Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 268, 2000 г.

В. Б. Хазанов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МИНИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ НЕСОКРАТИМЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Приводятся определение и краткое описание алгоритмов построения несократимых факторизаций рациональной матрицы, являющихся минимальными по степени. Устанавливаются два свойства таких факторизаций: они представляют собой минимальные MFD (matrix fraction description) применительно к правильным рациональным матрицам; они позволяют сводить задачу определения полюсно-нулевой структуры рациональной матрицы на бесконечности к задаче определения спектральных индексов двух полиномиальных матриц в нуле.

1. Несократимые факторизации и алгоритмы их построения. Пусть $R(\lambda)$ – рациональная $m \times n$ матрица, элементы которой являются рациональными функциями

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{g_{ij}(\lambda)}{h_{ij}(\lambda)}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $g_{ij}(\lambda)$, $h_{ij}(\lambda)$ – скалярные полиномы ($h_{ij}(\lambda) \equiv 0$).

Факторизации рациональной матрицы $R(\lambda)$ вида

$$R(\lambda) = S(\lambda)\, T^{-1}(\lambda) \tag{2}$$

и

$$R(\lambda) = T^{-1}(\lambda)\, S(\lambda) \tag{3}$$

называются *несократимыми*, если

(а) $S(\lambda)$, $T(\lambda)$ – полиномиальные матрицы соответствующих размеров;

(б) $T(\lambda)$ – регулярная матрица;

(в) не имеет конечного спектра полиномиальная матрица $M(\lambda) := \left[S(\lambda)\, T(\lambda)\right]^B$ или $N(\lambda) := \left[S(\lambda)\, T(\lambda)\right]$ соответственно для (2) или (3).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 99-01-00110).

Несократимая факторизация называется *минимальной по степени*, если степень матрицы $M(\lambda)$ или $N(\lambda)$ является минимальной соответственно для (2) или (3).

Алгоритмы построения несократимых факторизаций (2) и (3), в том числе и минимальных по степени, описаны в работах [1, 2]. Поскольку факторизация (3) с точностью до операции транспонирования совпадает с факторизацией (2), приведем краткое описание алгоритма построения только факторизации (2). В основе алгоритма лежит использование метода ΔW-1 разложения полиномиальной матриця (см., например [1, 4]).

Алгоритм.

(i) Для каждой строки $i = 1, \dots, m$ $m \times n$ матрицы $R(\lambda)$ вычислить наименьшее общее кратное $k_i(\lambda)$ знаменателей $h_{ij}(\lambda)$ ее элементов (1), $j = 1, \dots, n$, используя представление

$$k_i(\lambda) = h_{ij}(\lambda)\,\delta_l,$$

определить элементы полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda)$

$$f_{ij}(\lambda) = g_{ij}(\lambda)\,\delta_l$$

и сформировать полиномиальную $m{\times}(m+n)$ матрицу

$$c(\lambda) := \left[K(\lambda)\,F(\lambda)\right],$$

где $K(\lambda) = \operatorname{diag}\{k_1(\lambda), \dots, k_m(\lambda)\}$.

(ii) Построить ΔW-1 разложение матрицы $C(\lambda)$

$$C(\lambda)\widetilde{W}(\lambda) = \left[\widetilde{\Delta}(\lambda)\,\mathbb{O}\right],$$

где $\widetilde{W}(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка $m+n$, $\delta(\lambda)$ – полиномиальная матрица порядка m, и сформировать из последних n столбцов матрицы $\widetilde{W}(\lambda)$ полиномиальную $(m+n)\times n$ матрицу $\widetilde{W}_0(\lambda)$.

(iii) Пострить ΔW-1 разложение матрицы $\widetilde{W}_0(\lambda)$

$$\widetilde{W}_0(\lambda)\,\widehat{W}(\lambda) = W_0(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ W_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\widehat{W}(\lambda)$ – унимодулярная матрица порядка n, $W_0(\lambda)$ – полиномиальная $(m+n)\times n$ матрица с блоками $W_1(\lambda)$, $W_2(\lambda)$ размеров $m \times n$ и $n{\times}n$ соответственно, и положить

$$S(\lambda) := -W_1(\lambda), T(\lambda) := W_2(\lambda).$$

Столбцы матриц $\widetilde{W}_0(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $C(\lambda)$, так что

$$R(\lambda) = K^{-1}(\lambda)F(\lambda) = W_1(\lambda)\,W_2^{-1}(\lambda) \equiv S(\lambda)\,T^{-1}(\lambda),$$

причем столбцы матрицы $W_0(\lambda)$ образуют минимальный базис (старшие векторные коэффициенты по λ ее столбцов являются линейно независимыми). Таким образом, выполнены все необходимые условия, накладываемые на матрицу $M(\lambda)$ для построения минимальной по степени, несократимой факторизации.

2. MFD **рациональной матрицы.** В теории систем (см., например, [3]) несократимые факторизации (2) и (3) рациональной матрицы называют, соответственно, правой и левой MFD (matrix fraction description). При этом правое (левое) MFD называют минимальным, если степень определителя матрицы $T(\lambda)$ равна сумме степеней ее столбцов (строк). Известно также, что правое (левое) MFD *правильной* рациональной матрицы (когда при $\lambda \to \infty$ $R(\lambda) \to \mathbb{O}$) обладает следующим свойством: степень каждого столбца (строки) матрицы $S(\lambda)$ меньше степени соответствующего столбца (строки) матрицы $T(\lambda)$. В таком случае степень каждого столбца матрицы $M(\lambda)$ (строки матрицы $N(\lambda)$) определяется степенью соответствующего столбца (строки) матрицы $T(\lambda)$. Учитывая, что указанное выше свойство определителя матрицы $T(\lambda)$ эквивалентно линейной независимости старших векторных коэффициентов по λ ее столбцов (строк) приходим к следующему выводу.

Минимальные по степени несократимые факторизации (2) и (3) правильной рациональной матрицы являются ее правой и левой минимальными MFD соответственно.

3. Полюсно-нулевая структура рациональной матрицы. Известно [1–3], что конечные полюсная и нулевая структуры рациональной матрицы $R(\lambda)$ полностью определяются конечными спектрами полиномиальных матриц $T(\lambda)$ и $S(\lambda)$ соответственно из несократимых факторизацией (MFD) вида (2) и (3). Покажем, что минимальные по степени несократимые факторизации могут быть использованы также и для определения полюсно-нулевой структуры рациональной матрицы $R(\lambda)$ на бесконечности, которая определяется [3] как полюсно-нулевая структура матрицы $R(\mu^{-1})$ в точке $\mu = 0$.

Пусть для определенности построена минимальная по степени несократимая факторизация (2), так что полиномиальная матрица $W_0(\lambda) = \left[S(\lambda)\, T(\lambda)\right]^B$ не имеет конечного спектра, а векторные коэффициенты при старших степенях по λ ее столбцов являются линейно независимыми. Обозначим через p_i степень столбца $w_{i0} \equiv \left[\, - s_i(\lambda)\, t_i(\lambda)\right]^B$ матрицы $W_0(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$; $p = \max\limits_i p_i$ – степень матрицы $W_0(\lambda)$. Построим полиномиальную матрицу

$$\widehat{W}_0(\mu) \equiv \begin{bmatrix} -\widehat{S}(\mu) \\ \widehat{T}(\mu) \end{bmatrix} := \left[\, \overline{W}_{10}(\mu) \dots \overline{W}_{n0}(\lambda)\right], \tag{4}$$

где $\overline{W}_{i0}(\mu) := \mu^{p_i} W_{i0}(\mu^{-1})$, $i = 1, \dots, n$.

Справедливо следующее утверждение.

Полюсная и нулевая структуры рациональной матрицы $R(\lambda)$ на бесконечности определяются, соответственно, структурными индексами матриц $\widehat{T}(\mu)$ и $\widehat{S}(\mu)$ из (4) в точке $\mu = 0$.

Для доказательства достаточно показать, что имеет место представление

$$R(\mu^{-1}) = \widehat{S}(\mu)\, \widehat{T}^{-1}(\mu),$$

являющееся несократимой факторизацией матрицы $R(\mu^{-1})$, т.е. что полиномиальная матрица $\widehat{M}(\mu) := \left[\widehat{S}(\mu)\, \widehat{T}(\mu)\right]^B$ не имеет конечного спектра.

Обозначим через $H(\mu) = \operatorname{diag}\left\{\mu^{p-p_1}, \dots, \mu^{p-p_n}\right\}$. Тогда для матрицы

$$\overline{W}_0(\mu) := \mu^p W_0(\mu^{-1}) = \begin{bmatrix} -\mu^p S(\mu^{-1}) \\ \mu^p T(\mu^{-1}) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\widetilde{S}(\mu) \\ \widetilde{T}(\mu) \end{bmatrix} \tag{5}$$

и ее блоков $\widetilde{S}(\mu)$, $\widetilde{T}(\mu)$ имеем следующие представления

$$\overline{W}_0(\mu) = \widehat{W}_0(\mu)\, H(\mu).$$

$$\widetilde{S}(\mu) = \widehat{S}(\mu)\, H(\mu), \quad \widetilde{T}(\mu) = \widehat{T}(\mu)\, H(\mu). \tag{6}$$

Из (2) следует, что

$$R(\mu^{-1}) = S(\mu^{-1})\, T^{-1}(\mu^{-1}),$$

что с учетом (5), (6) и очевидной регулярности полиномиальных матриц $\widetilde{T}(\mu)$ и $\widehat{T}(\mu)$ дает

$$R(\mu^{-1}) = \widetilde{S}(\mu)\, \widetilde{T}^{-1}(\mu) = \widehat{S}(\mu)\, \widehat{T}^{-1}(\mu).$$

Покажем теперь, что полиномиальная матрица $\widehat{W}_0(\mu)$ и, следовательно, матрица $\widehat{M}(\mu)$ не имеет конечных собственных значений. Отсутствие конечных собственных значений $\mu_* \neq 0$ очевидно (в противном случае они являлись бы таковыми и для матрицы $\overline{W}_0(\mu)$, и, следовательно, матрица $W_0(\lambda)$ имела бы конечное собственное значение μ_*^{-1}). Существование нулевого собственного значения $\mu = 0$ матрицы $\widehat{W}_0(\mu)$ означало бы линейную зависимость столбцов матрицы $\widehat{W}(0) : \overline{W}_{10}(0), \dots, \overline{W}_{n0}(0)$, являющихся старшими векторными коэффициентами по λ матрицы $W_0(\lambda)$, что противоречит предположению об их линейной независимости.

Аналогичным образом полюсно-нулевая структура рациональной матрицы на бесконечности может быть получена по имеющейся минимальной по степени несократимой факторизации вида (3).

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Методы и алгориты решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–330.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *О несократимых факторизациях рациональных матриц и их применении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **219** (1995), 117–156.
3. Kailath, *Linear Systems.* Prentice Hall (1980).
4. V. Kublanovskaya, *Rank-devision algorithms and their applications.* — J. Numer. Lin. Algebra Appl. **1**, No. 2 (1992), 199–213.

Khazanov V. B. On some properties of the minimal in degree irreducible factorizations of a rational matrix.

The definition and the brief description of the algorithms for constructing the irreducible factorizations of a rational matrix of minimal degree are presented. Two properties of these factorizations are established. First, these factorizations are just the MFDs in application to proper rational matrices and, second, they make it possible to reduce the problem of determining the pole-zero structure of a rational matrix at infinity to the problem of finding the spectral indices of two polynomial matrices at the zero point.

С.-Петербургский
государственный
морской университет

Поступило 1 апреля 2000 г.