Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

А. И. Виноградов

Z-ФУНКЦИЯ СЕЛЬБЕРГА И ГИПОТЕЗА ЛИНДЕЛЁФА

Памяти А. Г. Изергина (1945–1999)

Введение

В связи с гипотезой Линника [1] Сельберг ввел Z-функцию [2]:

$$Z_{m,n}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c^{2s}}, \quad \operatorname{Re} s > 3/4, \tag{0.1}$$

где $S(m,n;c)$ – сумма Клоостермана переменного модуля $c \geqslant 1$ и фиксированных параметров $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ [4].

В той же работе [2] Сельберг продолжил Z-функцию (0.1) в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s \leqslant 3/4$ спектральным методом, откуда следовало, что она регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$ и мероморфна в левой: $\operatorname{Re} s \leqslant 1/2$.

Граница абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s = 3/4$ определяется оценкой А. Вейля [3] для сумм Клоостермана [4]:

$$S(m,n;c) \ll \tau(c) \cdot \sqrt{c}. \tag{0.2}$$

Константа в оценке (0.2) зависит от фиксированных параметров m и n:

$$\tau(c) = \sum_{d/c} 1. \tag{0.3}$$

Из работы [2] следует оценка:

$$Z_{m,n}(s) \ll |s| \Big/ \left(\sigma - \frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}. \tag{0.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований, грант No. 99-01-00102.

Константа в оценке (0.4) также зависит от m и n. При этом из гипотеза Петерсона для нулевого веса [10] следует, что эта константа равна произведению $\tau(m)\cdot\tau(n)$, где функция τ определена равенством (0.3).

Оценка (0.4) была существенно улучшена в области $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1/2+\varepsilon$ в работе [5]:

$$Z_{m,n}(s) \ll |s|^{2\cdot(3/4-\sigma+\varepsilon)}, \tag{0.5}$$

где $\sigma \in (1/2+\varepsilon), 3/4+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано.

Тем не менее оценка (0.4) имеет преимущество перед оценкой (0.5) в малой окрестности критической прямой:

$$\frac{1}{2} < \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

где оценка (0.5) перестает работать.

Из оценки (0.4) видно, что при $(\sigma - 1/2) \to +0$, Z-функция Сельберга имеет мероморфный рост первой степени относительно разности $(\sigma - 1/2) \to +0$.

В этой работе мы усилим оценку (0.4), заменив ее другой:

$$Z_{m,n}(s)(s) \ll \frac{\sqrt{|s|}}{(\sigma-1/2)} \log^2\big(|s|+1\big), \quad \sigma > \frac{1}{2}. \tag{0.6}$$

Отметим, что оценка (0.6) была получена в работе [9]. Здесь предложен новый вариант ее доказательства, который наводит на мысль, что на самом деле вместо оценки (0.6) возможно справедлива гипотеза Линделёфа в мероморфном варианте:

$$Z_{m,n}(s)(s) \ll \frac{|s|^{\varepsilon}}{(\sigma-1/2)}, \quad 0 < \big(\sigma - 1/2\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{|s|}}, \tag{0.7}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано, константа в оценке (0.7) зависит от параметров (m, n, ε).

Отметим, что из оценки (0.6) по выпуклости следует оценка (0.5).

§1. Частное суммирование

Возьмем Z-функцию (0.1) в области $\operatorname{Re} s \geqslant 2$ и разобьем $c^{-2\cdot s}$ на два множителя

$$c^{-2\cdot s} = c^{-2\cdot\alpha} \cdot c^{-2(s-\alpha)},$$

где $\alpha > 0$ – произвольное, фиксированное из интервала $\alpha \in (0,1]$, после чего применим к Z-функции частное суммирование с весовой функцией $c^{-2\alpha}$. В результате получим для Z-функции интегральное представление:

$$Z_{m,n}(s) = 2 \cdot \alpha \cdot \int_1^\infty \frac{v(x)}{x^{1+2\alpha}}\, dx, \tag{1.1}$$

где

$$v(x) = \sum_{c \leqslant x} \frac{S(m,n;c)}{c^{2(s-\alpha)}}. \tag{1.2}$$

С помощью разрывного интегрального оператора равенство (1.1) приводится к новому виду:

$$Z_{m,n}(s) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{0<\operatorname{Re} w<\alpha} \frac{Z_{m,n}(s+w-\alpha)}{w \cdot (w-\alpha)}\, dw. \tag{1.3}$$

Интеграл (1.3) идёт по бесконечной вертикальной прямой $\operatorname{Re} w = v_0$, где v_0 – любое фиксированное из интервала $0 < v_0 < \alpha$.

Переход от представления (1.1) к (1.3) легко обосновать в области $\operatorname{Re} s \geqslant 2$, которую мы рассматриваем при $\alpha \in (0,1]$. В этом случае для суммы (1.2) справедлива оценка:

$$v(x) \ll 1, \tag{1.4}$$

которая сразу следует из оценки А. Вейля (0.2) для сумм Клостермана. Поэтому интеграл в правой части (1.1) можно заменить конечным интегралом с остатком:

$$Z_{m,n}(s) = 2 \cdot \alpha \cdot \int_1^{x_0} \frac{v(x)}{x^{1+2\alpha}}\, dx + O\left(x_0^{-2\alpha}\right), \tag{1.5}$$

где $x_0 > 1$ – любое фиксированное.

Приведение конечного интеграла (1.5) к виду (1.3) с ограничением $|\operatorname{Im} w| \leqslant x_0$ уже стандартная задача. Устремляя затем $x_0 \to \infty$ получаем представление (1.3).

Оставаясь в области $\operatorname{Re} s \geqslant 2$ сделаем линейную замену переменной интегрирования: $(w - \alpha) \to w$. В результате равенство (1.3) примет вид:

$$Z_{m,n}(s) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{-\alpha<\operatorname{Re} w<0} Z_{m,n}(s+w) \frac{dw}{(w+\alpha) \cdot w}. \tag{1.6}$$

Переходя в ядре (1.6) на язык спектрального представления Z-функции Сельберга из работ [6, 8]:

$$Z_{m,n}(s+w) = \left(Z^{\mathrm{cusp}}_{m,n} + Z^{\mathrm{con}}_{m,n} + Z^{\mathrm{disc}}_{m,n}\right)(s+w), \tag{1.7}$$

и, пользуясь оценкой (0.6), мы видим, что интеграл (1.6) абсолютно сходится в области

$$\operatorname{Re}(s+w) > \frac{1}{2}. \tag{1.8}$$

Если $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1/2 + \alpha$, тогда условие (1.8) согласуется со всем диапазоном на вещестенную часть контура (1.6). Чтобы продолжить интеграл (1.6) по s в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s < 1/2 + \alpha$, сдвинем контур (1.6) вправо, в область $\operatorname{Re} w \in (-\sigma + 1/2, 0)$. В результате равенство (1.6) можно будет аналитически продолжить на всю правую полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1/2$ с помощью интегрального представления:

$$Z_{m,n}(s) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -v_0} \frac{Z_{m,n}(s+w)}{(w+\alpha)\cdot w}\, dw, \tag{1.9}$$

где $v_0 > 0$ – любое фиксированное из открытого интервала:

$$0 < v_0 < \min(\alpha, \sigma - 1/2). \tag{1.10}$$

Подставляя в ядро (1.9) правую часть (1.7) мы разобьем интегральное представление (1.9) на три части:

$$Z_{m,n}(s) = J^{\mathrm{cusp}}_{m,n}(s) + J^{\mathrm{con}}_{m,n}(s) + J^{\mathrm{disc}}_{m,n}(s), \tag{1.11}$$

где

$$J^{\mathrm{disc}}_{m,n}(s) = \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -v_0} Z^{\mathrm{disc}}_{m,n}(s+w) \frac{dw}{(w+\alpha)w}. \tag{1.12}$$

Аналогично определяются две другие интегральные компоненты правой части (1.11). Наиболее важной является дискретаня интегральная компонента (1.12), поэтому с нее мы и начнем.

§2. Дискретная интегральная компонента

Напомним, что дискретная компонента правой части (1.7) определяется равенством

$$Z^{\mathrm{disc}}_{m,n}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(m,n) \cdot h(\varkappa_j, s) \left(2\pi\sqrt{m\cdot n}\right)^{1-2s}, \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_j(m,n) = \rho_j(m) \cdot \overline{\rho_j(n)} \cdot (\operatorname{ch} \pi \varkappa_j)^{-1} = \alpha_j \cdot t_j(m) \cdot t_j(n);$$

$$\alpha_j = \alpha_j(1,1) = \frac{|\rho_j(1)|^2}{\operatorname{ch} \pi \varkappa_j}$$

$$\rho_j(m) = \rho_j(1) \cdot t_j(m)$$

– это коэффициент Фурье j-ой собственной функции $f_j(z)$ дискретного спектра оператора Лапласа

$$\Delta = -J^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right);$$

$t_j(m)$ – собственное число m-го оператора Гекке T_m, $m \geqslant 1$:

$$T_m \cdot f_j(z) = t_j(m) \cdot f_j(z).$$

Для собственного числа $t_j(m)$ справедлива гипотеза Петерсона [10]:

$$|t_j(m)| \leqslant \tau(m) = \sum_{d|m} 1, \tag{2.2}$$

$$h(r,s) = \frac{1}{2} \sin \pi \cdot s \cdot \Gamma(s - 1/2 - ir) \cdot \Gamma(s - 1/2 + ir). \tag{2.3}$$

Подробности вывода равенства (2.1) можно найти в работе [6].

Заменяя в равенстве (2.1) аргумент s на $(s+w)$ и, подставляя (2.1) в ядро интеграла (1.12), сдвинем затем контур (1.12) влево на прямую $\operatorname{Re}(w+s) = 0$. При этом будем считать, что

$$\operatorname{Re} s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right), \quad \alpha = \frac{3}{4} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4} \right),$$

т.е. $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное из интервала $(0, 1/4)$.

В результате мы пройдем серию полюсов функции $h(\varkappa_j, s+w)$ в точках

$$w = -\left(s - \frac{1}{2} \right) \mp i\varkappa_j \tag{2.4}$$

и, по теореме Коши и вычетах, преобразуем равенство (1.12) к новому виду:

$$J_{m,n}^{\mathrm{disc}}(s) = -\alpha \cdot W_{m,n}(s) - \alpha \cdot \overline{W_{m,n}(\overline{s})} + \frac{\alpha}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}(w+s)} (\,\cdot\,), \tag{2.5}$$

где

$$W_{m,n}(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j(m,n)\cdot(2\pi\sqrt{m\cdot n})^{2i\varkappa_j}\cdot\Gamma(2i\varkappa_j)}{(s-1/2-i\varkappa_j)\cdot(\alpha+1/2-s+i\varkappa_j)}\operatorname{ch}\pi\varkappa_j \qquad (2.6)$$

ядро в интеграле правой части (2.5) то же самое, что и в (1.12). Для этого интеграла справедлива оценка:

$$\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}(w+s)=0}(\,\cdot\,)\ll\tau(m)\cdot\tau(n)\sqrt{m\cdot n}\cdot\log^2(|s|+1). \qquad (2.7)$$

Чтобы получить оценку (2.7) следует заметить, что для функции h при $\operatorname{Re}s=0$ (т.е. $s=it$) справедлива оценка: ($r\geqslant 0$)

$$h(r,it)\ll\frac{\min(1,e^{-\pi(r-|t|)})}{(1+|t-r|)\cdot(1+|t+r|)}. \qquad (2.8)$$

Кроме того, для любого сдвинутого единичного интервала справедлива оценка:

$$\sum_{b\ll|a-\varkappa_j|\leqslant b+1}\alpha_j\ll(a+b+2)\log(a+b+2),\quad a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0. \qquad (2.9)$$

Константа в оценке (2.9) абсолютная. Неравенство (2.9) сразу следует из теоремы 6, (см. [6]).

Подставляя в (2.1) оценку (2.8) при $r=\varkappa_j$ и затем, используя оценку (2.9), получаем:

$$Z_{m,n}^{\mathrm{disc}}(s)\ll\tau(m)\cdot\tau(n)\cdot\sqrt{m\cdot n}\cdot\log^2(|s|+2), \qquad (2.10)$$

где $\operatorname{Re}s=0$.

Заменяя в оценке (2.10) аргумент s на $(s+w)$ и подставляя её в ядро интеграла (2.5), получаем оценку (2.7).

Отметим, что оценка (2.7) сравнительно грубая по арифметическим параметрам m и n, т.к. в ней присутствует множитель $\sqrt{m\cdot n}$. Это сказываются издержки метода, который переводит оценку Z-функции Сельберга из правой полуплоскости $\operatorname{Re}s>1/2$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re}s\leqslant 0$. Этот метод дает хорошую сходимость ряда по $\varkappa_j$ и, как следствие, хорошую оценку по основному параметру s, но ухудшает ее по арифметическим параметрам m и n. Поэтому его выгодно использовать при фиксированных m и n. Интеграл (2.7) является остатком в правой части (2.5).

Оценив его порядок, мы теперь перейдем к оценке главной части, т.е. суммы $W_{m,n}$ из (2.6). Оценивая эту сумму по модулю ее слагаемых, получаем из (2.6) неравенство:

$$W_{m,n}(s) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tau(m)\cdot\tau(n)\cdot(\sqrt{\varkappa_j})^{-1}}{(\sigma-1/2+|t-\varkappa_j|)(1+|t-\varkappa_j|)}. \tag{2.11}$$

Не нарушая общности можно считать, что $t \geqslant 0$, т.к. при $t \leqslant 0$ суммы $W_{m,n}$ и $\overline{W_{m,n}}$ меняются местами.

Главной частью суммы (2.11) является интервал суммирования $|t-\varkappa_j| \leqslant 1$; при этом можно считать, что $t \geqslant 3$, т.к. оставшийся интервал $(0 \leqslant t \leqslant 3)$ тривиален с точки зрения порядка по t.

Для этой части суммы (2.11) получаем оценку:

$$\sum_{|t-\varkappa_j|\leqslant 1} (\,\cdot\,) \ll \tau(m)\cdot\tau(n)\cdot\tfrac{\sqrt{t}}{(\sigma-1/2)}\log t. \tag{2.12}$$

Для бесконечного “хвоста” суммы (2.11) с условием $\varkappa_j \geqslant 3/2t$ справедлива оценка:

$$\sum_{\varkappa_j\geqslant 3/2t} (\,\cdot\,) \ll \tfrac{\tau(m)\cdot\tau(n)}{\sqrt{t}}. \tag{2.13}$$

Оставшуюся часть суммы (2.11) с условиями $\varkappa_j \in (0, 3/2t)$ и $|t-\varkappa_j| \geqslant 1$, разделим на две части. К части I отнесем интервал

$$\varkappa_j \in \left(0, \frac{1}{2}t\right), \tag{2.14}$$

для которого условие $|t-\varkappa_j| \geqslant 1$ выполняется по тривиальной причине.

К части II отнесем интервал

$$\left(\frac{1}{2}t \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{3}{2}t\right), \quad |t-\varkappa_j| \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Часть суммы (2.11) с условием (2.14) (но без коэффициента $\tau(m)\cdot\tau(n)$) не превосходит по своему порядку величины:

$$\frac{1}{t^2}\sum_{\varkappa_j\leqslant 1/2t} \frac{1}{\sqrt{\varkappa_j}} \ll \frac{1}{\sqrt{t}}. \tag{2.16}$$

Вместе с коэффициентом $\tau(m)\cdot\tau(n)$ она того же порядка, что и сумма (2.13).

Часть суммы (2.11) с условием (2.15) мы разобьем на “ящики” вида:

$$n \leqslant |t-\varkappa_j| \leqslant n+1, \quad 1 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}t.$$

В каждом из этих ящиков справедлива оценка

$$\left(\sqrt{\varkappa_j}\right)^{-1} \ll \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Поэтому часть суммы (2.11) с условием (2.15) (но без коэффициента $\tau(m)\cdot\tau(n)$) не превосходит суммы “ящиков” вида:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{1\leqslant n\leqslant 1/2t} \frac{1}{n^2} \sum_{n\leqslant|t-\varkappa_j|\leqslant n+1} \alpha_j. \tag{2.17}$$

Подставляя в (2.17) оценку (2.9), получаем для нее порядок $\sqrt{t}\cdot\log t$. Вместе с коэффициентом $\tau(m)\cdot\tau(n)$ получается величина порядка

$$\tau(m)\cdot\tau(n)\cdot\sqrt{t}\cdot\log t. \tag{2.18}$$

Эта величина не превосходит правой части (2.12), т.к.

$$\sigma \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right].$$

Следовательно, среди оценок (2,12)–(2.18) величина (2.12) имеет максимальный порядок, поэтому она и дает общую оценку для $W_{m,n}$:

$$W_{m,n}(s) \ll \tau(m)\cdot\tau(n)\cdot\frac{\sqrt{|s|}}{(\sigma-1/2)}\cdot\log(|s|+1). \tag{2.19}$$

Заменив в правой части (2.19) параметр $t=\operatorname{Im} s$ величиной $|s|$, мы тем самым включили в оценку (2.19) и начальный интервал $0\leqslant|t|\leqslant 3$, т.к. по условию $\operatorname{Re} s=\sigma>1/2$.

Подставляя (2.19) и (2.7) в (2.5), получаем общую оценку для дискретной части исходного интеграла

$$J_{m,n}^{\mathrm{disc}}(s) \ll \tau(m)\cdot\tau(n)\left[\frac{\sqrt{|s|}}{(\sigma-1/2)}+\sqrt{m\cdot n}\right]\log^2(|s|+1). \tag{2.20}$$

Из этой оценки видно, что она становится оптимальной при $m = n = 1$.

Для двух других компонент правой части (1.11) получаем оценку, используя их явный вид в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ (см. [6]):

$$J_{m,n}^{\mathrm{con}}(s) + J_{m,n}^{\mathrm{cusp}}(s) \ll \tau(m) \cdot \tau(n) \cdot \log^2(|s| + m + n). \tag{2.21}$$

Оценки (2.20) и (2.21), подставленные в (1.11), приводят к окончательной оценке Z-функции Сельберга в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 1/2$:

$$Z_{m,n} \ll \frac{\sqrt{|s|}}{(\sigma - 1/2)} \cdot \log^2(|s| + 1). \tag{2.22}$$

Константа в оценке (2.22) зависит от m и n. Отметим, что во всех предыдущих случаях константы в оценках были абсолютные, с явной зависимостью от трех параметров $(m, n, |s|)$. Поэтому зависимость константы в (2.22) от (m, n) эффективная. Из оценки (2.22) получается оценка Гольдфельда–Сарнака [5] по принципу выпуклости.

§3. Мероморфная гипотеза Линделёфа

Из оценки (2.22) следует та скорость, с которой $Z_{m,n}(s) \to \infty$, когда $(\sigma - 1/2) \to +0$. Эта скорость зависит от оценки остатка в теореме 6, (см. [6]), которую мы приведем здесь для параметра $n = 1$.

Теорема 6 [6]. *Для любого $t \geqslant 3$ справедливо асимптотическое равенство:*

$$\sum_{\varkappa_j \leqslant t} \alpha_j = \frac{1}{\pi^2} t^2 + O(t \cdot \log t). \tag{3.1}$$

Напомним, что $\alpha_j = |\rho_j(1)|^2 / \mathrm{ch}\, \pi \varkappa_j$. Равенство (3.1) можно рассматривать как весовую асимптотику Германа Вейля, классический вид которой мы также приведем для сравнения с (3.1).

Теорема (Герман Вейль). *Для дискретной группы $SL(2, \mathbb{Z})$ при любом $t \geqslant 3$ справедливо асимптотическое равенство:*

$$\sum_{\varkappa_j \leqslant t} 1 = \frac{1}{12} \cdot t^2 + O(t \cdot \log t). \tag{3.2}$$

Сравнение главных членов правых частей (3.1) и (3.2) показывает, что в среднем $\alpha_j \cong 12/\pi^2$.

В асимптотике (3.2) сейчас выделен второй главный член [7]:

$$\sum_{\varkappa_j \leqslant t} 1 = \frac{1}{12} \cdot t^2 + t \cdot f(\log t) + O\left[t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)^{1/2}\right], \qquad (3.3)$$

где $f(x) = ax + b$, с явными коэффициентами a и b.

Отметим, что асимптотика (3.3) выписана в [7] на языке собственных чисел $\lambda_j \leqslant X$, в то время, как в (3.3) она переведена на язык параметра $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$, который используется в этой работе. Но принципиальной разницы здесь нет. Отличие только в нормировке интервала суммирования с которым мы работаем. Чтобы перевести асимптотику (3.3) обратно на язык работы [7] надо заменить параметр t в правой части (3.3) исходя из равенства: $t = \sqrt{X - 1/4}$. Некоторые наводящие соображения говорят в пользу гипотезы о том, что истинный остаток в правой части (3.3) имеет порядок

$$t^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \qquad (3.4)$$

с любым фиксированным $\varepsilon > 0$.

Другими словами, можно предположить, что для суммы в левой части (3.3) справедлива гипотеза типа проблемы круга с двумя членами асимптотики и остатком вида (3.4).

Эта аналогия становится более четкой, если перейти с языка параметра $\varkappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$ на язык собственных чисел $\lambda \leqslant X$, т.е. на язык работы [7]. В этом случае остаток (3.4) будет заменен величиной порядка

$$X^{\frac{1}{4}+\varepsilon}, \qquad (3.5)$$

что в точности совпадает с гипотетическим остатком в проблеме круга.

Асимптотики (3.1) и (3.2) тесно связаны между собой (см. по этому поводу [11]). Поэтому гипотетические соображения об остатке (3.4) в асимптотике (3.3) точно также относятся и к асимптотике (3.1). Для нее также можно предположить справедливость гипотезы типа проблемы круга:

$$\sum_{\varkappa_j \leqslant t} \alpha_j = \frac{1}{\pi^2} t^2 + t \cdot f_1(\log t) + O\left(t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right), \qquad (3.6)$$

где $f_1(x) = a_1x + b_1$ с другими коэффициентами a_1 и b_1, нежели $f(x)$ из (3.3).

Если исходить из равенства (3.6), тогда оценку (2.22) можно существенно усилить при $(\sigma-1/2)\to+0$. Для этого следует заметить, что из (3.6) следует не тривиальная оценка для количества $\varkappa_j$ в малых "ящиках" вида:

$$a_k(t) = \sum_{\frac{k}{\sqrt{t}}\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant\frac{k+1}{\sqrt{t}}} \ll t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad 0\leqslant k\leqslant\sqrt{t}. \tag{3.7}$$

Оценка (3.7) позволяет изменить оценку суммы (2.12). Для этого сначала разобьем сумму (2.12) на малые "ящики":

$$\sum_{0\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant1}(\,\cdot\,)\leqslant\sum_{0\leqslant k\leqslant\sqrt{t}}\ \sum_{\frac{k}{\sqrt{t}}\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant\frac{k+1}{\sqrt{t}}}(\,\cdot\,). \tag{3.8}$$

Дальше заметим, что для k-го "ящика" правой части (3.8) справедлива оценка:

$$\sum_{\frac{k}{\sqrt{t}}\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant\frac{k+1}{\sqrt{t}}}(\,\cdot\,)\ll\frac{a_k(t)}{(\sigma-1/2)\sqrt{t}+k}, \tag{3.9}$$

где $a_k(t)$ определено в (3.7).

Подставляя (3.9) в (3.8) и выделяя нулевой "ящик" при $k=0$, приведем оценку (3.8) к новому виду

$$\sum_{0\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant1}(\,\cdot\,)\ll\frac{a_0(t)}{(\sigma-1/2)\sqrt{t}+x}+\sum_{k=1}^{\sqrt{t}}\frac{a_k(t)}{k}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.7) в (3.10) приведем оценку (2.12) к новому виду:

$$\sum_{0\leqslant|\varkappa_j-t|\leqslant1}(\,\cdot\,)\ll t^{\varepsilon}\left[\left(\sigma-\tfrac{1}{2}\right)^{-1}+\sqrt{t}\right]. \tag{3.11}$$

Остальные оценки, начиная с (2.13), остаются теми же самыми. Поэтому оценка (2.19) принимает точный вид:

$$W_{m,n}(s)\ll t^{\varepsilon}\cdot\left[\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^{-1}+\sqrt{t}\right]. \tag{3.12}$$

Константы в оценках (3.10), (3.11) и (3.12) зависят от параметров m и n.

Аналогично уточняется и оценка (2.22):

$$Z_{m,n}(s) \ll |s|^{\varepsilon}\left[\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^{-1}+\sqrt{|s|}\right]. \qquad (3.13)$$

Из оценки (3.13) следует, что в узком интервале, рядом с критической прямой:

$$0<\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{|s|}} \qquad (3.14)$$

для Z-функции Сельберга справедлива мероморфная гипотеза Линделёфа

$$Z_{m,n}(s) \ll \frac{|s|^{\varepsilon}}{(\sigma-1/2)}. \qquad (3.15)$$

Напомним, что оценка (3.15) является следствием гипотетической асимптотики (3.6).

Литература

1. Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators.* Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm 1963, pp. 270–284.
2. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* Proc. Sympos. Pure Math., V. 8. Number Theory. Providence, R. T., Am. Math. Soc. (1965), pp. 1–15.
4. H. D. Kloosterman, *On the representation of number in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. — Acta Math. **49** (1926), 407–464.
5. D. Goldfeld, P. Sarnak, *Sums of Kloosterman sums.* — Invent. Math. **71** (1983), 243–250.
6. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. I. Сумма сумм Клоостермана.* — Мат. Сб. **111**, No. 3 (1980), 334–383.
7. Н. В. Кузнецов, *Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа на фундаментальной области модулярных групп.* Препринт ДВНЦ АН СССР 1978.
8. J.-M. Deshouillers, H. Jwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70,** No. 2 (1982), 219–283.
9. А. И. Виноградов, *Z-функция Сельберга. Локальный подход.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **260**, (1999), 298–316.
10. А. И. Виноградов, *Гипотеза Петерсона для нулевого веса. I.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **249**, (1997), 118–153; II. Internet www PdmI.ras ru |Preprint| 1999/index html, No. 18.
11. А. И. Виноградов, *Свертки Ранкина и ряды Дирихлею I.* Internet www PdmI.ras ru |Preprint| 1999/index html, No. 15 I.

Vinogradov A. I. The Selberg Z-function and the Lindelöf conjecture.

It is proved that, under some assumptions, the Selberg Z-function $Z(s)$ is of order $t^\varepsilon/(\sigma - \frac{1}{2})$ in a sufficiently small neighborhood of the critical straight line $\sigma > \frac{1}{2}$, $t \geqslant 1$, and $\varepsilon > 0$ is an arbitrary small but fixed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 24 декабря 1999 г.