Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Д. Б. Баранов, В. С. Ярунин

РАССЕЯНИЕ ФЕРМИОНОВ НА БОЗЕ-КОНДЕНСАТЕ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Введение

В последнее время большой интерес в мире вызывает исследование низкотемпературных сверхтекучих явлений в ^{3}He и ^{4}He [1]. В частности, важной и интересной задачей является сверхтекучесть бозонных систем с примесью фермионов, даже относительно небольшая доля которых может привести к изменению свойств бозе-системы. В этой работе мы исследуем влияние фермионной примеси на спектр надконденсатных возбуждений сверхтекучей бозе-системы. Рассеяние нейтронов на бозе-конденсате жидкого ^{4}He может служить одним из таких примеров. Малые величины концентрации нейтронов и константы бозон-нейтронного взаимодействия λ по сравнению с константой бозон-бозонного взаимодействия g приводят к незначительному изменению спектра надконденсатных возбуждений: нейтроны служат почти "неразрушающим" тестом для ^{4}He. Тем не менее величину этого изменения в разных областях спектра возбуждений можно оценить теоретически с целью предложить специальную экспериментальную схему для их измерения. Другим примером таких систем является смесь жидких ^{3}He и ^{4}He. В этом случае константы ν взаимодействия ^{3}He–^{4}He и g взаимодействия ^{4}He–^{4}He сравнимы по величине, так что даже при небольшой относительной концентрации атомов ^{3}He ($\sim 5\%$) сдвиг спектра надконденсатных возбуждений ^{4}He, повидимому, может быть обнаружен экспериментально [2].

Следует отметить, что область температур и концентраций ^{3}He в экспериментах такова, что фазовые переходы в жидком ^{3}He не происходят. Таким образом, гамильтониан системы ^{3}He–^{4}He отличается от бозон-нейтронного гамильтониана только различным начальным распределением фермионов по энергиям и зависимостью взаимодействия от величины переданного импульса p.

В этой работе мы найдем аналитическое выражение для спектра надконденсатных возбуждений в этих двух системах как функцию всех констант взаимодействия.

2. Взаимодействие фермионов с бозе-конденсатом.

Рассмотрим взаимодействие жидкого ^{4}He с фермионами. Для бозе-конденсата ^{4}He воспользуемся гамильтонианом Боголюбова [3]

$$H_B = g_0 \frac{|a|^2}{2V} +$$

$$+ \sum_{k \neq 0} \left[\Omega_k b_k^+ b_k + \frac{g_k}{2V} (b_k^+ b_{-k}^+ a^2 + b_k b_{-k} a^{*2} + 2 b_{-k}^+ b_k^+ |a|^2 + \frac{g_0}{V} b_k^+ b_k |a|^2 \right]. \tag{1}$$

$$\Omega_k = \frac{k^2}{2m}, \qquad [b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

где бозоны конденсата описываются классическими амплитудами a, a^*, а надконденсатные бозоны с $k \neq 0$ – операторами b_k, b_k^+. Калибровочная инвариантность нарушена в H_B, так что число атомов не сохраняется. Однако отмечено наличие "квазиклассического" интеграла движения n для H бозонов [4]

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|a|^2 + \sum_{k \neq 0} b_k^+ b_k \right) = \{H_B, |a|^2\} + i \left[H_B, \sum_{k \neq 0} b_k^* b_k \right] = 0,$$

$$\{H_B, A\} = i \left(\frac{\partial H_B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial a^*} - \frac{\partial H_B}{\partial a^*} \frac{\partial A}{\partial a} \right),$$

который приводит к каноническому распределению со связью.

В гамильтониан системы H входят H_B, гамильтониан свободных фермионов h_f и фермион-бозонное взаимодействие V_1. Здесь $h_f = \sum_k \varepsilon_k c_k^+ c_k$, $\varepsilon_k = \frac{k^2}{2m_f}$, c_k^+, c_k – операторы рождения и уничтожения фермионов с импульсом k, V_1 – член, отвечающий за взаимодействие между бозе-конденсатом и фермионами [5, 6]

$$V_1 = \frac{1}{V} \sum_{q_1+q_2=q_3+q_4} \Lambda c_{q_1}^+ c_{q_3} b_{q_2}^+ b_{q_4} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}$$

$$= \underbrace{\sum_q c_q^+ c_q |a|^2 \frac{\lambda(q)}{V}}_{\substack{\text{упругое рассеяние}\\ \text{фермионов на конденсате}}} + \underbrace{\sum_q c_q^+ c_q \sum_{k\neq 0} b_k^+ b_k \frac{\lambda(k-q)}{V}}_{\substack{\text{упругое рассеяние}\\ \text{на надконденсатных}\\ \text{бозонах}}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k,q} c_k^+ c_q (b_{k-q} a^* + b_{q-k}^+ a) \frac{\lambda(k-q)}{V}}_{\substack{\text{неупругое возбуж-}\\ \text{дение конденсата}}} + \underbrace{\sum_{k,q} c_k^+ c_q \sum_{k_1} b_{k_1}^+ b_{k_1+k-q} \frac{\lambda(k-q)}{V}}_{\substack{\text{неупругое рассеяние}\\ \text{фермионов на надконден-}\\ \text{сатных бозонах}}} \tag{2}$$

Первая сумма правой части последней формулы отвечает за упругое рассеяние в V_1 и мы ее рассматривать не будем, так как из эксперимента известно, что она дает малый вклад в спектр бозонов. Втопая сумма, отвечающая за уппугое пассеяние, пассмативается отдельно. Также в V_1 не будем учитывать член $\frac{\lambda}{V} \sum_{k,q} c_k^+ c_q \sum\limits_{k_1} b_{k_1}^+ b_{k_1+k-q}$ так как нас прежде всего интересуют возбуждения конденсата, а не надконденсатных бозонов. Обозначим:

$$H_f = h_f + V_1.$$

Симметризуем индексы под знаком суммы в H_f. Для этого разобьем первую сумму на две, сделав в одном из слагаемых замену индексов суммирования $q \to k$, $k \to q$, т.е.

$$H_f = \sum_{k,q} (c_k^+ c_q^+) \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_k}{2} & \frac{\lambda}{2V}(b_{k-q} a^* + b_{q-k}^+ a) \\ \frac{\lambda}{2V}(b_{q-k} a^* + b_{k-q}^+ a) & \frac{\varepsilon_q}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_q \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Таким образом, мы представили процесс взаимодействия между фермионами и бозонами как сумму двух эквивалентных процессов, в одном из которых свободные фермионы с энергией $\frac{\varepsilon_k}{2}$ налетают на бозе-конденсат, передают ему часть энергии и вылетают с импульсом q и эквивалентный ему процесс идущий в обратную сторону, т.е. цвободные фермионы с энергией $\frac{\varepsilon_q}{2}$ налетают на бозе-конденсат и передают ему часть энергии, вылетая с импульсом k.

$$H = H_B + H_f. \tag{4}$$

3. Вычисление статистической суммы по фермионам.

Для N бозонов статистическая сумма Q имеет вид:

$$Q = \mathrm{Sp}\, \left(e^{-\beta(H_B + H_f - \mu_b n - \mu_f n_f)} \delta_{nN} \right), \quad n = |a|^2 + \sum_{k \neq 0} b_k^+ b_k ,$$

где μ_b и μ_f – химические потенциалы ^{4}He и ^{3}He, n – квазикласический бозонный интеграл движения, а n_f – концентрация фермионов. Q выражается через континуальный интеграл следующим образом:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\rho \prod_{k \neq 0} \int Db_k^* Db_k \exp[S_B + \mu_b n] \int Dc_k^* Dc_q \exp[S_{H_f} + \mu_f n_f],$$

$$\rho = \frac{|a|^2}{V},$$

где S_B, S_{H_f} – действия для гамильтонианов H_B и H_f соответственно, ρ – плотность бозе конденсата.

В выражении для Q возьмем сначала шпур по фермионным переменным. Собственные значения f_1, f_2 матпицы A фермионного гамильтониана оппеделяются из уравнения

$$\det\,(H_f - f) = 0,$$

и могут быть записаны в виде

$$f_{1,2} = \frac{\varepsilon_q + \varepsilon_k - 2\mu_f}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_q}{4} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{4V^2} \gamma_{k-q} \gamma_{q-k}}, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{k-q} = b_{k-q} a^* + b_{q-k}^* a$$

Таким образом, статистическая сумма имеет вид:

$$Q = \int D\mu_B e^{S_B} \prod_{k,q} \left[1 + e^{-\beta V(f_1 + f_2)} + e^{-\beta V f_1} + e^{-\beta V f_2} \right] \tag{6}$$

4. Спектр надконденсатных возбуждений.

Для нахождения спектра надконденсатных возбуждений перепишем статистическую сумму для бозонных переменных в виде

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^2 a \prod_{p \neq 0} \int Db_p^* Db_p \exp \left[-\beta \frac{g_0}{2V} |a|^4 + \int_0^\beta (b_p^*, b_{-p}) K \begin{pmatrix} b_p \\ b_{-p}^* \end{pmatrix} dt \right],$$

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} - \frac{\alpha_p}{2} & -\xi_p \\ -\xi_p{}^* & \frac{d}{dt} - \frac{\alpha_p}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Используя известную формулу [7]

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\det K_0}{\det K} = \exp\left[-\int\limits_0^{\xi_p} \mathrm{Sp}\,\left(\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x}\right) dx\right]$$

мы можем вычислить статистическую сумму по надконденсатным переменным, и окончательно будем иметь

$$Q = \frac{e^{\beta\alpha_p/2}}{4\mathrm{sh}^{\,2}\frac{\beta E_p}{4}}, \quad \frac{E_p}{2} = \sqrt{\frac{\alpha_p{}^2}{4} - |\xi_p|^2}. \tag{8}$$

Фермионный вклад в спектр возбуждений содержится в слагаемых α_p и ξ_p и будет далее определен для различных областей спектра в системах с примесью нейтронов и ^{3}He.

5. Рассеяние нейтронов на сверхтекучем ^{4}He.

Обращаясь к интересующей нас физической задаче о рассеянии нейтронов на сверхтекучем ^{4}He заметим, что в эксперименте имеет место рассеяние пучка нейтронов с заданным волновым вектором к и энергией ε_k. Далее в формулах эти значения будут зафиксированы как заданные, а суммирование будет проводиться по импульсам q рассеянных нейтронов. Из формулы (6) видно, что статистическая сумма Q распадается на сумму нескольких слагаемых. Только слагаемое с наименьшей свободной энергией даст существенный вклад в статистическую сумму, а вкладом остальных слагаемых можно пренебречь.

Для дальнейших вычислений будут использованы две аппроксимации формулы (5), отвечающие случаям неупругого и “квазиупругого” рассеяния нейтронов на конденсате, и для каждой аппроксимации будет найден спектр надконденсатных возбуждений. При “квазиупругом” рассеянии нейтронов на бозеконденсате выполняется неравенство:

$$(\varepsilon_k - \varepsilon_q)^2 \ll \frac{4\lambda^2\rho}{V}, \text{т.е.} \quad p(p-2k) \ll 4\lambda m_n\sqrt{\frac{\rho}{V}}, \tag{9}$$

где мы ввели обозначение $p = k - q$. Так как значение λ мало, то при “квазиупругом” рассеянии $k \approx q$, т.е. $p \approx 0$. Тогда из неравенства (9) для импульса, переданного нейтроном имеем:

$$p \ll \frac{2\lambda m_n \sqrt{\rho}}{k\sqrt{V}} = p_1. \tag{10}$$

Из формулы (5) для "квазиупругого" рассеяния имеем:

$$f_{1,2} \equiv f_{1,2}^{**} = \frac{\varepsilon_k}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4V^2}\gamma_p\gamma_{-p}}. \tag{11}$$

При неупругом рассеянии нейтронов на бозе-конденсате выполняется неравенство

$$(\varepsilon_k - \varepsilon_q)^2 \gg \frac{4\lambda^2\rho}{V}, \quad \text{т.е.} \quad p \gg p_1, \tag{12}$$

и из формулы (5) для случая неупругого рассеяния имеем:

$$f_{1,2} = f_{1,2}^{*} \approx \frac{k^2 + (k-p)^2}{8m_n} \pm \left(\frac{k^2 - (k-p)^2}{8m_n} + \frac{\lambda^2 m_n}{p(2k-p)V^2}\gamma_p\gamma_{-p} \right) \tag{13}$$

Таким образом, статистическая сумма (6) может быть записана в виде

$$Q = \int D\mu_B e^{S_B} \prod_{p=0}^{p_1} \left[1 + e^{-\beta V (f_1^{**} + f_2^{**})} + e^{-\beta V f_1^{**}} + e^{-\beta V f_2^{**}} \right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{p=p_1}^{k} \left[1 + e^{-\beta V (f_1^{*} + f_2^{*})} + e^{-\beta V f_1^{*}} + e^{-\beta V f_2^{*}} \right], \tag{14}$$

где первое произведение отвечает за "квазиупругое" рассеяние, а второе за неупругое рассеяние. Далее мы получим выражение для спектра возбуждений бозе-конденсата для каждого из этих двух произведений. При этом надо помнить, что окончательное выражение для спектра надконденсатных возбуждений при "квазиупругом" рассеянии будет верно для импульсов $p \ll p_1$, а при неупругом рассеянии для импульсов $p \gg p_1$.

5.1. Неупругое рассеяние.

Рассмотрим сначала неупругое рассеяние. В произведении в формуле (6) для неупругого рассеяния наименьшей свободной энергией обладает последнее слагаемое. Добавив его в гамильтониан Боголюбова, получим выражения

$$\alpha_p = \Omega_p + (g_0 + g_p)\frac{|a|^2}{V} - \mu_b - \frac{2\lambda^2 \rho m_n}{p(2k-p)V}, \quad \Omega_p = \frac{p^2}{2m} \tag{15}$$

$$\xi_p = \frac{g_p}{2V}a^2 - \frac{\lambda^2 a^2 m_n}{2p(2k-p)V}. \tag{16}$$

5.2. “Квазиупругое” рассеяние на конденсате.

Здесь мы рассмотрим случай, когда величина переданного импульса $p \ll p_1$. Это случай “квазиупругого” рассеяния. Для того, чтобы получить спектр возбуждений бозе-конденсата в этом случае, надо рассмотреть вклад в статистическую сумму Q первого произведения в (14). В случае “квазиупругого” рассеяния собственные значения матрицы в H_n имеют вид (11). Если считать, что при $k \approx q$ величина $|b_p| \approx |b_{-p}|$, а фазу считать несущественной, то:

$$f^{**}_{1,2} = \frac{\varepsilon_k}{2} \pm \frac{\lambda}{2V}|\gamma_p|, \quad \lambda \simeq \int \lambda(r)dr.$$

Таким образом, дополнительное слагаемое к гамильтониану Боголюбова H_B, которое получается из гамильтониана H_n после интегрирования по нейтронным переменным, является линейным по операторам b_k и вклад в спектр надконденсатных возбуждений не дает. Для того, чтобы получить вклад в спектр надконденсатных возбуждений в случае “квазиупругого” рассеяния, учтем в H_n слагаемое, отвечающее за неупругое возбуждение конденсата при малой передаче энергии. Тогда в случае “квазиупругого” рассеяния матрица гамильтониана H_n выглядит следующим образом:

$$H_n = \sum_p (c^*_k c^*_{k-p}) \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_k}{2} & \Gamma_p \\ \Gamma_{-p} & \frac{\varepsilon_k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{k-p} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_p = \frac{\lambda}{2V}\sum_{k'} b^*_{k'} b_{k'+p}. \tag{17}$$

$$\text{Если } p \approx 0, \text{ то } \sum_{k'} b^*_{k'} b_{k'+p} \to \sum_{k'} b^*_{k'} b_{k'-p} \to \sum_{k'} b^*_{k'} b_{k'},$$

тогда имеет место формула

$$\tilde{f}_{1,2} = \frac{\varepsilon_k}{2} \pm \sqrt{\Gamma_p \Gamma_{-p}} \simeq \frac{\varepsilon_k}{2} \pm \Gamma_0. \tag{18}$$

Итак, мы нашли вклад в статистическую сумму второго слагаемого в формуле (2), как предел четвертого слагаемого при $p \to 0$, и для случая "квазиуругого" рассеяния имеем

$$\alpha_p = \Omega_p + (g_0 + g_p)\frac{|a|^2}{V} + \frac{\lambda}{2V} - \mu_b, \quad \xi_p = \frac{g_p}{2V}a^2.$$

5.4. Жидкий гелий-4.

Анализ спектра основан на предположении об отсутствии у него щели: $E_p \to 0$ при $k \to 0$. Предположению об отсутствии щели удовлетворяют два значения параметра связи $\mu_b^1 = \rho g_0$, $\mu_b^2 = 3\rho g_0$ Для нас интересен случай ветви боголюбовских возбуждений, когда $\mu_b^1 = \rho g_0$, так как спектр надконденсатных возбуждений с $\mu_b^2 = 3\rho g_0$ обладает большей свободной энергией и мы его рассматривать не будем. Напомним, что "квазиуппугое" пассеяние имеет место ппи импульсах $p \ll p_1$, а неуппугое пассеяние ппи $p \gg p_1$, где $p_1 = \frac{2\lambda m_n\sqrt{\rho}}{kV}$

1) В случае "квазиупругого" рассеяния выражение для спектра надконденсатных возбуждений имеет вид

$$E_p = \Big[(\Omega_p + \rho G_0 - \mu_b)^2 + 2\rho g_p(\Omega_p + \rho G_0 - \mu_b)\Big]^{1/2}, \tag{19}$$

где $G_0 = g_0 + \lambda/|a|^2$, $\Omega_p = p^2/2m$, m – масса бозона, и $\mu_b = \rho G_0$.

Фурье-образ потенциала взаимодействия g_p выбирается в виде:

$$g_p = \begin{cases} G_0(1 - \frac{p^2}{p^{*2}}) \geqslant 0 & 0 \leqslant p \leqslant p^* \\ G_0\left[\frac{(p-2p^*)^2}{p^{*2}} - 1\right] \leqslant 0 & p^* \leqslant p \leqslant 2p^*, \end{cases}$$

причем p^* – значение импульса, при котором ветви боголюбовских возбуждений пересекают параболу спектра свободных бозонов.

а) При $p < p^*$ спектр возбуждений записывается в виде:

$$E_p{}^2 = p^2\left(\frac{\rho g_0}{m} + \frac{\lambda}{2mV}\right) - \frac{p^4}{4m^2}\left(d + \frac{2m\lambda}{p^{*2}V}\right) \approx p^2\left(\frac{\rho g_0}{m} + \frac{\lambda}{2mV}\right), \tag{20}$$

$$d = \frac{4\rho g_0 m}{p^{*2}} - 1 \geqslant 0,$$

Случай, когда $p^* < p < 2p^*$ для "квазиупругого" рассеяния не рассматриваем т.к. нас интересует только случай малых p.

2) Случай неупругого рассеяния

Аналогично для этого случая в зоне $p^* < p < 2p^*$ для малых ρ:

$$E_p{}^2 = \Omega_p{}^2 + 2\Omega_p \rho G_p, \quad G_p = g_p - \frac{2\lambda^2 m_n}{p(2k-p)V}. \tag{21}$$

Для импульсов $p < p^*$

$$E_p{}^2 = p^2 \frac{\rho g_0}{m} - \frac{p^4 d}{4m^2} - \varepsilon_1(\lambda), \quad \varepsilon_1(\lambda) = \frac{2\lambda^2 \rho m_n p}{m(2k-p)V} \tag{22}$$

5.5. Бозе – газ со слабым взаимодействием.

Рассмотрим случай, когда взаимодействие между бозонами значительно в пределах характерной длины, параметр которой задается в выражении для потенциала межбозонного взаимодействия. Мы покажем, что при уменьшении характерной длины взаимодействие между бозонами ослабевает и нейтронный вклад в спектр надконденсатных возбуждений становиться заметным. Запишем потенциал взаимодействия бозонов в виде:

$$V(r) = \frac{g_0 \zeta}{r} e^{-\kappa r}, \quad g_p = \frac{4\pi g_0 \zeta}{p^2 + \kappa^2} \tag{23}$$

где ζ – константа.

Мы не будем рассматривать случай неупругого рассеяния, так как оно не будет играть роли для газа с малым радиусом взаимодействия. Однако, для случая "квазиупругого" рассеяния ($p \ll p_1$) будем иметь

$$E_p{}^2 = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{\lambda}{2V}\right)^2 + \frac{2\pi p^2}{m(p^2+\kappa^2)}(2g_0\rho + \frac{\lambda}{V}). \tag{24}$$

Из формулы следует, что вклад нейтронного рассеяния может быть заметен при малой плотности конденсата $2\rho g_0 < \frac{\lambda}{V}$.

Характер зависимости спектра надконденсатных возбуждений от константы бозон-нейтронного взаимодействия λ существенно различен в случаях "квазиупругого" ($p \ll p_1$) и неупругого рассеяния ($p \gg p_1$). Обсуждаемый вклад нейтронов в спектр возбуждений характеризует отклик бозе-конденсата на рассеяние нейтронов. Для жидкого гелия такой отклик пренебрежимо мал, для бозе-конденсата в газовой фазе перспективным в этом смысле представляется квазиупругое рассеяние при его малых плотностях ρ. Можно оценить эти возможности исходя из общих параметров экспериментальных установок. В экспериментах [8] выход нейтронов из источника достигает 10^{10} *нейтрона/см*^{2} *сек*, а плотность потока у мишени составляет 10^7. Предполагая, что лишь 10^{-n} последней величины взаимодействует с веществом. Тогда, учитывая частоту импульсов реактора *5/сек* и скорость нейтронов 600 *м/сек* с энергией 2 meV получаем эффективную плотность нейтронов равной $10^{-n} \cdot 500$ *нейтронов/см*^{3}. Для гелия (параметр $n = 1$) плотность нейтронов несопоставимо мала по сравнению с плотностью жидкости. Для рассеяния на газе бозонов $n \gg 1$ и отклик рассеивателя на поток нейтронов в спектре рассеяния также, по-видимому, трудно обнаружим. Однако ситуация изменится, если магнитную ловушку с бозе-газом поместить в нейтронную ловушку [9]. В этом случае плотность нейтронов, достигающая 10 *нейтронов/см*^{3}, сравнима с плотностью атомов и при этом все нейтроны успевают провзаимодействовать с бозонами, поскольку время жизни нейтрона в нейтронной ловушке 1000 *сек* много больше времени жизни бозе-конденсата в магнитной.

6. Смесь жидких ^{3}He и ^{4}He.

Для рассмотрения смеси жидких ^{3}He и ^{4}He мы возьмем гамильтониан Боголюбова [3] для бозонов с тем же фермионным взаимодействием [6]. В такой системе, в отличии от случая рассеяния нейтронов, функция бозон-фермионного взаимодействия $\nu(k-q)$ сильно зависит от переданного импульса и начальное распределение фермионов по энергиям ε_k имеет другой вид. Плотность фермионов для идеального газа при температуре $T = 0$ определяется из уравнения

$$k_f = (3\pi^2)^{1/3} \rho_f^{1/3} \hbar, \tag{25}$$

где k_f – импульс Ферми. Последние два слагаемых в выражении для статистической суммы (6) дадут вклад в спектр возбуждений бозонов. Просуммируем это выражение для статистической суммы по импульсу k, в квазиклассическом приближении

$$\sum_k f_{1,2} \to \frac{1}{l^3} \int k^2 dk f_{1,2}, \quad l^3 = \frac{\pi^2 \hbar^3}{V}.$$

Используя обозначение $p = q - k$, перепишем два последних слагаемых (6) в виде

$$-\beta f_{1,2} = -\beta \int\limits_0^{k_f} \frac{(\varepsilon_q + \varepsilon_k - 2\mu_f)k^2}{4l^3} dk \pm \frac{\beta Y}{8ml^3},$$

$$Y = \int\limits_0^{k=k_f} k^2 \sqrt{p^4 + 4kp^3 + 4k^2p^2 + 16\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p dk}. \tag{26}$$

В ходе дальнейших рассуждений рассмотрим вклад слагаемого (III) формулы (2) в спектр надконденсатных возбуждений ^{4}He для случаев $q < k$ и $q > k$.

6.1. Передача импульса от ^{4}He к ^{3}He.

После взятия интеграла по начальному импульсу k атомов ^{3}He в (26), мы получаем для случая $q > k$, т.е. $p > 0$

$$Y = \left(k_f - \frac{5}{6}p\right)\frac{X_f\sqrt{X_f}}{16p^2} + \frac{5}{96p}C\sqrt{C} +$$

$$+\frac{p^6 - 4p^2\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p}{4p^4}\left(\frac{2k_f + p}{4}\sqrt{X_f} - \frac{p}{4}\sqrt{C}\right) +$$

$$\frac{\left(p^6 - 4p^2\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p\right)}{p^7}p^2\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p \ln\left(\frac{\sqrt{X_f + 2pk_f + p^2}}{\sqrt{C} + p^2}\right), \tag{27}$$

$$X = 4p^2k^2 + 4p^3k + p^4 + 16\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p,$$

$$X_f = X|_{k=k_f}, \qquad C = p^4 + 16\frac{\nu^2}{V^2}m^2\gamma_{-p}\gamma_p, \qquad \nu = \nu(p).$$

Импульсы k и q соответствуют начальным in и конечным out импульсам фермионов. Мы рассматриваем случаи, изображенные на рис. 1 и 2. В первом случае (рис. 1) происходит рождение надконденсатного бозона с импульсом $-p$, что приводит к увеличению энергии атомов ^{4}He. Во втором случае (рис. 2) происходит уничтожение надконденсатного бозона с импульсом p (уменьшение энергии атомов ^{4}He).

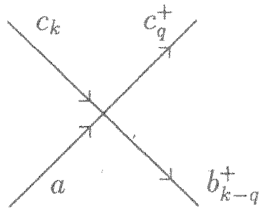

Рис. 1

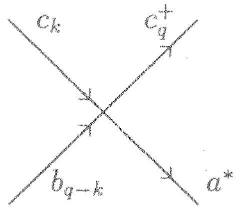

Рис. 2.

В данной работе нас интересует поведение максон-ротонной части спектра надконденсатных возбуждений ^{4}He, поэтому рассмотрим случай неупругого рассеяния $p \gg p_1$, где импульс p_1 определяется из уравнения

$$p(p+2k_f) = 4\nu m\sqrt{\frac{\rho}{V}}, \quad p_1 = \sqrt{k_f^2 + 4\nu_0 m\sqrt{\frac{\rho}{V}}} - k_f, \quad \nu_0 = \max\{\nu(p)\}. \tag{28}$$

В этом случае мы имеем

$$\sqrt{X_f} = p(p+2k_f)\sqrt{1 + \frac{16\nu^2 m^2 \gamma_{-p}\gamma_p}{V^2 p^2 (p+2k_f)^2}} \approx p(p+2k_f) + \frac{8\nu^2 m^2 \gamma_{-p}\gamma_p}{V^2 p(p+2k_f)},$$

$$\sqrt{C} = p^2\sqrt{1 + \frac{16\nu^2 m^2 \gamma_{-p}\gamma_p}{V^2 p^4}} \approx p^2 + \frac{8\nu^2 m^2 \gamma_{-p}\gamma_p}{V^2 p^2},$$

$$Y_i = \int\limits_0^{k_f} k^2\sqrt{X} = \left[2k_f\left(\frac{k_f}{p} - 1\right) + p\ln\left(1 + \frac{2k_f}{p}\right)\right]\frac{\nu^2}{V^2} m^2 \gamma_{-p}\gamma_p. \tag{29}$$

6.2. Передача импульса от ^{3}He к ^{4}He.

Аналогично для случая $q < k$, $p = k - q > 0$ выражение для Y_i имеет вид

$$Y_i = \int\limits_0^{k_f} k^2\sqrt{X} = \left[2\frac{k_f^2}{p} + 2(k_f - p) - p\ln\left(\frac{k_f}{p} - \frac{1}{2}\right)\right]\frac{\nu^2}{V^2} m^2 \gamma_{-p}\gamma_p, \tag{30}$$

6.3. Спектр надконденсатных возбуждений.

Используя формулы (8) для спектра надконденсатных возбуждений ^{4}He, получаем выражение для α_p и ξ_p в виде

$$\alpha_p|_{1,2} = \Omega_p + (g_0 + g_p)\frac{|a|^2}{V} -$$

$$-\mu_b \pm \frac{1}{4l^3}\left[2k_f\left(\frac{k_f}{p} - 1\right) + p\ln\left(1 + \frac{2k_f}{p}\right)\right]\frac{\nu^2}{V}m\rho, \qquad (31)$$

$$\xi_p|_{1,2} = \frac{g_p}{2V}a^2 \pm \frac{1}{8l^3}\left[2k_f\left(\frac{k_f}{p} - 1\right) + p\ln\left(1 + \frac{2k_f}{p}\right)\right]\frac{\nu^2}{V^2}ma^2, \quad (32)$$

где индексы 1 и 2 обозначают соответственно процессы с увеличением (рис. 1) и уменьшением (рис. 2) энергии атомов ^{4}He. Оба этих процесса могут иметь место, что будет обсуждаться в следующем разделе. Окончательные выражения для спектра E_p в максон-ротонной области имеют вид ($\mu_b = \rho g_0$)

а) $p < p^*$

$$E_p{}^2|_{1,2} = p^2\left[\frac{\rho g_0}{m_b} \pm 2k_f\left(\frac{k_f}{p} - 1\right)\frac{\nu^2 m\rho}{4l^3 m_b V}\right] \times$$

$$\times \pm p^3 \ln\left(1 + \frac{2k_f}{p}\right)\frac{\nu^2 m\rho}{4l^3 m_b V} - p^4\frac{d}{4m_b^2}, \qquad (33)$$

где $d = \frac{4\rho g_0 m_b}{p^{*2}} - 1 \geqslant 0$, а импульс p^* – точка пересечения кривых спектра возбуждений ^{4}He и дисперсии свободных бозонов.

б) для $p^* < p < 2p^*$ имеем

$$E_p{}^2|_{1,2} = p^2\left[\frac{3\rho g_0}{m_b} \pm 2k_f\left(\frac{k_f}{p} - 1\right)\frac{\nu^2 m\rho}{4l^3 m_b V}\right] -$$

$$-p^3\left[\frac{4\rho g_0}{p^* m_b} \pm \ln\left(1 + \frac{2k_f}{p}\right)\frac{\nu^2 m\rho}{4l^3 m_b V}\right] + p^4\frac{d_1}{4m_b^2}, \qquad (34)$$

$$\text{где } d_1 = 1 + \frac{4\rho g_0 m_b}{p^{*2}}.$$

В отсутствии взаимодействия между атомами ^{3}He и ^{4}He ($\nu = 0$) формулы для спектра возбуждений (33), (34) совпадают с выражением для спектра $E_p|_B$ модели Боголюбова со взаимодействием g_p.

6.4. Сдвиг спектра ^{4}He примесью ^{3}He.

В предыдущем параграфе были получены формулы для спектра надконденсатных возбуждений атомов ^{4}He в смеси жидких ^{3}He и ^{4}He. Очевидно, что точные выражения для спектра определяются зависимостью потенциала взаимодействия ν атомов ^{3}He и ^{4}He от переданного импульса p. Вид этого взаимодействия можно восстановить, используя экспериментальные данные.

Интересующий нас сдвиг $\Delta = E|_{\nu,P_1,T} - E|_{\nu=0,P_2,T\to 0}$ определяется [2] как разность энергий возбуждения атомов смеси и чистого ^{4}He, взятых при давлениях P_1, P_2 соответственно. Из формул (33), (34) следует, что при $\nu = \mathrm{const}$ (случай $\delta(r)$-взаимодействия) знак энергетического сдвига один и тот же для всех значений импульса p (рис. 3). Заметим, что постоянный знак сдвига спектра возбуждений для всех p ("+" при 0.07 K и "−" при 0.90 K) наблюдался экспериментально [2] только при высоких давлениях. Кривая 1 на рис.3 выражается формулами (33), (34) с положительным фермионным вкладом в спектр возбуждений атомов ^{4}He, а кривые 3 и 4 соответствуют формулам с отрицательным вкладом фермионов. Ясно, что возрастание величины взаимодействия ведет к увеличению сдвига для всех значений импульса p, особенно в области ротонного минимума.

Для согласования экспериментальных и теоретических результатов в случае $\nu = \nu(p)$ предположим, что функция $\nu(p)$ равна нулю при определенном значении переданного импульса $p = p_0$. В отсутствии взаимодействия между атомами ^{3}He и ^{4}He кривая спектра надконденсатных возбуждений ^{4}He для смеси совпадает с кривой спектра чистого ^{4}He, а кривая спектра возбуждений ^{3}He для смеси совпадает с кривой спектра чистого ^{3}He. Это означает, что импульс p_0 является точкой пересечения кривых для чистого ^{3}He и чистого ^{4}He. Из экспериментальных данных [2] следует что, возможны две такие точки ($p_0 = p_0^<$ и $p_0 = p_0^>$). Этот факт может быть объяснен наличием взаимодействия между атомами ^{3}He, которое приводит [2,10] к появлению плато в дисперсионной кривой ^{3}He. Это плато расположенно на уровне ротонного минимума и определяет положение точек u и v (рис. 4). Итак, феноменологическая модель взаимодействия может быть представлена в форме

$$\nu^2(p) = \nu^2 \mathrm{th}^2 \alpha(p - p_0^<) \mathrm{th}^2 \alpha(p - p_0^>). \qquad (35)$$

Дисперсионные кривые для этой модели при $|p_0^{<,>}|/p* \sim 1.25, 1.4$ показаны на рис. 4, где положение точек пересечения u и v соответствует экспериментальным значениям $p_0^{<}$ и $p_0^{>}$.

Для того, чтобы наши теоретические расчеты совпали с экспериментальными данными [2] мы должны взять кривую 1 для импульсов $p < p_0^{<}, p > p_0^{>}$, и кривую 3 для импульсов $p_0^{<} < p < p_0^{>}$. Это правило может быть объяснено преобладанием сил отталкивания между атомами ^{3}He и ^{4}He в областях импульсов $p < p_0^{<}, p > p_0^{>}$ и сил притяжения при $p_0^{<} < p < p_0^{>}$.

Величина энергетического сдвига, изображенная на рисунках 3 и 4, в 10 раз превосходит экспериментальные значения, а масштаб величин энергий E_p на рис. 3,4 определяется соотношением $0.1 \approx 0.42\ meV$. При увеличении температуры, плотность конденсата возрастает и величина сдвига увеличивается. При увеличении плотности атомов ^{3}He, величина k_f также возрастает, и расстояние между ветвями с положительным и отрицательным сдвигом увеличивается. Эти свойства совпадают с экспериментальными данными, полученными в [2].

Литература

1. H. R. Glyde, *Excitations in liquid and solid helium.* Clarendon Press (1994).
2. B. Fåk, K. Guckelsberger, M. Körfer, R. Scherm, A. J. Dianoux, Phys. Rev., **B41** (1990), 8732.
3. N. N. Bogoliubov, Izv. AC. USSR. Ser. Fiz., **11** (1947), 77.
4. V. S. Yarunin, L. A. Siurakshina, Physica, **A 215** (1995) 261; V. S. Yarunin, Teor.i Mat. Fiz., **109** (1996) 295; V. S. Yarunin, Physica, **A 232** (1996), 436.
5. D. B. Baranov, Zh. A. Kozlov, L. A. Siurakshina, V. S. Yarunin, Annalen der Physik 8 (1999), 165.
6. D. B. Baranov, V. S. Yarunin, Physica, **A 269** (1999), 222.
7. V. S. Yarunin, Teor. i Mat. Fiz., **119** (1996), 308.
8. N. M. Blagoveshchenskii, I. V. Bogoyavlenskii, L. V. Karnatsevich, Zh. A. Kozlov, V. C. Kolobrodov, V. B. Priezzev, A. V. Puchov, A. N. Skomorokhov, V. S. Yarunin, Phys. Rev., **B 50** (1994), 16550.
9. V. N. Shvetsov, 7th school on neutron physics, Dubna, **1** (1995), 216.
10. W. Hsu, D. Pines, C. H. Aldrich III, Phys. Rev., B32 (1973), 7179.

Baranov D. V., Yarunin V. S. The scattering of fermions on the superfluid bose-condensate.

The influence of the fermionic impurity on the spectrum of the overcondensate excitations of the superfluid Bose system is being investigated. The scattering of the neutrons on the Bose condensate of the superfluid

^{4}He and the mixture of the liquid ^{3}He and ^{4}He are considered. The analytical expression for the spectrum of the overcondensate excitations for these two systems has been found.

Объединенный институт
ядерных исследований,
yarunin@thsun1.jinr.ru

Поступило 28 марта 2000 г.