Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Н. В. Антонов

"ИГРУШЕЧНЫЕ" МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ И ГИПОТЕЗА ЛОКАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

Исследование явления перемежаемости и аномального скейлинга для развитой турбулентности остается пока открытой теоретической задачей. Как численные, так и натурные эксперименты подсказывают, что отклонения от предсказаний классической теории Колмогорова–Обухова [1, 2] для пассивного скалярного поля проявляются еще сильнее, чем для самого поля скорости; см. например [3, 4] и цитированные там работы. В то же время, эта задача оказывается более доступной теоретическому анализу: даже сравнительно простые модели, описывающие перемешивание пассивной примеси "синтетическим" полем скорости с заданной (обычно гауссовой) статистикой обнаруживают некоторые аномальные черты, свойственные реальной турбулентной конвекции. Отсюда термин: "игрушечные модели". Тем самым, проблема турбулентного перемешивания, важная сама по себе, может рассматриваться как отправная точка при изучении аномального скейлинга для развитой турбулентности в целом.

Наиболее заметный прогресс был достигнут для модели с "быстрым" полем скорости, восходящей к работам Обухова и Бэтчелора и наиболее явно введенной Крейчнаном [5]: впервые аномальные показатели были вычислены на основе микротеории и в рамках регулярных пертурбативных схем; см. работы [6–10] и ссылки в них.

В т.н. методе нулевых мод, развитом в [6–9], нетривиальные аномальные показатели связаны с "нулевыми модами" (однородными решениями) замкнутых точных уравнений, которым удовлетворяют одновременные корреляционные функции. В подходе, основанном на квантово-полевых методах ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения (ОР), аномальный скейлинг возникает как следствие существования в модели составных операторов с *отрицательными* критическими размерностями, которые и определяют аномальные показатели [10–13].

Другой важный вопрос, интенсивно обсуждаемый в последнее время – влияние крупномасштабной анизотропии на статистику пассивных полей [8, 9, 12–18] и самого поля скорости [19] в инерционном интервале.

Согласно классической теории Колмогорова–Обухова [1, 2] анизотропия, вносимая на больших масштабах "накачкой" (граничные условия, геометрия препятствия etc), вымирает по мере того как энергия переносится к меньшим масштабам в результате каскадного процесса. Ряд недавних работ подтвердил эту картину для *четных* корреляционных функций, и тем самым предоставил количественное подтверждение гипотезы о восстановлении локальной изотропии в инерционном интервале для развитой турбулентности и турбулентной конвекции [12–19]. Точнее говоря, показатели, описывающие скейлинг в инерционном интервале, обнаруживают универсальность и иерархию, связанную со степенью анизотропии, при этом ведущий вклад для четных функций дается показателем изотропной "моды" [12, 15–19]. Тем не менее, анизотропия выживает в инерционном интервале и проявляется в *нечетных* корреляционных функциях в противоречии с тем, что можно было бы ожидать в соответствии с идеями каскадного переноса энергии по спектру. Так называемая "асимметрия" (skewness factor) убывает при движении к меньшим масштабам, но гораздо медленнее, чем ожидалось [3, 4, 8, 9], тогда как старшие моменты (hyperskewness *etc*) возрастают, тем самым свидетельствуя о сохраняющейся анизотропной активности [12, 14, 16]. Это явление носит достаточно общий характер и наблюдается как для скалярных [12] и векторных [16] полей, переносимых быстро меняющимся полем скорости, так и для скаляра, переносимого двумерным полем скорости, удовлетворяющим уравнению Навье–Стокса [14]. Ниже мы дадим краткий обзор последних результатов, полученных с использованием техники РГ и ОР для модели с быстро меняющимся полем скорости; более детальное обсуждение можно найти в оригинальных работах [10–13]. Подробное изложение РГ-подхода к моделям развитой турбулентности дано в книге [20] и статье [21]. Для простоты, мы ограничимся случаем не коррелированного во времени поля скорости; модели с конечным временем корреляции рассматриваются в [12, 13].

Конвекция пассивного скалярного поля в присутствии фиксированного постоянного градиента описывается уравнением

$$\partial_t \theta + (\mathbf{v}\boldsymbol{\partial})\theta = \nu_0 \partial^2 \theta - (\mathbf{h}\mathbf{v}). \tag{1}$$

Здесь $\theta(x) \equiv \theta(t, \mathbf{x})$ – случайная (флуктуационная) часть полного скалярного поля $\Theta(x) = \theta(x) + (\mathbf{h}\mathbf{x})$, $\mathbf{h}$ – постоянный вектор, задающий выделенное направление, ν_0 – молекулярный коэффициент диффузии, $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ и $\partial^2 \equiv \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа.

Для поля скорости $\mathbf{v}(x) = \{v_i(x)\}$ выбирается гауссово распределение с нулевым средним и коррелятором

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \delta(t - t')\, K_{ij}(\mathbf{r}) \tag{2}$$

в котором

$$K_{ij}(\mathbf{r}) = D_0 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{P_{ij}(\mathbf{k})}{k^{d+\varepsilon}} \exp[\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}], \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}', \tag{3}$$

Здесь $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_\daleth / k^2$ – поперечный проектор, $\mathbf{k}$ – импульс, $k \equiv |\mathbf{k}|$, $D_0 > 0$ – амплитудный множитель и $0 < \varepsilon < 2$ – свободный параметр. Инфракрасная (ИК) регуляризация обеспечивается обрезанием интеграла (3) снизу на величине $k \simeq m$, где $m \equiv 1/L$ – обратный внешний масштаб турбулентности; точный вид ИК-регуляризации несущественен. Для $0 < \varepsilon < 2$, разность

$$S_{ij}(\mathbf{r}) \equiv K_{ij}(\mathbf{0}) - K_{ij}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

имеет конечный предел при $m \to 0$:

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = D r^{\varepsilon} \left[(d + \varepsilon - 1)\, \delta_{ij} - \varepsilon \frac{r_i r_j}{r^2} \right], \tag{5}$$

где

$$D = \frac{-D_0\, \Gamma(-\varepsilon/2)}{(4\pi)^d 2^{\varepsilon} (d+\varepsilon) \Gamma(d/2 + \varepsilon/2)}$$

и $\Gamma(\cdots)$ – гамма-функция Эйлера (заметим, что $D > 0$). Как видно из (5), параметр ε можно рассматривать как показатель Гёльдера, измеряющий *грубость* поля скорости. В РГ-подходе ε играет роль подобную параметру $\varepsilon = 4 - d$ в моделях критического поведения [22, 23]. Соотношения

$$g_0 \equiv D_0/\nu_0 \equiv \Lambda^{\varepsilon} \tag{6}$$

определяют константу связи g_0 (т.е. параметр разложения в обычной теории возмущений) и характерный ультрафиолетовый (УФ) импульсный масштаб Λ.

Вклад $(\mathbf{hv})$ в (1) действует как возбуждающая сила: он поддерживает стационарное состояние и одновременно вносит крупномасштабную анизотропию. В первоначальной (изотропной) формулировке модели он заменялся искусственной гауссовой случайной силой $f(x)$ с коррелятором

$$\langle f(x)f(x')\rangle = \delta(t-t')\,C(mr), \quad r \equiv |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|, \tag{7}$$

где $C(mr)$ – некоторая функция, конечная при $mr = 0$.

Предметом интереса является, в частности, поведение одновременных структурных функций

$$S_n(\mathbf{r}) \equiv \langle [\theta(t,\mathbf{x}) - \theta(t,\mathbf{x}')]^n \rangle \tag{8}$$

в инерционном интервале, определенном неравенствами $\Lambda >> 1/r >> m$. Из соображений размерности находим

$$S_n(\mathbf{r}) = \nu_0^{-n/2}\, r^n\, R_n(\Lambda r, mr, z), \tag{9}$$

где z – косинус угла между направлениями $\mathbf{r}$ и $\mathbf{h}$, а R_n – некоторые функции безразмерных параметров. Они могут вычисляться в рамках обычной теории возмущений (то есть как ряды по g_0), но этого недостаточно для изучения асимптотик инерционного интервала: коэффициенты таких рядов сингулярны в пределе $\Lambda r \to \infty$ и/или $mr \to 0$, что компенсирует предполагаемую в теории возмущений малость g_0 и приводит к необходимости суммировать весь ряд теории возмущений для нахождения правильного ИК-поведения. Такое суммирование может быть выполнено с помощью аппарата РГ и ОР; см. [10–12].

РГ-анализ состоит из двух основных этапов. На первом этапе проверяется мультипликативная ренормируемость модели и выводятся дифференциальные уравнения РГ для ее корреляционных функций. Асимптотическое поведение функций типа (8) при $\Lambda r >> 1$ и любом фиксированном mr определяется ИК-притягивающими неподвижными точками уравнений РГ и имеет вид

$$S_n(r) = D_0^{-n/2}\, r^{n(1-\varepsilon/2)}\, R_n(mr, z), \quad \Lambda r >> 1, \tag{10}$$

с некоторыми, пока не известными, скейлинговыми функциями $R_n(mr, z)$.

На втором этапе поведение функций R_n при малых mr изучается в рамках общего решения (10) с помощью ОР. Оно показывает, что в пределе $mr \to 0$ функции R_n приобретают асимптотический вид

$$R_n(mr, z) = \sum_F C_F(mr, z)\,(mr)^{\Delta_F}, \tag{11}$$

где C_F – регулярные по mr коэффициенты. В общем случае суммирование производится по всем разрешенным по симметрии ренормированным составным операторам F с определенными критическими размерностями Δ_F.

Отличительной чертой моделей развитой турбулентности является наличие так называемых "опасных" составных операторов с *отрицательными* критическими размерностями [10–12, 20, 21]. Их вклады в ОР приводят к сингулярному при $mr \to 0$ поведению скейлинговых функций, а главный член определяется оператором с наименьшей Δ_F (если таковой существует). В изотропном случае только скалярные операторы имеют ненулевые средние и могут давать вклад в правую часть выражения (11). Нечетные функции S_{2k+1} исчезают, тогда как главные члены в S_{2k} определяются градиентами скалярного поля $F_k = (\partial_i\theta\partial_i\theta)^k$ и имеют вид

$$S_{2k}(r) \simeq D_0^{-k}\, r^{k(2-\varepsilon)}\,(mr)^{\Delta_k}, \tag{12}$$

где критические размерности Δ_k операторов F_k даются выражениями

$$\Delta_k = -2k(k-1)\varepsilon/(d+2) + O(\varepsilon^2) = -2k(k-1)\varepsilon/d + O(1/d^2). \tag{13}$$

Представление (12) было впервые получено в работах [6, 7] с помощью техники нулевых мод; вклад порядка $O(\varepsilon^2)$ в Δ_k получен в [10] с помощью аппарата РГ. Отметим, что операторы F_l с $l \geqslant k$ (чьи вклады были бы более важными) не появляются в операторном разложении для S_{2k}; это – следствие линейности по θ исходного уравнения (1).

В анизотропном случае важную роль начинают играть неприводимые тензорные операторы вида

$$F[n,p] \equiv \partial_{i_1}\theta \cdots \partial_{i_p}\theta\,(\partial_i\theta\partial_i\theta)^l + \cdots, \tag{14}$$

где p – число свободных векторных индексов и $n = p+2l$ – полное число полей θ, входящих в данный оператор; векторные индексы символа $F[n,p]$ для краткости опущены. Многоточие обозначает вычитательные вклады (необходимые при $p \geqslant 2$), которые обеспечивают бесследовость тензора $F[n,p]$ по отношению к сворачиванию любой пары индексов; например $F[2,2] = \partial_i\theta\partial_j\theta - \delta_{ij}F[2,0]/d$.

При $\mathbf{h} \neq 0$ операторы (14) приобретают ненулевые средние значения, образованные из векторов $\mathbf{h}$ и дельта-символов Кронекера, и дают нетривиальные вклады в ОР для функций S_n; это в частности приводит к возникновению ненулевых нечетных функций.

Критические размерности, связанные с операторами (14), имеют вид [12]

$$\Delta[n,p] = \frac{2n(n-1) - (d+1)(n-p)(d+n+p-2)}{2(d-1)(d+2)}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

(см. также последующие работы [18, 14]).

Прямой анализ явного однопетлевого выражения (15) показывает, что при любом фиксированном n размерность $\Delta[n,p]$ монотонно убывает вместе с p и достигает минимума при наименьшем возможном значении $p = p_n$, то есть $p = 0$ если n четно и $p = 1$ если n нечетно:

$$\Delta[n,p] > \Delta[n,p'] \quad \text{если} \quad p > p'. \qquad (16)$$

Далее, это минимальное значение $\Delta[n,p_n]$ отрицательно и монотонно убывает с ростом n:

$$0 > \Delta[2k,0] > \Delta[2k+1,1] > \Delta[2k+2,0]. \qquad (17)$$

Отметим наконец, что при любом фиксированном p размерность (15) также монотонно убывает с ростом n:

$$\Delta[n,p] > \Delta[n',p] \qquad \text{если} \quad n < n'. \qquad (18)$$

Среднее значение оператора с размерностью $\Delta[k,p]$ есть бесследовый (при $p \geqslant 2$) тензор, построенный из векторов $\mathbf{h}$ и дельта-символов Кронекера; его свертка с векторными индексами коэффициента C_F в (11) дает полином Лежандра порядка p, так что разложение (11) соответствует использованному в работах [15–19] разложению по неприводимым представлениям группы вращений.

Неравенства (16), (17) показывают, что вклады тензорных операторов (14) в асимптотическое выражение (11) демонстрируют своего рода иерархию: чем меньше ранг, тем важнее вклад.

Ведущий вклад в выражении (11) для четной (нечетной) функции S_n определяется скалярным (векторным) составным оператором, построенным из n сомножителей $\partial\theta$, и имеет вид:

$$S_n(r) \propto (hr)^n\,(mr)^{\Delta[n,p_n]}. \tag{19}$$

Рассмотрим следствия приведенных выше результатов для проблемы восстановления локальной изотропии применительно к нашей модели.

В качестве меры мелкомасштабной анизотропии обычно выбираются безразмерные отношения структурных функций:

$$R_n(\mathbf{r}) \equiv S_n(\mathbf{r})/S_2^{n/2}(\mathbf{r}). \tag{20}$$

Из (19) вытекают следующие асимптотические выражения для инерционного интервала:

$$R_{2k+1} \propto (mr)^{\Delta[2k+1,1]-(2k+1)\Delta[2,0]/2}, \tag{21}$$

$$R_{2k} \propto (mr)^{\Delta[2k,0]-k\Delta[2,0]}. \tag{22}$$

Зависимость от числа Пекле $Pe \equiv (\Lambda/m)^{\varepsilon}$ можно оценить, заменив r на $1/\Lambda$; см. [8]. Используя явные выражения для $\Delta[n,p]$, в порядке $O(\varepsilon)$ получаем:

$$R_{2k+1} \propto Pe^{-(d+2-4k^2)/[2(d+2)]}, \tag{23}$$

$$R_{2k} \propto Pe^{2k(k-1)/(d+2)}. \tag{24}$$

Поскольку ведущие члены четных функций (19) определяются показателями “изотропных мод” (то есть размерностями скалярных составных операторов), асимптотика инерционного интервала для четных отношений (22), (24) оказывается такой же, как и в изотропной модели. Это дает количественное подтверждение универсальности *ведущих* аномальных показателей для *четных* функций, т.е. их независимости от типа накачки. С другой стороны, нечетные величины (21), (23) оказываются чувствительными к анизотропии: R_3 в (23) медленно убывает при $Pe \to \infty$, тогда как отношения R_{2k+1} с $k \geqslant 2$ *возрастают* вместе с Pe, тем самым свидетельствуя о сохраняющейся анизотропной активности в глубине инерционного интервала.

Обрисованная выше картина представляется весьма общей. Действительно, подобное поведение было обнаружено недавно для самого турбулентного поля скорости [19], для пассивной скалярной величины, переносимой двумерным полем скорости, удовлетворяющим уравнению Навье–Стокса [14] и для векторного (магнитного) поля, переносимого синтетическим полем скорости типа (3); см. [15–17].

Обсудим теперь влияние сжимаемости жидкости на проникновение анизотропии вглубь инерционного интервала. В этом случае поперечный проектор в корреляторе (3) заменяется линейной комбинацией

$$P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k}),$$

в которой $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – продольный проектор и $\alpha > 0$ – новый свободный параметр. Модель (1) отвечает турбулентному переносу энтропии, температуры, концентрации примеси (“tracer”), тогда как нелинейность вида $\theta' \boldsymbol{\partial}(\mathbf{v}\theta)$ описывает конвекцию плотности какой-либо величины.

Выражение (15) для первого случая принимает вид [13]

$$\Delta[n,p] = \frac{2n(n-1)(1-\alpha) - (n-p)(n+p+d-2)(d+1+\alpha)}{2(d+2)(d-1+\alpha)}\,\varepsilon, \quad (25)$$

поправка порядка $O(\varepsilon^2)$ для любых n, p, d и α вычислена в [25].

Хотя иерархические соотношения (16)–(18) остаются справедливыми для всех $\alpha > 0$ (в частности, $\partial\Delta[n,p]/\partial p > 0$), поправки становятся ближе к главным членам с ростом α:

$$\partial^2 \Delta[n,p]/\partial p \partial \alpha < 0.$$

Далее, выражения (23) принимают вид

$$R_{2k+1} \propto (mr)^{\varepsilon\,[(d-1+\alpha)(d+2-4k^2)-8\alpha k^2]/2(d+2)(d-1+\alpha)}. \quad (26)$$

Из (26) следует, что R_3 начинает расходиться при $mr \to 0$ если параметр α достаточно велик [именно, $\alpha > (d-1)(d+2)/(10-d) + O(\varepsilon)$], а расходимость высших отношений R_{2k+1} с ростом α становится еще сильнее.

Сказанное означает, что сжимаемость усиливает проникновение мелкомасшабной анизотропии вглубь инерционного интервала. Этот факт также носит общий характер и наблюдается, в частности, в модели турбулентной конвекции пассивного векторного (магнитного) поля [26].

В заключение сделаем несколько замечаний.

Критические размерности всех составных операторов (15) не зависят от вида накачки: они не изменяются, когда изотропная случайная сила (7) в уравнении (1) заменяется анизотропным вкладом ($\mathbf{hv}$). Разница проявляется в том, что в первом случае лишь скалярные операторы могут давать вклад в представления типа (11), а во втором – неприводимые тензорные операторы приобретают ненулевые средние и также проявляются в (11). Это легко пояснить на языке нулевых мод: шум f и член ($\mathbf{hv}$) не дают вклада в дифференциальные операторы, входящие в уравнения для одновременных функций; нулевые моды (решения однородных уравнений) совпадают в обоих случаях, но во втором случае следует принимать во внимание и нулевые моды с нетривиальной угловой зависимостью. На языке РГ (который применим и в случае конечеого времени корреляции, см. [12, 13]) тот же факт объясняется следующим образом: случайная сила или поле $\mathbf{h}$ не входят в диаграммы Фейнмана, определяющие ренормировку операторов (15).

Однако аномальные показатели пассивного скаляра становятся неуниверсальными и приобретают зависимость от параметров анизотропии, если само поле скорости является сильно анизотропным на малых масштабах [27].

Поведение, описанное выше для скаляра и в работах [15, 16] для пассивного магнитного поля (суперпозиция степенных законов с универсальными показателями и неуниверсальными амплитудами) оказывается довольно типичным и наблюдается также для турбулентности Навье–Стокса при численном моделировании течения в канале и натурных экспериментах в поверхностном слое атмосферы, см. работы [19] и ссылки в них. В этих работах структурные функции поля скорости разлагались по неприводимым представлениям группы вращений; было обнаружено, что в каждом секторе такого разложения возникает степенное поведение, а показатели, по-видимому, являются универсальными. Напротив, амплитуды при различных вкладах не являются универсальными, так как зависят от положения в потоке, локальной степени анизотропии и неоднородности и т.п. [19].

Все это довольно неожиданно, так как уравнения для корреляционных функций в подобной ситуации заведомо не являются замкнутыми, однородными или изотропными. Хотя критические размерности некоторых составных операторов для статистического уравнения Навье–Стокса со случайной силой демонстрируют иерархию типа (16), см. работу [28] и раздел 2.3 в книге [20], соотношение между этими размерностями и аномальными показателями в этом случае не является очевидным. Это позволяет высказать гипотезу, что аномальный скейлинг для истинной турбулентности также может оказаться в каком-то смысле линейным явлением. В связи с этим стоит напомнить, что так называемые "аддитивные правила слияния", предложенные для турбулентности Навье–Стокса в ряде работ (см. например [29]) и известные для моделей мультифрактального поведения (см. [30]), естественным образом возникают для моделей типа описанной выше именно благодаря их *линейности*. Существующие результаты для турбулентности Бюргерса также можно интерпретировать как следствие "правил слияния", для которых лишь конечное число опасных операторов дает вклад в каждую конкретную структурную функцию; см. [31].

Разумеется, не следует слишком настаивать на таком смелом предположении.

В заключение сравним поведение пассивно переносимых полей со случаем слабой акустической турбулентности, спектры которой могут быть получены как решения линейных кинетических уравнений; см. [32, 33]. Для слабо дисперсных волн (например, с законом дисперсии вида $\omega(k) \propto k^{1+\delta}$ с $\delta << 1$) анизотропия, привнесенная крупномасштабной накачкой, усиливается в глубине инерционного интервала [32]. Иерархия показателей, связанных с разложением по полиномам Лежандра, противоположна описанной выше и в работах [12, 15, 19]: анизотропные вклады вымирают медленее для больших p [32]. Напротив, при отсутствии дисперсии ($\delta = 0$) иерархия подобна описанной выше: анизотропные вклады убывают быстрее для больших p и спектр становится изотропным на малых масштабах [33]. Насколько нам известно, сведения о старших корреляционных функциях для таких моделей пока отсутствуют.

Можно заключить, что турбулентные системы могут демонстрировать существенно различное поведение в том, что касается внесенной на больших масштабах анизотропии.

Благодарности. Я благодарен Л. Ц. Аджемяну, А. Н. Васильеву, М. Гнатичу, А. Купиайнену, М. Лессигу, А. Маццино, П. Мураторе-Джинаннески, М. Ю. Налимову и Ю. Хонконену за полезные обсуждения. Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-02-16783) и Конкурсного центра Госкомвуза (грант No. 97-0-14.1-30). Часть работы была выполнена во время моего пребывания в Институте физики Университета г. Хельсинки при поддержке Академии Финляндии.

Литература

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика, Т. 2.* СПб, Гидрометеоиздат (1996).
2. U. Frisch,, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov.* Cambridge University Press (1995).
3. R. Antonia, E. Hopfinger, Y. Gagne, and F. Anselmet, — Phys. Rev. **A 30** (1984), 2704.
4. M. Holzer and E. D. Siggia, Phys. Fluids, **6**, 1820 (1994); A. Pumir, Phys. Fluids **6**, 2118 (1994); C. Tong and Z. Warhaft, Phys. Fluids **6**, 2165 (1994).
5. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 945 (1968); J. Fluid. Mech. **64**, 737 (1974); Phys. Rev. Lett. **72**, 1016 (1994); ibid. **78**, 4922 (1997).
6. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **52**, 4924 (1995); M. Chertkov and G. Falkovich, Phys. Rev. Lett. **76**, 2706 (1996).
7. K. Gawędzki and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **75**, 3834 (1995); D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen, Phys. Rev. E **54**, 2564 (1996).
8. A. Pumir, Europhys. Lett. **34**, 25 (1996); ibid. **37**, 529 (1997); Phys. Rev. E **57**, 2914 (1998).
9. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Phys. Rev. Lett. **77**, 2463 (1996); A. Pumir, B. I. Shraiman, and E. D. Siggia, Phys. Rev. E **55**, R1263 (1997).
10. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasil'ev, Phys. Rev. E **58**, 1823 (1998).
11. L. Ts. Adzhemyan and N. V. Antonov, Phys. Rev. E **58**, 7381 (1998).
12. N. V. Antonov, Phys. Rev. E **60**, 6691 (1999).
13. N. V. Antonov, chao-dyn/9907018 (submitted to Physica D).
14. A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **84**, 2385 (2000).
15. A. Lanotte and A. Mazzino, Phys. Rev. E **60**, R3483 (1999).
16. N. V. Antonov, A. Lanotte, and A. Mazzino, *Persistence of small-scale anisotropies and anomalous scaling in a model of magnetohydrodynamics turbulence.* nlin.CD/0001039 (to appear in Phys. Rev. E).
17. I. Arad, L. Biferale, and I. Procaccia, chao-dyn/9909020.
18. I. Arad, V. L'vov, E. Podivilov, and I. Procaccia, chao-dyn/9907017.
19. I. Arad, B. Dhruva, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett, **81**, 5330 (1998); I. Arad, L. Biferale, I. Mazzitelli, and I. Procaccia, chao-dyn/9903013, S. Kurien, V. S. L'vov, I. Procaccia, and K. R. Sreenivasan, chao-dyn/9906038.

20. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and A. N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence.* Gordon & Breach, London, 1999.
21. Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, УФН, **166**, 1257 (1996); Phys. Usp., **39**, 1193 (1996).
22. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena.* Clarendon, Oxford, 1989.
23. А. Н. Васильев, *Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.* СПб., Изд-во ПИЯФ (1998).
24. K. J. Wiese, chao-dyn/9911005.
25. N. V. Antonov and J. Honkonen, *Anomalous scaling in two models of passive scalar advection: Effects of compressibility and large-scale anisotropy.* in preparation.
26. N. V. Antonov, J. Honkonen, A. Mazzino, and P. Muratore-Ginanneschi, *Manifestation of anisotropy persistence in the hierarchies of MHD scaling exponents.* in preparation.
27. L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. Hnatich, and S. V. Novikov, *Anomalous scaling of a passive scalar in the presence of strong anisotropy.* in preparation.
28. Л. Ц. Аджемян, С. В. Борисенок, В. И. Гирина, ТМФ **105**, 450 (1995).
29. G. L. Eyink, Phys. Lett. A **172**, 355 (1993).
30. B. Duplantier and A. Ludwig, Phys. Rev. Lett. **66**, 247 (1991).
31. M. Lässig, cond-mat/9811223 (to appear in Phys. Rev. Lett.).
32. V. E. Zakharov, V. S. L'vov and G. E. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence.* Springer Verlag, Berlin, 1992, Vol. 2; V. S. L'vov and G. E. Falkovich, Zh. Éksp. Teor. Fiz. **80**, 592 (1981) [Sov. Phys. JETP **53**, 299 (1981)].
33. V. S. L'vov, Yu. V. L'vov and A. Pomyalov, chao-dyn/9905032.

Antonov N. V. "Toy models" of turbulent convection and the hypothesis of the local isotropy restoration.

A brief review is given of recent results devoted to the effects of large-scale anisotropy on the inertial-range statistics of the passive scalar quantity $\theta(t,\mathbf{x})$, advected by the synthetic turbulent velocity field with the covariance $\propto \delta(t-t')|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{\varepsilon}$. Inertial-range anomalous scaling behavior is established, and explicit asymptotic expressions for the structure functions $S_n(\mathbf{r}) \equiv \langle[\theta(t,\mathbf{x}+\mathbf{r})-\theta(t,\mathbf{x})]^n\rangle$ are obtained; they are represented by superpositions of power laws with nonuniversal (dependent on the anisotropy parameters) anomalous exponents, calculated to the first order in ε in any space dimension. The exponents are associated with tensor composite operators built of the scalar gradients, and exhibit a kind of hierarchy related to the degree of anisotropy: the less is the rank, the less is the dimension and, consequently, the more important is the contribution to the inertial-range behavior. The leading terms of the even (odd) structure functions are given by the scalar (vector) operators. The small-scale anisotropy reveals itself in odd correlation functions: for the

incompressible velocity field, $S_3/S_2^{3/2}$ decreases going down towards to the depth of the inertial range, while the higher-order odd ratios increase; if the compressibility is strong enough, the skewness factor also becomes increasing.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 21 марта 2000 г.