Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Н. М. Боголюбов

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ БОЗЕ-ГАЗА В ЛОВУШКЕ

**Посвящается светлой памяти
нашего друга
Анатолия Георгиевича Изергина**

Новая страница исследований бозе-эйнштейновских конденсатов связана с созданием этих конденсатов в газах щелочных элементов удерживаемых магнитными ловушками [1]. Значительный интерес представляет собой изучение свойств фазовой когерентности подобных конденсатов, а это, в свою очередь, связано с исследованием поведения корреляционных функций [2]. Основная сложность теории связана с тем, что ловушка нарушает трансляционную инвариантность, а в одномерном случае $D = 1$ и полную интегрируемость модели. Для интегрируемой однородной модели одномерного бозе-газа корреляционные функции вычисляются точно [3, 4] и их длинноволновое поведение подробно исследовано [5–7]. В работе [8] рассматривалось поведение одночастичных корреляторов для бозе-газа в ловушке на относительно больших расстояниях в пространственных размерностях $D = 3, 2, 1$. В размерности $D = 3$ полученные в этой статье результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [9].

В настоящей работе мы рассмотрим асимптотику многочастичных температурных корреляционных функций

$$G_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2m}) \equiv \langle \Psi^\dagger(\mathbf{r}_1) \dots \Psi^\dagger(\mathbf{r}_m) \Psi(\mathbf{r}_{m+1}) \dots \Psi(\mathbf{r}_{2m}) \rangle_T \qquad (1)$$

и покажем, что при малых температурах и больших относительных расстояниях $R_{ij} = \mid \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \mid$ данная функция представляется в виде

$$G_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2m}) \sim \prod_{1 \le i < j \le 2m} G_1^{-l_i l_j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \qquad (2)$$

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-01-00313).

где $G_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ – является одночастичной корреляционной функцией, $l_i = 1$ если $i = 1, \dots, m$ и $l_i = -1$ если $i = m+1, \dots, 2m$, мы считаем также, что координаты $\mathbf{r}_i$ лежат внутри конденсата и далеко от его границ. Наличие ловушки нарушает трансляционную инвариантность системы, что приводит к изменению формы одночастичных корреляторов по сравнению с однородным случаем [6].

Для вывода (2) мы применим метод функционального интегрирования [10], позволяющий, в принципе, вычислять все термодинамические характеристики бозе-газа в ловушке [11]. Представим среднее (1) как отношение двух функциональных интегралов по пространству комплекснозначных функций

$$
\begin{aligned}
&G_m(\mathbf{r}_1, \tau_1; \dots; \mathbf{r}_{2m}, \tau_{2m}) \\
&= Z^{-1} \int e^S \overline{\psi}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \dots \overline{\psi}(\mathbf{r}_m, \tau_m) \psi(\mathbf{r}_{m+1}, \tau_{m+1}) \\
&\qquad \dots \psi(\mathbf{r}_{2m}, \tau_{2m}) D\overline{\psi} D\psi,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где Z это статистическая сумма:

$$
Z = \int e^S D\overline{\psi} D\psi,
$$

а действие S для газа с дельтаобразным отталкивательным взаимодействием между частицами силы $g > 0$ в $\mathbf{R}^D$ равно

$$
\begin{aligned}
S[\psi, \overline{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^D r \Big(&\overline{\psi}(\mathbf{r}, \tau) K \psi(\mathbf{r}, \tau) \\
&- \frac{g}{2} \overline{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \overline{\psi}(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \psi(\mathbf{r}, \tau) \Big).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Здесь дифференциальный оператор $K = \partial_\tau - H$, гамильтониан $H = (-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu)$, потенциал ловушки $V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\Omega_1^2 r_1^2 + \Omega_2^2 r_2^2 + \Omega_3^2 r_3^2)$ в случае $D = 3$; m – масса бозе-частицы, $\hbar$-постоянная Планка, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, а μ – химический потенциал.

Для $T << T_c$ положим $\psi(\mathbf{r}, \tau) = \psi_o(\mathbf{r}) + \psi_1(\mathbf{r}, \tau)$ [10, 12, 8] и соответственно для $\overline{\psi}$, причем конденсатное поле $\psi_o(\mathbf{r})$ не зависит от переменной τ, а тепловые флуктуации описываются малым надконденсатным полем ψ_1. Ограничившись в действии S лишь членами квадратичными по ψ_1 и $\overline{\psi}_1$, мы сможем проинтегрировать по тепловым флуктуациям: $S_{eff}[\psi_o, \overline{\psi}_o] = \ln \int e^S D\psi_1 D\overline{\psi}_1$. Соответствующее эффективное действие имеет вид

$$\begin{aligned} &S_{eff}[\psi_o, \overline{\psi}_o] + \beta F_{nc}(\mu) \\ =&\beta \int d^D r \Big\{ \overline{\psi}_o(\mathbf{r}) [\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \Lambda - V(\mathbf{r})]\psi_o(\mathbf{r}) \\ -&\frac{g}{2}\overline{\psi}_o(\mathbf{r})\overline{\psi}_o(\mathbf{r})\psi_o(\mathbf{r})\psi_o(\mathbf{r}) \Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Lambda = \mu + 2g\rho_{nc}(0)$ это ренормированный химический потенциал, а $\rho_{nc}(\mathbf{r})$ - функция распределения надконденсатных частиц. При выводе данного эффективного действия используется приближение Хартри–Фока–Боголюбова [10, 12]. В этом приближении $\rho_{nc}(\mathbf{r}) = \mathcal{G}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}, \tau)$, где $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau')$ есть фундаментальное решение $D+1$ -мерного оператора $\mathcal{K} \equiv K - 2(\mu - V(\mathbf{r}))\Theta(\mu - V(\mathbf{r}))$: $\mathcal{K}\mathcal{G}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(\tau - \tau')$, здесь Θ – функция Хевисайда. Для очень малых температур и вдали от границ конденсата функция распределения надконденсатных частиц незначительно отклоняется от своего значения в центре ловушки [13] и можно положить $\rho_{nc}(\mathbf{r}) \sim \rho_{nc}(0)$. Свободная энергия надконденсатных $F_{nc}(\mu)$ частиц равна $F_{nc}(\mu) = \beta^{-1}\sum_{\mathbf{n}} \ln(1 - e^{-\beta \mathrm{E}_{\mathbf{n}}})$, где $\mathrm{E}_{\mathbf{n}}$ собственные энергии гамильтониана $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mid V(\mathbf{r}) - \mu \mid$. Условие $\Lambda = 0$ определяет значение критической температуры T_c.

Перейдем теперь к новым переменным: плотности $\rho(\mathbf{r})$ и фазе $\varphi(\mathbf{r})$ конденсатного поля ψ_o. Эти переменные вводятся стандартным образом $\psi_o(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \overline{\psi}_o(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{-i\varphi(\mathbf{r})}$, соответственно $D\overline{\psi}_0(\mathbf{r})D\psi_0(\mathbf{r}) = D\rho(\mathbf{r})D\varphi(\mathbf{r})$.

Свободная энергия F бозе-газа в ловушке равна: $-\beta F(\mu) = \ln \int e^{S_{eff}} D\psi_o D\overline{\psi}_o$. Вычисляя интеграл методом перевала при больших β, получим

$$F(\mu) = F_{nc}(\mu) - \frac{g}{2}\int d^D r \rho_o^2.$$

где плотность ρ_o удовлетворяет условию экстремума $\delta(S_{eff}[\rho_o, \varphi_o]) = 0$. Это условие эквивалентно уравнению Гросса–Питаевского [11]

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_o(\mathbf{r})}}\nabla^2\sqrt{\rho_o(\mathbf{r})}-\left(\nabla\varphi_o(\mathbf{r})\right)^2\right)+(\Lambda-V(\mathbf{r}))-g\rho_o(\mathbf{r})=0,$$
$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\nabla\cdot(\rho_o(\mathbf{r})\nabla\varphi_o(\mathbf{r}))=0. \tag{6}$$

Основное состояние системы соответствует нулевому значению поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})=m^{-1}\nabla\varphi(\mathbf{r})$. В приближении Томаса–Ферми, которое справедливо при достаточно малых температурах, кинетический член $\nabla^2\sqrt{\rho}$ в (5) можно опустить и уравнение Гросса–Питаевского превращается в простое алгебраическое уравнение. Его решение

$$\rho_{TF}(\mathbf{r})\equiv\rho_0(\mathbf{r})=\frac{1}{g}(\Lambda-V(\mathbf{r}))\Theta(\Lambda-V(\mathbf{r})) \tag{7}$$

и определяет функцию распределения конденсатных частиц $\rho_0(\mathbf{r})$. Здесь Θ - функция Хевисайда, радиус конденсата R_c определяется из условия $\Lambda-V(\mathbf{R}_c)=0$. Отбрасывание кинетического члена в уравнении Гросса–Питаевского (6) справедливо, если кинетическая энергия много меньше энергии взаимодействия. Это условие выполняется в экспериментально полученных бозе конденсатах вдали от их границ [9].

Перейдем к вычислению корреляционной функции (1). Проинтегрировав по температурным флуктуациям ψ_1 и $\overline{\psi}_1$, получим ведущий член асимптотики

$$G_m(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{2m}) \simeq \frac{\int e^{S_{eff}}\,\overline{\psi}_o(\mathbf{r}_1)\dots\overline{\psi}_o(\mathbf{r}_m)\psi_o(\mathbf{r}_{m+1})\dots\psi_o(\mathbf{r}_{2m})D\overline{\psi}_oD\psi_o}{\int e^{S_{eff}}\,D\overline{\psi}_oD\psi_o}, \tag{8}$$

или в переменных плотность-фаза

$$G_m(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{2m}) \simeq \frac{\int e^{S_{eff}[\rho,\varphi]-i\sum_{k=1}^{m}\varphi(\mathbf{r}_k)+i\sum_{k=m+1}^{2m}\varphi(\mathbf{r}_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m}\ln\rho(\mathbf{r}_k)}D\rho D\varphi}{\int e^{S_{eff}[\rho,\varphi]}D\rho D\varphi}. \tag{9}$$

При малых температурах полученные функциональные интегралы вычисляются методом перевала и корреляционные функции представляются в виде:

$$G_m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2m}) \simeq e^{-S_{eff}[\rho_o,\varphi_o]+S_{eff}[\rho_1,\varphi_1]-i\sum_{k=1}^{m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)+i\sum_{k=m+1}^{2m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m}\ln\rho_1(\mathbf{r}_k)}. \tag{10}$$

Здесь поля ρ_o, φ_o удовлетворяют стационарным уравнениям Гросса–Питаевского (6), а поля ρ_1, φ_1 определяются из условия

$$\delta\Bigg(S_{eff}[\rho_1,\varphi_1] - i\sum_{k=1}^{m}\varphi_1(\mathbf{r}_k) + i\sum_{k=m+1}^{2m}\varphi_1(\mathbf{r}_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m}\ln\rho_1(\mathbf{r}_k)\Bigg) = 0. \tag{11}$$

Это вариационное уравнение приводит к паре уравнений типа Гросса–Питаевского

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1(\mathbf{r})}}\nabla^2\sqrt{\rho_1(\mathbf{r})} - (\nabla\varphi_1(\mathbf{r}))^2\right) + (\Lambda - V(\mathbf{r})) - g\rho_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\beta\rho_1(\mathbf{r})}\sum_{k=1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k), \tag{12}$$

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\nabla\cdot(\rho_1(\mathbf{r})\nabla\varphi_1(\mathbf{r})) = i\sum_{k=1}^{m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) - i\sum_{k=m+1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k). \tag{13}$$

Предположим теперь, что вдали от границ конденсата, $\rho_1(\mathbf{r})$ является медленно меняющейся функцией координаты $\mathbf{r}$ и кинетическим членом $\nabla^2\sqrt{\rho_1}$ можно пренебречь. Уравнения (12), (13) тогда примут вид:

$$(\Lambda - V(\mathbf{r})) - g\rho_1(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\varphi_1(\mathbf{r}))^2 = 0, \tag{14}$$

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\nabla\cdot(\rho_1(\mathbf{r})\nabla\varphi_1(\mathbf{r})) = i\sum_{k=1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) - i\sum_{k=m+1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k). \tag{15}$$

Первое из этих уравнений (14) имеет решение

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2mg}(\nabla\varphi_1(\mathbf{r}))^2. \tag{16}$$

Так как в рассматриваемом приближении член $\frac{\hbar^2}{2mg}\left(\nabla\varphi_1(\mathbf{r})\right)^2$ можно рассматривать как возмущение, то можно заменить $\rho_1(\mathbf{r})$ в (15) на $\rho_0(\mathbf{r})$ (7) и окончательно уравнение определяющее поведение корреляционной функции будет иметь вид:

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\nabla\cdot(\rho_0(\mathbf{r})\nabla\varphi_1(\mathbf{r})) = i\sum_{k=1}^{m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) - i\sum_{k=m+1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k). \qquad (17)$$

Теперь можно перейти к вычислению коррелятора (10). Из (16) и (17) следует, что

$$-S_{eff}[\rho_0,\varphi_0] + S_{eff}[\rho_1,\varphi_1] + m$$

$$= \frac{\beta g}{2}\int\left(\rho_1^2(\mathbf{r})-\rho_0^2(\mathbf{r})\right)d^D r = \frac{\beta g}{2}\int\left(\rho_1(\mathbf{r})-\rho_0(\mathbf{r})\right)\left(\rho_1(\mathbf{r})+\rho_0(\mathbf{r})\right)d^D r$$

$$\simeq -\frac{\beta\hbar^2}{2m}\int\rho_0(\mathbf{r})\left(\nabla\varphi_1(\mathbf{r})\right)^2 d^D r = \frac{\beta\hbar^2}{2m}\int\phi_1(\mathbf{r})\nabla\cdot\left(\rho_0(\mathbf{r})\nabla\varphi_1(\mathbf{r})\right)d^D r$$

$$= \frac{i}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}\varphi_1(\mathbf{r}_k) - \sum_{k=m+1}^{2m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)\right).$$

Подставляя это выражение в (10) получим

$$G_m(\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{2m}) \simeq e^{-m}\prod_{k=1}^{2m}\sqrt{\rho_0(\mathbf{r}_k)}\,e^{-\frac{i}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)-\sum_{k=m+1}^{2m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)\right)}, \qquad (18)$$

где функция $\varphi_1(\mathbf{r}) \equiv \varphi_1(\mathbf{r};\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_{2m})$ удовлетворяет уравнению (17). Естественно выразить решение уравнения (17) через функцию $g(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, являющейся решением уравнения:

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\nabla\cdot(\rho_0(\mathbf{r})\nabla g(\mathbf{r},\mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&-\frac{i}{2}\left(\sum_{k=1}^{m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)-\sum_{k=m+1}^{2m}\varphi_1(\mathbf{r}_k)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=m+1}^{2m}\left(g(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k)+g(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_j)\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\left(g(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k)+g(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_j)\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=m+1}^{2m-1}\sum_{k=j+1}^{2m}\left(g(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_k)+g(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}_j)\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}g(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_j).
\end{aligned}\tag{20}$$

Одночастичная корреляционная функция при $(\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2)$ равна соответственно

$$\begin{aligned}
&G_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\\
&\simeq e^{-1}\sqrt{\rho_0(\mathbf{r}_1)\rho_0(\mathbf{r}_2)}e^{-\frac{1}{2}(g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+g(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1))+\frac{1}{2}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1)+\frac{1}{2}g(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2)}.
\end{aligned}\tag{21}$$

Подстановка этого выражения в (20) приводит к заявленному результату (2):

$$G_m(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_{2m})=\prod_{1\le i<j\le 2m}G_1^{-l_il_j}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j).$$

Задача вычисления многочастичных корреляционных функций свелась таким образом к вычислению одночастичных корреляторов для различных пространственных размерностей: $D=1,2,3$.

Рассмотрим сперва одномерный случай. Функция распределения (7) равна соответственно $\rho_0(r)=\frac{\Lambda}{g}(1-\frac{r^2}{R_c^2})\Theta(1-\frac{r^2}{R_c^2})$, где радиус "конденсата" $R_c^2=\frac{2\Lambda}{m\Omega^2}$. Функция $g(r,r')$ является фундаментальным решением оператора Лежандра

$$\beta\frac{\hbar^2\Lambda}{mg}\frac{d}{dr}\left((1-\frac{r^2}{R_c^2})\frac{d}{dr}g(r,r')\right)=\delta(r-r')$$

и равна

$$g(r,r')=\frac{R_c}{4\beta a}\ln\frac{\left(1+\frac{|R|}{2R_c}\right)^2-\frac{S^2}{R_c^2}}{\left(1-\frac{|R|}{2R_c}\right)^2-\frac{S^2}{R_c^2}},\tag{22}$$

где $R = r - r'$, $S = \frac{r+r'}{2}$ и $a = \frac{\hbar^2 \Lambda}{mg}$. Так как $g(r,r) = 0$ то

$$G_1(r_1, r_2) \simeq e^{-1}\sqrt{\rho_0(r_1)\rho_0(r_2)}\exp\left(-\frac{R_c}{4\beta a}\ln\frac{\left(1+\frac{|R|}{2R_c}\right)^2 - \frac{S^2}{R_c^2}}{\left(1-\frac{|R|}{2R_c}\right)^2 - \frac{S^2}{R_c^2}}\right). \quad (23)$$

В пределе, когда $\frac{R}{R_c}$, $\frac{S}{R_c} \to 0$ имеем $g(r,r') \to \frac{m}{2\hbar^2\beta\rho_0(S)} \mid r - r' \mid$ и это соответствует результату статьи [8]:

$$G(r_1, r_2) \simeq e\sqrt{\rho_0(r_1)\rho_0(r_2)}\exp\left(-\frac{\nu}{\beta\rho_0(S)}R\right), \quad (24)$$

где $\nu \equiv \frac{m}{2\hbar^2}$. Корреляционная длинна равна $\frac{\beta\rho_0(S)}{\nu}$ и следовательно даже в этом приближении зависит от значений координат r_1 и r_2 по отдельности. При отсутствии ловушки ($\Omega = 0$) корреляционная длинна равна $\frac{\beta\rho_0}{\nu}$, где ρ_0 – плотность основного состояния системы при нулевой температуре, и это соответствует результату, полученному из точного решения для корреляционной функции полей одномерного бозе-газа [3]. Заметим, что состоянию с $\rho_0 > 0$ в точно решаемом случае соответствуют положительные значения химического потенциала.

Перейдем теперь к исследованию старших размерностей: $D = 2, 3$. Нас будет интересовать поведение корреляционных функций в пределе $\mid \mathbf{R}_{ij} \mid \gg \mid \mathbf{S}_{ij} \mid$ и $\frac{|\mathbf{R}_{ij}|}{R_c}, \frac{|\mathbf{S}_{ij}|}{R_c} \to 0$, где $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{S}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2}$. Именно это условие для $D = 3$ реализуется на эксперименте [9]. Рассматриваемый предел соответствует приближению, когда членом $\nabla\rho_0(\mathbf{r})\cdot\nabla\varphi_1(\mathbf{r})$ в уравнении можно пренебречь. Уравнение (17) будет иметь вид:

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\rho_0(\mathbf{r})\nabla^2\varphi_1(\mathbf{r}) = i\sum_{k=1}^{m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) - i\sum_{k=m+1}^{2m}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k).$$

Его решения выражаются через фундаментальные решения оператора Лапласа

$$\beta\frac{\hbar^2}{m}\rho_0(\mathbf{r})\nabla^2 g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

равные соответственно

$$g(r,r') = \frac{\nu}{\beta\rho_0(S)}R \quad (D=1), \quad (25)$$

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\nu}{\pi\beta\rho_0(\mathbf{S})}\ln R \quad (D=2), \tag{26}$$

$$g(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\nu}{2\pi\beta\rho_0(\mathbf{S})}\ \frac{1}{R} \quad (D=3), \tag{27}$$

где $\nu \equiv \frac{m}{2\hbar^2}$, $2\mathbf{S} = \mathbf{r}+\mathbf{r}'$, а $R \equiv\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid$. Из этих формул следует, что даже в рассматриваемом приближении корреляционные функции зависят не только от относительного расстояния $R =\mid \mathbf{r}-\mathbf{r}' \mid$, но и от координаты центра масс $\mathbf{S}$, что согласуется с нарушением трансляционной инвариантности, обусловленной наличием ловушки.

В случае $D=1$ ответ (25) приводит к одночастичной функции (24). Для $D=2$ сингулярность функции $g(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ в (26) является логарифмической, расходимость ренормализуема [14] и согласно (21) одночастичная корреляционная функция равна [8]:

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \simeq \sqrt{\rho_0(\mathbf{r}_1)\rho_0(\mathbf{r}_2)}\exp\left(-\frac{\nu}{\pi\beta\rho_0(\mathbf{S})}\ln R\right) \quad (D=2). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь поведение многочастичных корреляторов в трехмерном пространстве. Определим "фазовую когерентность" первого порядка $\Gamma_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ как отношение одночастичной корреляционной функции к квадрату модуля параметра порядка:

$$\Gamma_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{G_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}{\langle\psi(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\overline{\psi}(\mathbf{r}_2)\rangle} \simeq \frac{G_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)}{\langle\psi_o(\mathbf{r}_1)\rangle\langle\overline{\psi}_o(\mathbf{r}_2)\rangle}. \tag{29}$$

Мы заменили параметр порядка $\langle\psi\rangle$ на $\langle\psi_o\rangle$, так как среднее от термических флуктуаций равно нулю: $\langle\psi_1\rangle = 0$. Функция (29) конечна, так как расходимость $\frac{1}{R}$ функции $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ при $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ сокращается соответствующими расходимостями параметров порядка $\langle\psi(\mathbf{r}_1)\rangle$, $\langle\overline{\psi}(\mathbf{r}_2)\rangle$ [8] и она равна соответственно:

$$\Gamma_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \exp\left(\frac{\nu}{2\pi\beta}\frac{1}{\rho_0(\mathbf{S})R}\right) \simeq 1 + \frac{\nu}{2\pi\beta}\frac{1}{\rho_0(\mathbf{S})R}. \tag{30}$$

Из представления (20) следует, что фазовая когерентность m-того порядка выражается через когерентность первого порядка:

$$\Gamma_m(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_{2m}) = \frac{G_m(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_{2m})}{\prod_{k=1}^{m}\langle\psi(\mathbf{r}_k)\rangle\prod_{k=m+1}^{2m}\langle\overline{\psi}(\mathbf{r}_k)\rangle}$$

$$\simeq \prod_{1\le i<j\le 2m}\Gamma_1^{-l_i l_j}(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j). \tag{31}$$

В заключение отметим, что при температурах выше критической $T > T_c$, которая определяется из условия равенства нулю ренормированного химического потенциала $\Lambda = 0$, корреляционные функции убывают гауссовским образом.

Литература

1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor.* — Science **269** (1995), 198–201.
2. M. Naraschewski, R. J. Glauber, *Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gas.* — Phys. Rev. A **59**, No. 6 (1999), 4595–4607.
3. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge University Press, Cambridge (1993).
4. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М. (1992).
5. В. Н. Попов, *Длинноволновая асимптотика многочастичных функций Грина одномерного бозе-газа.* — Письма в ЖЭТФ **31**, No. 9 (1980), 560–563.
6. В. Н. Попов, *Возможность нарушения закона подобия при фазовом переходе бозе-системы в сверхтекучее состояние.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **150** (1986) 87–103.
7. N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Critical exponents for integrable models.* — Nucl. Phys. B **275** [FS17], No. 4 (1986), 687–705.
8. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, V. S. Kapitonov, C. Malyshev, J. Timonen, *Finite-temperature correlations in the trapped Bose-Einstein gas.* — Preprint cond-mat/9910439.
9. I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Measurment of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition.* — Nature **403** (2000), 166–170.
10. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.* Атомиздат, М. (1976).
11. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases.* — Rev. Mod. Phys. **73**, No. 3 (1999), 463–512.
12. H. T. C. Stoof, *Field theory for trapped atomic gases.* — preprint cond-mat/9910441.
13. M. Naraschewski, D. M. Stamper-Kurn, *Analitical description of a trapped semi-ideal Bose gas at finite temperature.* — Phys. Rev. A **58**, No. 3 (1998), 2423–2426.
14. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов.* Наука, М. (1975).

Bogoliubov N. M. Multi-particle correlation functions in the trapped Bose gas.

Multi-particle correlation functions at nonzero temperatures in the trapped Bose gas in $D = 3, 2, 1$ dimensions are considered. It is shown that on the relatively large distances the multi-particle correlators are expressed through one-particle ones.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 2000 г.