Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

Г. В. Савинов

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассмотрим задачу минимизации отношения Рэлея при наличии ограничений, или, что тоже самое, в подпространстве

$$\lambda = \min_{x \in R_n} \frac{(Ax,x)}{(x,x)}, \tag{1}$$

$$(b_i, x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2}$$

где A симметричная положительно определенная матрица, R_n – n-мерное векторное пространство, а $b_i \in R_n$ некоторые заданные векторы. Если бы ограничения (2) отсутствовали, то (1) была бы обычной задачей на минимизацию отношения Рэлея и λ было бы минимальным собственным значением матрицы A. Наличие ограничений (2) требует проведения минимизации функционала (1) не на всем пространстве R_n, а на его подпространстве, ортогональном векторам b_i, что, конечно, создает дополнительные трудности.

На практике такие задачи часто возникают при расчете колебаний и устойчивости упругих конструкций, причем, ограничения (2) появляются из-за дополнительных граничных условий в местах пересечений отдельных элементов, образующих сложную конструкцию (см. например [1]).

Для решения задачи (1), (2) преобразуем ограничения (2). Имеем

$$(b_i, x)^2 = x^T b_i b_i^T x = (B_i x, x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$B_i = b_i \cdot b^T.$$

Так как предполагается, что $(x,x) \neq 0$, то получаем, что ограничения (2) можно заменить на

$$\frac{(B_i x, x)}{(x,x)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом, задачу (1), (2) можно переписать в виде

$$\lambda = \min_{x \in R_n} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \tag{3}$$

$$\frac{(B_i x, x)}{(x, x)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

В [2] показано, что задача (3), (4) эквивалентна следующей:

$$\lambda = \max_{\alpha_i} \min_{x \in R_n} \frac{(Ax, x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i (B_i x, x)}{(x, x)}.$$

Так как $(B_i x, x) \geqslant 0$, то очевидно, что максимум в последнем выражении достигается при $\alpha_i = +\infty$ и λ определяется выражением

$$\lambda = \lim_{\alpha_i \to +\infty} \min_{x \in R_n} \frac{(Ax, x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i (B_i x, x)}{(x, x)} =$$

$$= \lim_{\alpha_i \to +\infty} \min_{x \in R_n} \frac{([A + \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i] x, x)}{(x, x)}. \tag{5}$$

В [3] (где последняя формула получена другим способом) предлагается определять λ из даннного выражения. Однако, существует и другой путь [1], позволяющий избежать численного вычисления предела при $\alpha_i \to +\infty$. В этом случае λ находят из выражения

$$\lambda^{-1} = \min_{x \in R_n} \lim_{\alpha_i \to +\infty} \frac{([A + \sum_{i=1}^m \alpha_i [b_i b_i^T]]^{-1} x, x)}{(x, x)}.$$

Для вычисления

$$\lim_{\alpha_i \to +\infty} \left[A + \sum_{i=1}^m \alpha_i [b_i b_i^T] \right]^{-1}$$

предлагается воспользоваться методом пополнения [4], что в конечном итоге, сводит всю проблему к нахождению максимального собственного значения некоторой матрицы, которая строится из матрицы A и векторов b_i.

В данной работе предлагается использовать формулу (5) для построения двусторонней оценки λ. При таком подходе возможно значительно сократить объем необходимых вычислительных затрат, оценивая λ с необходимой для практических приложений точностью.

Рассмотрим задачу

$$\lambda(\alpha) = \min_{x\in R_n} \frac{([A+\alpha B]x, x)}{(x,x)}, \quad B = \sum_{i=1}^{m} B_i.$$

Очевидно, что при любом $\alpha \geqslant 0$

$$\lambda(\alpha) \leqslant \lambda,$$

а если рассматривать $\lambda(\alpha)$, как функцию от параметра α, то эта функция монотонно возрастающая и

$$\lambda = \lim_{\alpha\to+\infty} \lambda(\alpha).$$

Для получения оценки для λ сверху, рассмотрим нормированный собственный вектор $u(\alpha)$, соответствующий собственному значению $\lambda(\alpha)$. Представим этот вектор в виде

$$u(\alpha) = v(\alpha) + \tilde{v}(\alpha),$$

где вектор $\tilde{v}(\alpha)$ принадлежит подпространству, натянутому на векторы b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, а вектор $v(\alpha)$ из ортогонального дополнения этого подпространства. Из всего сказанного выше следует, что

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \tilde{v}(\alpha) = 0.$$

Обозначим

$$\tilde{\lambda}(\alpha) = \frac{([A+\alpha B]v(\alpha), v(\alpha))}{(v(\alpha), v(\alpha))} = \frac{(Av(\alpha), v(\alpha))}{(v(\alpha), v(\alpha))}.$$

Ясно, что при любом $\alpha \geqslant 0$

$$\lambda \leqslant \tilde{\lambda}(\alpha),$$

а если рассматривать $\tilde{\lambda}(\alpha)$, как функцию от параметра α, то эта функция монотонно убывающая и

$$\lambda = \lim_{\alpha\to+\infty} \tilde{\lambda}(\alpha).$$

В итоге при любом $\alpha \geqslant 0$ получаем двустороннюю оценку λ

$$\lambda(\alpha) \leqslant \lambda \leqslant \tilde{\lambda}(\alpha).$$

В заключение заметим, что из соображений численной устойчивости не стоит сразу же задавать большие значения α, а следует последовательно увеличивать α до достижения заданной точности.

Литература

1. Г. В. Савинов, Г. В. Савинова, *Расчет устойчивости упругих конструкций с помощью минимизации отношения Релея в подпространствах.* Математическое моделирование автоматизированных систем в судостроении: Труды ЛКИ, Л., ЛКИ (1987), 107–112.
2. Ю. Ш. Абрамов, *Вариационные методы в теории операторных пучков.* Спектральная оптимизация. Л.: Изд-во ЛГУ (1983).
3. В. Н. Глушков, А. Я. Цауне, *Безусловная минимизация в задачах на собственные значения с дополнительными условиями.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **25**, No. 2 (1985), 298–301.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.* М., Физматгиз (1963).

Savinov G. V. Two-sided bounds of the smallest eigenvalue of a positive-definite matrix in the presence of restrictions.

The problem of minimizing Rayleigh quotient in the presence of restrictions is considered. A method for constructing two-sided bounds of the smallest eigenvalue is suggested.

Поступило 27 марта 2000 г.