Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Н. М. Боголюбов, М. Б. Звонарев, А. В. Китаев

О ФЛУКТУАЦИЯХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ В ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

**Посвящается светлой памяти
нашего друга
Анатолия Георгиевича Изергина**

Шестивершинная модель на $N \times N$ квадратной решетке с граничными условиями типа доменной стенки была введена в работе [1]. Напомним [2, 3], что в этой модели каждому узлу решетки сопоставляется конфигурация стрелок на ребрах, удовлетворяющая следующему закону сохранения: число входящих стрелок равно числу выходящих. Таким образом, имеем шесть возможных типов вершин (рис. 1). Дополнительно принимается, что статистические веса, приписываемые вершинам, инвариантны относительно одновременного обращения всех стрелок:

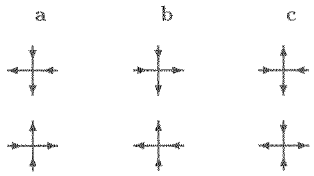

Рис. 1.

Граничные условия типа доменной стенки означают, что стрелки на верхней и нижней гранях направлены внутрь, а на боковых наружу решетки. Статсумма модели получается суммированием по

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-01-00313) и фонда Alexander von Humboldt-Stiftung.

всем допустимым конфигурациям $\{C\}$, причем каждая конфигурация дает вклад, равный произведению весов во всех вершинах:

$$Z_N = \sum_{\{C\}} \mathbf{a}^{n_1}\mathbf{b}^{n_2}\mathbf{c}^{n_3}$$

(n_1, n_2, n_3 – число вершин типа **a**, **b**, **c** в данной конфигурации C; $n_1+n_2+n_3=N^2$).

А. Г. Изергиным для Z_N было получено представление, включающее в себя детерминант матрицы размера $N\times N$ [4]. Существует несколько способов записи этого детерминанта через комбинаторные объекты [5, 6], но вычислить его удалось лишь в весьма специальных случаях [7]. В исследовании асимптотических свойств Z_N при $N\to\infty$ в последнее время достигнут значительный прогресс. Основываясь на уравнении Тоды [8, 9], свободная энергия (при некоторых ограничениях на веса) вычислена в [10]. Более строгий и общий результат получен в [11] путем сведения задачи к матричной модели и последующим применением метода перевала к соответствующему матричному интегралу. Представление, удобное для асимптотического анализа, предложено также в [12].

Про корреляционные функции модели известно гораздо меньше. Этому есть две причины. Во первых, исследование корреляционных функций в любой модели является следующим по сложности шагом после анализа статсуммы. Во вторых, это связано со спецификой нашей модели, а именно с апериодическими граничными условиями, разрушающими трансляционную инвариантность. Последнее обстоятельство еще более усложняет вычисления, но, с другой стороны, позволяет ставить задачи, принципиально отсутствующие в шестивершинной модели с периодическими граничными условиями [13]. Речь идет об исследовании корреляционных функций вблизи границ решетки, что является актуальным в теории динамического роста поверхностей [14].

Простейшая корреляционная функция описывает вероятность для стрелки на данном ребре быть направленной в ту или другую сторону. Для определенности будем работать с горизонтальными стрелками. Вероятность стрелки быть направленной влево обозначим через χ_N. Понятно что χ_N существенно зависит от выбора ребра. В данной работе мы рассмотрим χ_N на ребре, расположенном максимально близко к границам – в углу решет-

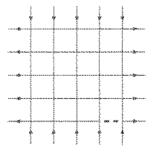

Рис. 2.

ки (см. рис. 2, где это ребро выделено пунктиром):
Несложно заметить, что если стрелка на выделенном пунктиром ребре направлена влево, то это в силу граничных условий однозначно определяет вершины вдоль нижней и правой границы решетки. В правом нижнем углу имеем вершину типа $\mathbf{c}$, остальные $2N-2$ вершины принадлежат типу $\mathbf{b}$. Оставшаяся подрешетка размера $N-1 \times N-1$ обладает при этом теми же граничными условиями, что и исходная решетка. Следовательно

$$\chi_N = \mathbf{c}\,\mathbf{b}^{2N-2}\frac{Z_{N-1}}{Z_N}\,, \tag{1}$$

т. е. задача об исследовании корреляционной функции в данном случае сводится к исследованию отношения Z_{N-1}/Z_N. Наша цель состоит в том, чтобы записать (1) в виде, удобном для асимптотического анализа при $N \to \infty$. Это сделано в §1. Соответствующая асимптотическая техника обсуждается в §2.

1. Связь с ортогональными полиномами

Для компактности записи ограничимся пока следующей параметризацией весов:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = 1/2 - x \\ \mathbf{b} = 1/2 + x\,, \qquad 0 \leqslant x < 1/2. \\ \mathbf{c} = 1 \end{cases}$$

Ситуация общего положения будет рассмотрена в конце параграфа.

Согласно [4], статсумма модели выражается через детерминант матрицы размера $N \times N$:

$$Z_N = \frac{\det_N \mathcal{M}}{\phi^{N^2}(x)\left(\prod\limits_{k=1}^{N-1} k!\right)^2}\,, \tag{2}$$

где матричные элементы матрицы $\mathcal{M}$ даются следующей формулой:

$$\mathcal{M}_{\alpha k} = \frac{d^{\alpha+k}}{dx^{\alpha+k}}\phi(x), \qquad \alpha, k = 0, 1, \dots, N-1; \tag{3}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(1/2 - x)(1/2 + x)}.$$

Матрица (3) имеет постоянные элементы вдоль любой антидиагонали, т. е. принадлежит к классу матриц Ганкеля. Ее детерминант может быть записан в терминах стандартных объектов теории ортогональных полиномов. Действительно, пусть $p_n(\xi)$, $n \geqslant 0$ – последовательность ортогональных полиномов с весом $\rho(\xi)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_n(\xi) p_m(\xi) \rho(\xi) d\xi = \delta_{mn} h_n, \qquad n, m \geqslant 0, \tag{4}$$

причем коэффициент при старшей степени у этих полиномов равен единице. Тогда детерминант матрицы Ганкеля с элементами

$$\mathcal{H}_{\alpha k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi^{\alpha+k} \rho(\xi) d\xi, \qquad \alpha, k = 0, \dots, N-1 \tag{5}$$

дается следующей формулой [6]

$$\det\nolimits_N \mathcal{H} = h_0^N b_1^{N-1} b_2^{N-2} \dots b_{N-2}^2 b_{N-1}. \tag{6}$$

Здесь h_0 определен в (4), а b_n – коэффициенты в трехчленном рекуррентном соотношении

$$p_{n+1}(\xi) = (a_n + \xi) p_n(\xi) - b_n p_{n-1}(\xi), \qquad n \geqslant 1$$

с начальными условиями $p_0(\xi) = 1$, $p_1(\xi) = \xi + a_0$.

Чтобы воспользоваться (6), приведем (3) к виду (5). Для этого представим $\phi(x)$ в интегральной форме:

$$\phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\xi} e^{-|\xi|/2} d\xi\ .$$

Из этого представления немедленно следует что $\det_N \mathcal{M} = \det_N \mathcal{H}$ с весом

$$\rho(\xi) = e^{-x\xi} e^{-|\xi|/2}. \tag{7}$$

Далее, запишем $\det_N \mathcal{M}$ в терминах h_n, определенных формулой (4). Благодаря хорошо известному соотношению между b_n и h_n

$$b_n = \frac{h_n}{h_{n-1}}, \qquad n \geqslant 1,$$

имеем:

$$\det_N \mathcal{M} = h_0 h_1 \ldots h_{N-1}.$$

Таким образом, приходим к искомому выражению для вероятности (1):

$$\chi_{N+1} = \mathbf{a}^{-2N-1}\mathbf{b}^{-1}\frac{N!^2}{h_N}. \tag{8}$$

Аналогично рассматривается ситуация общего положения, когда $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принимают произвольные положительные значения (в силу однородности статсуммы можно зафиксировать без ограничения общности $\mathbf{c} = 1$). Детерминантное представление (2) имеется в [2–4]; вес $\rho(\xi)$ легко вычисляется, (8) сохраняет свою структуру с точностью до тривиального множителя.

2. Предел $N \to \infty$

Формула (8) сводит задачу о вычислении величины χ_{N+1} к вычислению нормировочного коэффициента h_N. В настоящее время существует мощный метод, позволяющий исследовать асимптотические свойства h_N при $N \to \infty$. Он основан на использовании ассоциированной матричной задачи Римана–Гильберта [15, 16]. Асимптотическая техника исследования таких задач была разработана в [17]. В частности, в основанной на этой технике работе [18] были исследованы асимптотические свойства ортогональных полиномов с Фройдовским весом. Вес (7) является Фройдовским при $x = 0$, и в этом случае, воспользовавшись [18], имеем:

$$\begin{aligned}\ln h_N = {}&(2N+1)\ln N + 2N(\ln \pi - 1)\\ &+ \ln\left(2\pi^2\right) + \frac{1}{4N} + \frac{(-1)^N}{2N\ln^2 N}\left(1 + o(1)\right).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\ln \chi_{N+1} = \ln 2 - (2N+1)\ln\frac{\pi}{2} - \frac{1}{12N} - \frac{(-1)^N}{2N\ln^2 N}\left(1 + o(1)\right). \tag{9}$$

Для статсуммы Z_N формула (9) позволяет вычислить все растущие по N члены:

$$Z_N \underset{N\to\infty}{\sim} C \exp\left\{f_0 N^2 + f_1 N + f_2 \ln N\right\},$$

где C – некоторая константа и

$$f_0 = \ln\frac{\pi}{4}, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = \frac{1}{12}.$$

Подчеркнем, что метод [17] дает возможность математически строго найти не только главный член асимптотического разложения h_N, но и большое число поправок без черезмерного усложнения вычислений. Результаты для произвольного x готовятся нами к публикации.

Мы признательны А. Ласко и Н. Славнову за сообщение о результатах [5, 12], а также А. Х. Вартаняну за ссылку [18]. Н. М. Боголюбов благодарит физический факультет университета г. Ювяскюла, где была выполнена часть работы.

Литература

1. V. E. Korepin, *Calculations of norms of Bethe wave functions.* — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
2. A. G. Izergin, D. A. Coker, and V. E. Korepin, *Determinant Formula for the Six-Vertex Model.* — J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992), 4315–4334.
3. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
4. А. Г. Изергин, *Статсумма шестивершинной модели в конечном обьеме.* — ДАН СССР **297** (1987), 331–333.
5. A. Lascoux, *Square-ice enumeration.* — Séminaire Lotharingien Combin. **42** (1999), Art. B42p, 15pp. (Available on http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al).
6. C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus.* — Séminaire Lotharingien Combin. **42** (1999), Art. B42q, 67pp. (Preprint math.CO/9902004, 1 Feb. 1999).
7. G. Kuperberg, *Another proof of the alternating sign matrix conjecture.* — IMRN **3** (1996), 139–150; (Preprint math.CO/9712207, 29 Nov. 1997).
8. K. Sogo, *Time-dependent orthogonal polynomials and theory of soliton. Applications to matrix model, vertex model and level statistics.* — J. Phys. Soc. Japan **62** (1993), 1887–1894.
9. А. Г. Изергин, Е. Карьялайнен, Н. А. Китанин, *Интегрируемые уравнения для статсуммы шестивершинной модели.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1997), 207–215.
10. V. E. Korepin and P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the six-vertex model with domain wall boundary conditions.* — Preprint cond-mat/0004250, 14 Apr. 2000.

11. P. Zinn-Justin, *Six-Vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions and One-Matrix Model.* — Preprint math-ph/0005008, 4 May 2000.
12. N. A. Slavnov, *Fredholm determinant representation for the partition function of the six-vertex model.* — Preprint cond-mat/0005298, 18 May 2000.
13. Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике.* Мир, М. (1985).
14. J. Krug and H. Spohn, *Solids far from equilibrium.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
15. A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *Discrete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity.* — Comm. Math. Phys. **142** (1991), 313–344.
16. A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *The Isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity.* — Comm. Math. Phys. **147** (1992), 395–430.
17. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T-R McLaughlin, S. Venakides, and X. Zhou, *Asymptotics for Polynomials Orthogonal with Respect to Varying Exponential Weights.* — IMRN **16** (1997), 759–782.
18. T. Kriecherbauer and K. T-R McLaughlin, *Strong Asymptotics of Polynomials Orthogonal with Respect to Freud Weights.* — IMRN **6** (1999), 299–333.

Bogoliubov N. M., Zvonarev M. B., Kitaev A. V. Fluctuations near the boundaries in the six-vertex model.

Horizontal-arrow fluctuations near the boundaries in the six-vertex model with domain wall boundary conditions is considered. A representation via standart objects of the theory of orthogonal polynomials is obtained. This representation is used to study large N limit.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 2000 г.