Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Т. А. Болохов

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФАДДЕЕВА–ПОПОВА ДЛЯ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА В ЧАСТИЧНО-ДУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

В недавних работах Л. Фаддеева и А. Ниеми [1, 2] была разработана новая параметризация поля Янга–Миллса. Новые переменные оказываются удобными при описании поведения системы в инфракрасном пределе, а также могут иметь широкие приложения в таких областях физики, как электро- и гидродинамика, физика плазмы. Для калибровочной группы $SU(2)$ соответствующая связность в on-shell параметризации выглядит следующим образом:

$$A^a_\mu = C_\mu n^a + \varepsilon_{abc}\partial_\mu n^b n^c + \rho\partial_\mu n^a + \sigma\varepsilon_{abc}\partial_\mu n^b n^c, \tag{1}$$

где n – это вектор, лежащий на двумерной сфере, ρ и σ образуют комплексный скаляр $\phi = \rho + i\sigma$, а C_μ – абелево калибровочное поле.

Появляющийся при вычислении производящего функционала S-матрицы определитель Фаддеева–Попова в новых переменных меняет свой вид. В настоящей работе производится исследование геометрических свойств параметризации (1) и выводится выражение для объектов, возникающих в определителе Фаддеева–Попова $SU(2)$ поля Янга–Миллса. Данные объекты могут быть полезны для вычисления преобразования Бэкке–Рюэ–Стора (см. [3] стр. 177) и последующей записи обобщенных тождеств Уорда соответствующей квантовой теории.

В работе приняты следующие обозначения. По повторяющимся индексам производится суммирование, повторяющиеся греческие индексы суммируются с тензором Минковского $g_{\mu\nu}$, например:

$$a_\mu b_\mu \equiv a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3.$$

Оператор с индексом, действуя на скаляр переводит его в вектор, сопряженный к нему оператор, наоборот, действуя на вектор переводит его в скаляр, таким образом, чтобы при перекидывании налево под знаком скалярного произведения и следа его действие совпадало с действием исходного оператора:

$$\partial^*_\mu a_\mu \equiv -\partial_0 a_0 + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3,$$

$$B^*_\mu \cdot a_\mu \equiv -[B_0, a_0] + [B_1, a_1] + [B_2, a_2] + [B_3, a_3].$$

1. Вклад калибровочных условий

Как показано в работах [4] и [5], определитель Фаддеева–Попова можно получить в результате разложения пространства, касательного к многообразию связностей на две составляющие: подпространство, касательное к орбите калибровочной группы, и подпространство, касательное к многообразию калибровочно-неэквивалентных связностей. Здесь и далее будем обозначать многообразия всех связностей, калибровочно эквивалентных связностей и калибровочной группы символами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ соответственно, их представителей – буквами A, B и g, а касательные пространства – символами T_{CA}, $T_\mathcal{B}$ и $T_\mathcal{G}$. Для произвольной связности A_μ можно подобрать таких представителей B_μ и g что

$$A_\mu = g^{-1} B_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g, \tag{2}$$

т.е. многообразие $\mathcal{A}$ параметризуется с помощью элементов многообразия $\mathcal{B}$ и калибровочной группы $\mathcal{G}$. Для векторов δA, δB и $\delta g g^{-1}$ из соответствующих касательных пространств возникает следующее линейное соотношение:

$$\delta A_\mu = g^{-1} \delta B_\mu g - g^{-1} \delta g g^{-1} B_\mu g + g^{-1} B_\mu \delta g - g^{-1} \delta g g^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} \partial_\mu \delta g. \tag{3}$$

На многообразии $\mathcal{A}$ существует естественная риманова метрика

$$(dA)^2 = \int \mathrm{tr}\,(\delta A)^2 dx. \tag{4}$$

Замена переменных (2) с помощью соотношения

$$\int \mathrm{tr}\,(\delta A)^2 dx = \int \mathrm{tr}\,(\delta B_\mu + \nabla^B_\mu(\delta g g^{-1}))^2 dx \tag{5}$$

переносит эту метрику на касательные пространства $T_{\mathcal{B}}$ и $T_{\mathcal{G}}$, а возникающий при переносе определитель является определителем Фаддеева–Попова.

Применим эту технику к полю Янга–Миллса, записанному в форме (1). В off-shell переменных данная параметризация выражается через 9 независимых величин: два угла θ и φ, задающих точку на сфере $SU(2)/U(1)$, два заряженных скалярных поля ϕ, ψ и абелево поле Янга–Миллса с фиксированной калибровкой C_μ. При определенном выборе направления в алгебре $su(2)$ компоненты поля B_μ выглядят следующим образом:

$$B^-_\mu = \phi(\partial_\mu\theta - i\sin\theta\partial_\mu\varphi) + \psi(\partial_\mu\theta + i\sin\theta\partial_\mu\varphi) \equiv \phi Q_\mu + \psi\bar{Q}_\mu, \tag{6a}$$

$$B^+_\mu = \bar{B}^-_\mu = \bar{\psi}Q_\mu + \bar{\phi}\bar{Q}_\mu, \tag{6b}$$

$$B^3_\mu = C_\mu + \cos\theta\partial_\mu\varphi. \tag{6c}$$

Калибровку поля C_μ оказывается удобно фиксировать, наложив условие Лоренца на третью компоненту поля B:

$$\partial_\mu B^3_\mu = \partial_\mu C_\mu + \partial_\mu(\cos\theta\partial_\mu\varphi) = a(x). \tag{7}$$

Для удобства дальнейших вычислений введем новые переменные

$$\Phi = \frac{1}{2}(\phi + \bar{\psi}), \tag{8a}$$

$$\Psi = \frac{i}{2}(\bar{\psi} - \phi), \tag{8b}$$

$$B^1_\mu = \frac{1}{2}(B^+_\mu + B^-_\mu) = \Phi Q_\mu + \overline{\Phi Q}_\mu, \tag{8c}$$

$$B^2_\mu = \frac{-i}{2}(B^-_\mu - B^+_\mu) = \Psi Q_\mu + \overline{\Psi Q}_\mu. \tag{8d}$$

Параметризация (6) порождает нетривиальное отображение пространства T_c, касательного к многообразию $\mathcal{C} = \{\delta C_\mu, \delta\Phi, \delta\Psi, \delta\theta, \delta\varphi\}$ в пространство $T_{\mathcal{B}}$:

$$\delta B = S(\delta C_\mu, \delta\Phi, \delta\bar{\Phi}, \delta\Psi, \delta\bar{\Psi}, \delta\theta, \delta\varphi)^T \equiv S\Delta =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & Q_\mu & \bar{Q}_\mu & 0 & 0 & \alpha_\mu(\Phi) & \beta_\mu(\Phi) \\ 0 & 0 & 0 & Q_\mu & \bar{Q}_\mu & \alpha_\mu(\Psi) & \beta_\mu(\Psi) \\ P & 0 & 0 & 0 & 0 & -P\sin\theta\partial_\mu\varphi & P\cos\theta\partial_\mu \end{pmatrix}\Delta, \tag{9}$$

здесь как α и β обозначены дифференциальные операторы

$$\alpha_\mu(\Phi) = (\Phi + \bar{\Phi})\partial_\mu - i(\Phi - \bar{\Phi})\cos\theta\partial_\mu\varphi \tag{10}$$

$$\beta_\mu(\Phi) = -i(\Phi - \bar{\Phi})\sin\theta\partial_\mu, \tag{11}$$

а P – это проектор, действующий на третью компоненту связности и определяемый следующим образом:

$$P \equiv 1 - P^{\|} \equiv 1 - \partial_\mu\Box^{-1}\partial_\mu^*, \quad \Box \equiv \partial_\mu^*\partial_\mu. \tag{12}$$

Данное отображение вместе с формулой (5) производит перенос римановой метрики (4) на сумму пространств $T_{\mathcal{G}}$ и $T_{\mathcal{C}}$:

$$\int \mathrm{tr}\,(\delta A_\mu)^2 dx = \int \mathrm{tr}\,(\delta B_\mu + \nabla_\mu^B(\delta g g^{-1}))^2 dx =$$
$$= \int (\Delta, \delta g g^{-1})(S^*, \nabla_\mu^*)^T (S, \nabla_\mu^B)(\Delta, \delta g g^{-1})^T\, dx. \tag{13}$$

Будем считать, что линейное отображение S невырождено, т.е. среди 12 компонент $S\Delta$ имеется ровно 9 независимых, или (что равносильно), что матрица S^*S обратима. Тогда матрицу квадратичной формы (13) можно разложить в произведение нижне- и верхнедиагонального сомножителей:

$$\begin{pmatrix} S^* \\ \nabla_\mu^* \end{pmatrix} (S \quad \nabla_\mu^B) = \begin{pmatrix} S^*S & S^*\nabla_\mu^B \\ \nabla_\mu^* S & \nabla_\mu^*\nabla_\mu \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nabla_\mu^* S(S^*S)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^*S & S^*\nabla^B \\ 0 & \nabla_\mu^*(I - S(S^*S)^{-1}S^*)\nabla_\mu \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Таким образом, задача распадается на две части: вычисление определителя матрицы S^*S и определителя оператора

$$\nabla_\mu^*(I - S(S^*S)^{-1}S^*)\nabla_\mu. \tag{15}$$

Рассмотрим сначала последний. Для построения преобразования Бэкке–Рюэ–Стора предпочтительно использовать не сам оператор (15), а корень из него. Попытаемся записать оператор $I - S(S^*S)^{-1}S^*$ в виде произведения двух взаимно сопряженных операторов. Заметим, что данное выражение является проектором на ортогональное дополнение к образу матрицы S, действительно:

$$(I - S(S^*S)^{-1}S^*)S\Delta = 0,$$
$$(I - S(S^*S)^{-1}S^*)^2 = I - S(S^*S)^{-1}S^*.$$

Построим этот проектор, исходя из вида параметризации (6), (8) и отображения (9). Из 12-ти компонент касательного вектора $\delta B = S\Delta$ только 9 являются независимыми, следовательно, можно найти 3 независимых линейных соотношения, связывающих эти компоненты. Первое соотношение следует из калибровочного условия (7):

$$\partial_\mu \delta B^3_\mu = 0. \tag{16}$$

Другие два можно получить, используя нелинейные калибровочные условия, найденные Р. Кашаевым (см. в [2]) для двух первых компонент поля B:

$$dB^1 \wedge B^1 \wedge B^2 = 0, \tag{17a}$$

$$dB^2 \wedge B^1 \wedge B^2 = 0. \tag{17b}$$

Из этих условий следуют два линейных соотношения на компоненты касательного вектора δB:

$$B^1 \wedge B^2 \wedge d\delta B^1 - dB^1 \wedge B^2 \wedge \delta B^1 + dB^1 \wedge B^1 \wedge \delta B^2 = 0, \tag{18a}$$

$$-dB^2 \wedge B^2 \wedge \delta B^1 + B^1 \wedge B^2 \wedge d\delta B^2 - dB^2 \wedge B^1 \wedge \delta B^2 = 0. \tag{18b}$$

Объединим линейные формы, участвующие в соотношениях (18), (16) в 3×12 матрицу

$$R^* = \begin{pmatrix} B^1 \wedge B^2 \wedge d \cdot - dB^1 \wedge B^2 \wedge \cdot & dB^1 \wedge B^1 \wedge \cdot & 0 \\ -dB^2 \wedge B^2 \wedge \cdot & B^1 \wedge B^2 \wedge d \cdot - dB^2 \wedge B^1 \wedge \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \partial^*_\mu \end{pmatrix} \tag{19}$$

обладающую свойством

$$R^* \delta B = R^* S \Delta = 0.$$

Независимость условий (18), (16) позволяет выбрать граничные условия таким образом, что матричный 3×3 оператор $R^* R$ оказывается обратимым. Построенный с его помощью оператор $R(R^* R)^{-1} R^*$ является ортогональным проектором:

$$(R(R^* R)^{-1} R^*)^2 = R(R^* R)^{-1} R^*,$$

имеет коразмерность 9 и по построению ортогонален оператору $S(S^* S)^{-1} S^*$:

$$R(R^* R)^{-1} R^* S(S^* S)^{-1} S^* = 0.$$

Следовательно,

$$I - S(S^*S)^{-1}S^* = R(R^*R)^{-1}R^*.$$

Таким образом, из оператора (15) формально может быть извлечен квадратный корень:

$$\nabla_\mu^*(1 - S(S^*S)^{-1}S^*)\nabla_\mu = ((R^*R)^{-1/2}R^*\nabla_\mu)^*(R^*R)^{-1/2}R^*\nabla_\mu.$$

Аналогом оператора $\Box^{-1/2}\partial_\mu^*(\partial_\mu + B_\mu\cdot)$, стоящего в определителе Фаддеева–Попова для связности с Лоренцовой калибровкой в данном случае является выражение

$$(R^*R)^{-1/2}R^*(\partial_\mu + B_\mu\cdot). \tag{20}$$

2. Вклад замены переменных

Если выражение (20) (а точнее его квадрат (15)) возникает в определителе как проектор на ортогональное дополнение к касательному пространству $T_{\mathcal{B}}$, то появление матрицы S^*S связано непосредственно с заменой переменных (6), (8). Попробуем представить матрицу S^*S в виде произведения верхне- и нижнедиагональной матриц. Разобьем ее на блоки:

$$S^*S = \begin{pmatrix} P & 0 & D \\ 0 & Q^2 & E \\ D^* & E^* & F + D^*D \end{pmatrix},$$

так что

$$D = (-P\sin\theta\partial_\mu\varphi \quad P\cos\theta\partial_\mu),$$

$$E = \begin{pmatrix} Q_\mu\alpha_\mu(\Phi) & Q_\mu\beta_\mu(\Phi) \\ \bar{Q}_\mu\alpha_\mu(\Phi) & \bar{Q}_\mu\beta_\mu(\Phi) \\ Q_\mu\alpha_\mu(\Psi) & Q_\mu\beta_\mu(\Psi) \\ \bar{Q}_\mu\alpha_\mu(\Psi) & \bar{Q}_\mu\beta_\mu(\Psi) \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_\mu^*(\Phi)\alpha_\mu(\Phi) + \alpha_\mu^*(\Psi)\alpha_\mu(\Psi) & \alpha_\mu^*(\Psi)\beta_\mu(\Psi) + \alpha_\mu^*(\Psi)\beta_\mu(\Psi) \\ \beta_\mu^*(\Phi)\alpha_\mu(\Phi) + \beta_\mu^*(\Psi)\alpha_\mu(\Psi) & \beta_\mu^*(\Phi)\beta_\mu(\Phi) + \beta_\mu^*(\Psi) \end{pmatrix}$$

а Q^2 – это 4×4 матрица, имеющая на диагонали два блока

$$Q = \begin{pmatrix} Q_\eta Q_\eta & Q_\eta\bar{Q}_\eta \\ \bar{Q}_\eta Q_\eta & \bar{Q}_\eta\bar{Q}_\eta \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Будем предполагать, что определитель матрицы Q, равный

$$4\sin^2\theta((\partial_\mu\theta\partial_\mu\varphi)^2 - (\partial_\mu\theta)^2(\partial_\mu\varphi)^2),$$

не обращается в ноль. Это условие, в частности, гарантирует, что вектора $\partial_\mu\theta$ и $\partial_\mu\varphi$ не коллинеарны, и замена переменных (6) и (8) невырождена. Тогда в качестве нижнедиагональной матрицы можно взять

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ D^* & E^*Q^{-2} & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве верхнедиагональной – матрицу

$$\begin{pmatrix} P & 0 & D \\ 0 & Q^2 & E \\ 0 & 0 & F - E^*Q^{-2}E \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы S^*S раскладывается в произведение определителей матриц Q^2 и $F - E^*Q^{-2}$.

Матрицы F и $E^*Q^{-2}E$ имеют общие сомножители, их разность может быть записана в виде одной матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha^*_\mu(\Phi)q^{\mu\nu}\alpha_\nu(\Phi) + \alpha^*_\mu(\Psi)q^{\mu\nu}\alpha_\nu(\Psi) & \alpha^*_\mu(\Phi)q^{\mu\nu}\beta_\nu(\Phi) + \alpha^*_\mu(\Psi)q^{\mu\nu}\beta_\nu(\Psi) \\ \beta^*_\mu(\Phi)q^{\mu\nu}\alpha_\nu(\Phi) + \beta^*_\mu(\Psi)q^{\mu\nu}\alpha_\nu(\Psi) & \beta^*_\mu(\Phi)q^{\mu\nu}\beta_\nu(\Phi) + \beta^*_\mu(\Psi)q^{\mu\nu}\beta_\nu(\Psi) \end{pmatrix} \tag{22}$$

где

$$q^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \operatorname{Det} Q^{-1}(Q_\mu Q_\nu \bar{Q}_\eta \bar{Q}_\eta - Q_\mu \bar{Q}_\nu Q_\eta \bar{Q}_\eta - \\ - Q_\nu \bar{Q}_\mu Q_\eta \bar{Q}_\eta + \bar{Q}_\mu \bar{Q}_\nu Q_\eta Q_\eta).$$

Матрица $q^{\mu\nu}$ обладает свойствами проектора на ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов Q_μ и $\bar{Q}_\mu$, действительно:

$$q^{\mu\nu}Q_\nu = Q_\mu - \operatorname{Det} Q^{-1}(\operatorname{Det} Q Q_\mu) = 0, \tag{23}$$

$$q^{\mu\nu}\bar{Q}_\nu = \bar{Q}_\mu - \operatorname{Det} Q^{-1}(\operatorname{Det} Q \bar{Q}_\mu) = 0, \tag{24}$$

$$q^{\mu\eta}q^{\eta\nu} = q^{\mu\nu}, \tag{25}$$

а значит

$$q^{\mu\nu}\partial_\nu\theta = q^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi = 0.$$

Можно подставить в матрицу (22) выражения для операторов α, β и, произведя сокращения, получить дифференциальный оператор

$$\partial^*_\mu \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}\Phi)^2 + (\operatorname{Re}\Psi)^2 & (\operatorname{Re}\Phi \operatorname{Im}\Phi + \operatorname{Re}\Psi \operatorname{Im}\Psi)\sin\theta \\ (\operatorname{Re}\Phi \operatorname{Im}\Phi + \operatorname{Re}\Psi \operatorname{Im}\Psi)\sin\theta & ((\operatorname{Im}\Phi)^2 + (\operatorname{Im}\Psi)^2)\sin^2\theta \end{pmatrix} q^{\mu\nu}\partial_\nu. \tag{26}$$

3. Заключение

Проведенные вычисления показали, что определитель Фаддеева–Попова для связности, записанной в дуальных переменных разбивается на две естественные части: квадрат определителя оператора (20):

$$(R^*R)^{-1/2}R^*\nabla_\mu(\partial_\mu + B_\mu\cdot) \tag{27}$$

и определитель матричного дифференциального оператора (26), умноженного на скаляр $4\sin^2\theta((\partial_\mu\theta\partial_\mu\varphi)^2 - (\partial_\mu\theta)^2(\partial_\mu\varphi)^2)$. Приведенные выше рассуждения верны лишь в ситуации, когда нелинейная параметризация (6) не имеет особенности, и матрица (21) обратима.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Л. Д. Фаддееву, а также А. Г. Быцко за полезные замечания.

Литература

1. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, — Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 1624.
2. L. D. Faddeev and A. J. Niemi, — Phys. Rev. Lett. **B464** (1999), 90; preprint hep-th/9907180.
3. А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*. Наука, М. (1988).
4. O. Babelon and C. M. Viallet, — Phys. Lett. **B85** (1979), 246.
5. O. Babelon and C. M. Viallet, — Comm. Math. Phys. **81** (1981), 515.

Bolokhov T. A. Faddeev–Popov determinant for the $SU(2)$ Yang–Mills field in partially-dual variables.

The Faddeev–Popov determinant emerging in the partially-dual decomposition of the $SU(2)$ Yang–Mills field is being studied in the this paper.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 24 января 2000 г.