для простоты рассуждений, что для системы уравнений в блочной форме все собственные значения имеют только линейные делители и все матрицы $A_m, \ldots, A_1, A_0$ не вырождены.

В этом случае мы будем иметь полный набор из mn собственных значений.

В дальнейшем нас будет интересовать константа в соотношении Рэлея [3] вида $y_F^T B_F x_F$ для блочной формы Фробениуса из (7), выраженная через векторы y_0 и x_0.

Используя соотношения (3) и (4), немедленно получим

$$\begin{aligned}y_F^T B_F x_F = y_0^T A_m \lambda\lambda^{m-2} x_0 + y_0^T (A_m\lambda^2 + A_{m-1}\lambda)\lambda^{m-3} x_0 + \ldots \\ \ldots + y_0^T (A_m\lambda^{m-1} + \ldots + A_2\lambda + A_1) x_0 = \\ = y_0^T (m A_m \lambda^{m-1} + \ldots + 2A_2\lambda + A_1) x_0.\end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что для $D(\lambda) = A_m\lambda^m + \ldots + A_1\lambda + A_0$ выражение (8) можно записать и в виде

$$y_F^T B_F x_F = y_0^T \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) x_0.$$

Если для некоторого собственного значения λ_k полиномиальной матрицы мы вычислили соответствующие ему левый собственный вектор $v_k = y_0$ и правый собственный вектор $u_k = x_0$, то их можно нормировать так, чтобы имело место условие нормировки

$$y_F^T B_F x_F = y_0^T \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) x_0 = v_k^T \frac{d}{d\lambda} D(\lambda_k) u_k = 1. \tag{9}$$

При этом норма правого собственного вектора как правило выбирается единичной.

Хотя систему из mn дифференциальных уравнений первого порядка (7), не разрешенную относительно вектора производных $x_F(t)$, и можно привести к форме Коши, обратив невырожденную матрицу B_F в блочной форме Фробениуса, мы этого делать не будем, так как в дальнейшем нас будут интересовать именно системы, не разрешенные относительно производных.

Аналитическое решение [2] системы (7) в случае mn различных собственных значений имеет вид

$$x_F(t) = \sum_{k=1}^{mn} u_{Fk} v_{Fk}^T \{ e^{\lambda_k (t-t_0)} B_F x_{F0} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} f_F(\tau) d\tau \}. \tag{10}$$

Правые и левые собственные вектора регулярного пучка матриц (2) в блочной форме Фробениуса u_{Fk} и v_{Fk} связаны с соответствующими правыми и левыми векторами полиномиальной матрицы u_k и v_k уже рассмотренными нами соотношениями (3) и (4) соответственно.

В общем случае вектор правых частей в (1) представляет собой сумму различных вектор-функций и представим в виде

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} f_j \varphi_j(t),$$

где f_j – постоянный вектор с вещественными коэффициентами; $\varphi_j(t)$ – скалярная функция времени; s – число вектор-функций в $f(t)$.

Введем обозначения $\alpha_k = v_{Fk}^T B x_{F0}$. Теперь формулу (10) мы можем преобразовать к виду

$$x_F(t) = \sum_{k=1}^{mn} u_{Fk} \alpha_k e^{\lambda_k (t-t_0)} + \sum_{k=1}^{mn} u_{Fk} \sum_{j=1}^{s} \beta_{kj} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} \varphi_j(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где теперь под знаком интеграла стоит j-я скалярная функция $\varphi_j(t)$, а решение $x_F(t)$ выражено через константы α_k и β_{kj} и правые векторы блочной формы.

Исходя из структуры вектор-функции $f_F(t)$, левого собственного вектора блочной формы Фробениуса v_{F_k} и его связи (4) с левым собственным вектором v_k исходной полиномиальной матрицы, некоторая константа β_{kj} определяется следующим образом

$$\beta_{kj} = v_{Fk}^T f_{Fj} = v_k^T f_j.$$

Нас будут интересовать соотношения для констант α_k ($k = 1, 2, \ldots, mn$), выраженные через блочную форму матрицы B_F в (2), векторы v_{Fk} и вектор начальных условий x_{F0} из (7). Понятно, что наш интерес заключается в том, будут ли эти константы выражены только через левые собственные векторы исходной полиномиальной матрицы v_k и m векторов начальных условий исходной задачи (1)?

Полагая $x_0 = u_k$ и $y_0 = v_k$, с учетом соотношений (3) и (4) и группируя соответствующие члены, получим

$$\begin{gathered} \alpha_k = v_{Fk}^T B_F x_{F0} = \\ = v_k^T A_m \big(x^{(m-1)}(t_0) + \lambda_k x^{(m-2)}(t_0) + \ldots + \lambda_k^{m-1}(t_0)\big) + \\ + v_k^T A_{m-1} \big(x^{(m-2)}(t_0) + \lambda_k x^{(m-2)}(t_0) + \ldots + \lambda_k^{(m-2)} x(t_0)\big) + \ldots + \\ + v_k^T A_2 \big(x^{(1)}(t_0) + \lambda_k x(t_0)\big) + v_k^T A_1 x(t_0). \end{gathered} \quad (12)$$

Как видно из формулы (12), в окончательное выражение для α_k вошли только левые собственные векторы v_k исходной полиномиальной матрицы и m векторов начальных условий исходной задачи (1).

Теперь мы окончательно можем записать аналитический вид решения дифференциальной системы (1) в терминах исходной задачи, а именно

$$x(t) = \sum_{k=1}^{mn} u_k \alpha_k e^{\lambda_k (t-t_0)} + \sum_{k=1}^{mn} u_k \sum_{j=1}^{s} \beta_{kj} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} \varphi_j(\tau) d\tau, \qquad (13)$$

где собственные векторы полиномиальной матрицы нормируются исходя из уравнения нормировки (9), а все константы в (12) получены из начальных условий исходной задачи (1).

Очевидно, что формула (13) дает нам возможность вычислить только одно из начальных условий, а именно вектор $x(t_0)$. Но поскольку полученное нами решение является аналитическим по t, то мы можем аналитически выполнить дифференцирование решения в любой временной точке и вычислять необходимые производные решения вплоть до $m-1$-го порядка. Понятно, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ все начальные условия заданы, но если требуется продолжать (пересчитывать) решение для любой точки $t_0 > 0$, то мы имеем для этого все условия.

В том случае, если матрицы $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2$ вырождены, мы имеем возможность сократить размерность исходной задачи, удаляя из блочной формы Фробениуса (2) одноименные строки и столбцы, для которых столбцы указанных матриц являются нулевыми. При этом сократится и не нужная нам часть начальных условий.

Если, кроме того, вырождена и матрица A_1, то тогда мы имеем дело [2] с дифференциально-алгебраической системой уравнений, в решение которой кроме решения в смысле Коши войдут, как показано выше, дополнительные алгебраические члены. Опять же для простоты рассуждений рассмотрим дифференциально-алгебраическую систему уравнений единичного индекса. Для такой системы регулярный пучок матриц $D(\lambda) = B_F\lambda - A_F$ из блочной формы Фробениуса (2) можно представить в виде [4]

$$D(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где блоки B_{11} и A_{22} не вырождены (условие единичности индекса); для рангов соответствующих матриц справедливо: $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B_{11} < mn$ и $\operatorname{rank} A_{22} < n$.

Аналитическое решение такой дифференциально-алгебраической системы единичного индекса имеет вид

$$
\begin{gathered}
x(t) = \sum_{k=1}^{\operatorname{rank} B} u_k \alpha_k e^{\lambda_k (t-t_0)} + \\
+ \sum_{k=1}^{\operatorname{rank} B} u_k \sum_{j=1}^{s} \beta_{kj} \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} \varphi_j(\tau) d\tau + \mathcal{Q}_0 f(t),
\end{gathered}
\tag{14}
$$

а для матрицы $\mathcal{Q}_0$ справедлива формула [4]

$$
\mathcal{Q}_0 = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.
$$

Результаты работы [2] немедленно обобщаются на случаи, если исходная система (1) имеет индекс больше единичного и в спектре собственных значений имеются группы кратных значений (при наличии одного или нескольких жордановых ящиков для каждой группы).

Линейные системы с запаздывающим аргументом

Перейдем теперь к рассмотрению линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздывающим аргументом. Из теории операционного исчисления известно [5], что запаздывание аргумента основано на теореме о сдвиге. Если функция $f(t)$ имеет изображение по Лапласу $F(p)$ (p – оператор Лапласа), то

$$
L^{-1}\left(e^{\tau p} F(p)\right) = f(t-\tau),
$$

где L^{-1} – обратное преобразование Лапласа.

Особое место среди обобщенных функций в теории преобразований Лапласа [5] занимает δ-функция и ее обобщенные производные. Так, например, изображение по Лапласу δ-функции по Лапласу равно $L[\delta(t)] = 1$, а для ее обобщенных производных имеют место соотношения

$$
L[D^{(m)}\delta(t)] = p^m L[\delta(t)] = p^m.
$$

Отметим, что изображение вида $e^{-\tau p}$ соответствует δ-функции со сдвигом $\delta(t-\tau)$. Оператор $e^{-\tau p}$ разложим в ряд по степеням p, т.е.

$$e^{-\tau p} = 1 - \tau p + \frac{1}{2}\tau^2 p^2 - \frac{1}{6}\tau^3 p^3 + \ldots + (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} p^m \ldots + \ldots = \\ = L[\delta(t)] + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} p^m L[\delta(t)]. \quad (15)$$

Бесконечный ряд в (15) суть экспоненциальная производящая функция.

Согласно обобщенной теореме о свертке [5] для непрерывной функции $f(t)$, имеющей изображение $F(p)$, имеем

$$L^{-1}\left\{p^m L[\delta(t)] F(p)\right\} = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

тогда

$$\begin{gathered} L^{-1}\{e^{-\tau p} F(p)\} = f(t-\tau) = \\ = L^{-1}\left\{L[\delta(t)]F(p) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} p^m L[\delta(t)] F(p)\right\} = \\ = f(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} f(t). \end{gathered} \quad (16)$$

При конечном числе членов разложения в ряде (15) мы будем иметь дело с приближенным представлением функции с запаздывающим аргументом. Ограничимся числом членов ряда, равным m. В этом случае, согласно (16), мы будем иметь дело с дифференциальным уравнением m-го порядка.

Обозначим через $R_m(\tau, p)$ ограниченный ряд (15) вида

$$R_m(\tau, p) = 1 - \tau p + \frac{1}{2}\tau^2 p^2 - \frac{1}{6}\tau^3 + \ldots + (-1)^m \frac{\tau^m}{m!} p^m = \\ = L[\delta(t)] + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} p^k L[\delta(t)] \approx e^{-\tau p}.$$

Пусть i-й и j-й элементы искомой вектор-функции $x(t)$ связаны соотношением

$$x_i(t) = x_j(t-\tau),$$

тогда в операторном виде можно записать

$$x_{(i)}(p) = e^{-\tau p} x_{(j)}(p) \cong R_m(\tau, p) x_{(j)}(p). \tag{17}$$

В этом случае для системы из n уравнений с вектор-функцией $x(t)$, в которой между i-й и j-й переменными имеет место соотношение (17), мы получим систему дифференциально-алгебраических уравнений m-го порядка типа (1).

Перейдем в термины спектральных задач для полиномиальных матриц. Через $r_{m(ij)}(\tau, \lambda) = R_m(\tau, \lambda)$ обозначим элемент полиномиальной λ-матрицы $D(\lambda)$ m-й степени, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Очевидно, что для аналитического представления решения подобной системы уравнений мы можем немедленно воспользоваться результатами предыдущего раздела. Аналитический вид решения определяется формулой (14), если она имеет единичный индекс.

Рассмотрим теперь один чрезвычайно распространенный класс систем уравнений, особенно важный для приложений. Пусть мы имеем дело с системой уравнений, которая отличается от обычной дифференциально-алгебраической системы первого порядка одним из элементов, являющихся оператором сдвига (запаздывания) и пусть он аппроксимирован элементом $r_{m(ij)}(\lambda, \tau) = R_m(\tau, \lambda)$.

В этом случае в операторной форме система уравнений с соответствующей матрицей $D(\lambda) = D(\tau, \lambda)$ имеет вид

$$D(\tau, p)x(p) = \left(Bp - A + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -r_{m(ij)}(\tau, p) & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \dots & & \\ & & & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} x_1(p) \\ \dots \\ x_i(p) \\ \dots \\ x_j(p) \\ \dots \\ x_n(p) \end{bmatrix} = F(p). \tag{18}$$

Теперь отметим, что если бы элемент $r_{m(ij)}(\tau,\lambda) = R_m(\tau,\lambda)$ имел бы бесконечно много членов разложения m в ряде $R_m(\tau,\lambda)$, то при любых значениях λ его значение всюду на комплексной плоскости совпадало бы со значением оператора сдвига. При этом и все собственные значения и все собственные векторы также бы совпадали. Очевидно, что чем больше используется компонент в разложении, тем меньше будет сдвиг конечного спектра собственных значений.

Для вычисления констант α_k, входящих в выражение (14) для всех $x_i(t)$, кроме $x_j(t)$, нам достаточно знать только начальные условия $x_i(t_0)$ в точке t_0. Для переменной $x_j(t)$ нам надо знать все начальные условия вплоть до $m-1$-й производной включительно.

Очевидно, для оператора сдвига, т.е. ij-го элемента полиномиальной матрицы $D(\tau,\lambda)$, производная по параметру λ, входящая в уравнение нормировки собственных векторов, имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda}\, r_{m(ij)}(\tau,\lambda) = \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{\tau^k}{(k-1)!}\, \lambda^{k-1}.$$

Рассмотрим теперь формулу для вычисления констант α_k с учетом вида оператора $r_{m(ij)}(\tau,p)$. Исходя из (12) для α_k в этом случае получим

$$\begin{gathered}\alpha_k = v_k^T Bx(t_0)+\\ +v_{k(i)}(-1)^m \frac{\tau^m}{m!}\big(x_j^{(m-1)}(t_0) + \lambda_k x_j^{(m-2)}(t_0) + \ldots + \lambda_k^{m-1} x_j(t_0)\big)+\\ +v_{k(i)}(-1)^{m-1}\frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!}\big(x_j^{(m-2)}(t_0) + \ldots + \lambda_k^{m-2} x_j(t_0)\big)-\\ -v_{k(i)}\tau x_j(t_0).\end{gathered} \tag{19}$$

Под $v_{k(i)}$ в (19) понимается i-й элемент левого собственного вектора v_k.

Понятно, что эти результаты немедленно распространяются на случай, когда в системе уравнений имеет более чем один элемент задержки.

Очевидно, что каждый такой элемент увеличивает спектр собственных значений на m спектральных компонент и что все собственные значения при данной аппроксимации будут чуть сдвинуты в комплексной плоскости по сравнению с явно заданным оператором сдвига (задержки).

Пусть теперь оператор сдвига (задежки) задан в явном виде $r_{ij}(\tau, p) = e^{-\tau p}$, т.е. без применения аппроксимации (16).

Очевидно, что спектр для параметрических матриц из подобных систем уравнений будет иметь бесконечно много спектральных компонент. С другой стороны, при расчете собственных значений таких параметрических матриц не происходит их сдвига в комплексной плоскости, а точность их вычисления определяется в основном применяемыми вычислительными методами.

Наш опыт работы с интерполяционными методами вычисления корней функций показывает, что при использовании 16-ти разрядной десятичной арифметики корни можно вычислять с точностью 13–15 верных знаков.

Для вычисления собственных векторов можно применять различные методы. Очень эффективным оказывается метод обратных итераций [1] с почти вырожденной матрицей. Как отмечает Уилкинсон [1], метод обратных итераций оказался самым эффективным из всех им исследованных и апробированных, в том числе для очень близких собственных значений. Отметим только, что для наших задач необходима обобщенная формулировка метода обратных итераций для параметрических матриц.

Вид аналитического решения дифференциально-алгебраических систем уравнений с запаздывающим аргументом, например единичного индекса, можно представить теперь через бесконечный спектр параметрической матрицы

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \alpha_k e^{\lambda_k (t-t_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{j=1}^{s} \beta_{kj} \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} \varphi_j(\tau) d\tau + \mathcal{Q}_0 f(t), \tag{20}$$

а матрица $\mathcal{Q}_0$ определена ранее.

Перейдем теперь к процессу вычисления констант α_k в формуле (20). Для соответствующих вычислений воспользуемся формулой (19), устремив m к бесконечно большой величине.

На каком-то этапе процесс вычислений константы α_k можно прервать, так как дальнейший процесс вычислений уже не вносит даже малого вклада в ее предыдущее значение. Кроме того, на определенном этапе образуется зона неопределенности значений, связанная с точностью вычислений предыдущих меньших по модулю собственных значений и им соответствующих векторов. Если процесс вычисления собственных значений, собственных векторов и указанных констант идет параллельно, это может служить критерием остановки вычислительного процесса и ограничения спектра параметрической матрицы.

Для численно-аналитических решений линейных систем с запаздывающим аргументом мы можем использовать как конечномерную систему уравнений (аппроксимация оператора сдвига рядом с конечным числом членов в разложении), так и систему с параметрической матрицей и бесконечным спектром. Вопросы о точности решения конечномерной системы, а также о способах прерывания вычислительного процесса для бесконечного спектра, в настоящее время мы оставляем на долю вычислительного эксперимента.

Литература

1. Дж. Х. Уилкинсон, *Алгебраическая проблема собственных значений:*. Пер. с англ. М.: Наука (1970), 564.
2. В. Б. Михайлов, *Новые спектральные представления для пучков матриц и их связь с решением алгебро-дифференциальных систем.* “Электронное моделирование”, вып. 4 (1994), 18–29 (издание РАН и НАН Украины.
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М.: Наука (1988), 552.
4. В. Б. Михайлов, *Численно-аналитические методы моделирования в линейной и нелинейных постановках.* “Интеллектуальные интегрированные САПР РЭА и БИС”. М.: Наука (1990), 67–75 (Ин-т автоматизации и проектирования АН СССР).
5. Л. Г. Смышляева, *Преобразование Лапласа функций многих переменных.* Л.: изд-во ЛГУ (1981), 143.

Mikhailov V. B. The analytical (spectral) representation of the solution of delay algebraic-differential equations.

A new approach to finding analytical solutions of linear delay algebraic-differential equations is suggested. The analytical form of the solution is determined in terms of the infinite set of eigenvalues of a parametric matrix whose entries are the delay-time operators $\exp(-p\tau)$, where p is the Laplace operator. In order to compute constants in the solution of the homogeneous equations, one must analytically find higher derivatives at the input of the delay operator. Issues of stopping the computation of the infinite spectrum upon determining a certain number of its components are discussed.

Центр проблем автоматизации
проектирования радиоэлектронной
аппаратуры института
автоматизации проектирования РАН

Поступило 1 сентября 2000 г.