Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш

СИММЕТРИИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ ЯНГА–БАКСТЕРА И УРАВНЕНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ

**Посвящается светлой памяти
нашего друга
Анатолия Георгиевича Изергина**

1. Введение

Два десятилетия развития квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗ) показали универсальную мощь этого метода при решении интегрируемых моделей и исследовании широкого спектра математических структур связанных с ними. Примерами интегрируемых моделей являются различные интегрируемые спиновые цепочки, параметризованные (супер)алгебрами Ли, их представлениями, параметрами деформации [1]. В качестве основных математических структур достаточно указать известные квантовые группы (квазитреугольные алгебры Хопфа, возникающие в рамках интегрируемых моделей) [2, 3].

В настоящее время имеется большое число лекций обзорного характера, освещающих различные аспекты квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗ) и целый ряд монографий (*например*, [1–9]), которые практически не пересекаются по своему содержанию из-за обширности области активных исследований по этой проблематике. Различные физические явления описываются моделями интегрируемыми КМОЗ и обладающими изощрёнными симметриями (укажем только сверхпроводимость и модель Хаббарда, (см., например, [10, 11])).

В рамках КМОЗ плодотворно взаимодействует большое многообразие методов и результатов современной математической физики. В него, в частности, органически входят разнообразные

Работа выполнялась при поддержке Российского Фонда Фудаментальных исследований, гранты 98-01-00310, 00-01-00500.

математические разделы: группы и алгебры Ли (в том числе и бесконечномерные), теория представлений и теория деформаций, группы кос и топология, алгебраическая и некоммутативная геометрии *и т.д.*

Приводимый краткий обзор, который можно рассматривать как продолжение [12], имеет две цели:

1. ввести / напомнить основные понятия КМОЗ;
2. указать некоторые недавние достижения в рассматриваемой области.

Одним из таких достижений последних лет является активное применение процедуры твистования квантовых групп. Будучи преобразованием подобия копроизведения Δ алгебры Хопфа $\mathcal{A}$:

$$\Delta \longrightarrow \Delta_t = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}, \qquad \mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}\,,$$

элемент твиста (скручивания) преобразует универсальную R-матрицу $\mathcal{R}$ несколько отличным образом $\mathcal{R}_t = \mathcal{F}_{21}\mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}$. В результате соответствующие интегрируемые модели могут иметь существенно различные свойства. Преобразование твиста успешно применяется к вычислению корреляционных функций [13], и для установления связи эллиптических квантовых групп и квантовых аффинных алгебр [14].

Дальнейшее развитие получил метод разделения переменных в рамках КМОЗ [15] с квантовым преобразованием Бесклунда в качестве каноничесого преобразования с Q-оператором Бакстера, связанного с порождающей функции [16].

Активно обсуждались в последнее время и многомерные обобщения отдельных частей КМОЗ (уравнение тетраэдра, его решения и модели), например фунциональные решения [17], многомерное уравнение отражения [18].

Среди важнейших понятий КМОЗ (см., например, [1, 4, 8, 12]) укажем:

1. **Уравнение Янга–Бакстера** и **R-матрица** (обычно как $n^2 \times n^2$ матрица, рассматриваемая как оператор в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, и иногда, как чисто алгебраический объект $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$)

$$R_{1\,2}(u-v)R_{1\,3}(u)R_{2\,3}(v) = R_{2\,3}(v)R_{1\,3}(u)R_{1\,2}(u-v)\,.$$

2. **Алгебра Янга–Бакстера** или **FRT-соотношение** для матрицы монодромии $T(u)$

$$R_{1\,2}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{1\,2}(u-v),$$

порождающее чисто алгебраическое описание интегрируемых моделей с использованием элементов $T_{ij}(u)$ (обычно с (квази)периодическими граничными условиями). Здесь используются стандартные для КМОЗ обозначения: $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$.

3. **L-оператор** $L(u)$ ($n \times n$-матрица с операторозначными элементами), который может совпадать с R-матрицей, и определяет локальную реализацию FRT-соотношения в узле цепочки или в точке одномерного пространства. Так же как и матрица монодромии, соответствующая одному узлу, L-оператор удовлетворяет FRT-соотношению, а $T(u)$ для цепочки определяется как упорядоченное произведение L-операторов
$$T^{(N)}(u) = L_N(u) L_{N-1}(u) \ldots L_1(u)\,,$$
или как P-экспонента в случае непрерывного пространства.
4. **Трансфер матрица** $t(u) = \operatorname{tr} T(u)$ (или $\operatorname{tr} MT(u)$ с подходящей матрицей M) является **порождающей функцией** для интегралов движения рассматриваемой модели
$$[t(u), t(w)]\,,$$
например, гамильтониана $H \simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \ln t(u)\big|_{u=u_0}$. Алгебра Янга–Бакстера порождаемая элементами $T_{ij}(u)$ может рассматриваться и использоваться как (скрытая или даже динамическая) симметрия соответствующей интегрируемой модели. Для конечного числа узлов $t(u)$ порождает (квази)периодические граничные условия.
5. Более общие непериодические граничные условия обычно получаются из **алгебры уравнения отражения**
$$\begin{aligned} &R_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)R_{21}(u+v)\mathcal{T}_2(v) = \\ &= \mathcal{T}_2(v)R_{21}(u+v)\mathcal{T}_1(u)R_{12}(u-v). \end{aligned} \tag{2}$$
Матрица монодромии Склянина $\mathcal{T}(u) = T(u)K(u)T(-u)^{-1}$ может быть построена при использовании матрицы монодромии $T(u)$ (1) и решения уравнения отражения (2) ($n \times n$ матрица $K(u)$). Для выделения интегралов движения в модели с непериодическими граничными условиями конструируется трансфер матрица вида
$$\tau(u) = \operatorname{tr} K^{(+)}(u)\mathcal{T}(u) = \operatorname{tr} K^{(+)}(u)T(u)K(u)T(-u)^{-1}, \tag{3}$$

где $K^{(+)}(u)$ произвольное решение “сопряжённого” уравнения отражения [19], определяемого так чтобы гарантировать коммутативность $[\tau(u), \tau(v)] = 0$.

6. Собственные значения и собственные функции трансфер матрицы $t(u)$ или $\tau(u)$ получают применением различных вариантов **Анзаца Бёте**: координатный, алгебраический, функциональный, реккурентный, иерархический Анзац Бёте, *и т.д.*. Эта сложная техника является частью ещё не до конца развитой теории представлений алгебр Янга–Бакстера.

К приведённому списку можно добавить много дополнительных пунктов. Например, алгебра Замолодчикова–Фаддеева, сплетающие векторы, связывающие вершинные модели с IRF-моделями, Q-оператор Бакстера, *и т.д.*. Модели, гамильтонианы и высшие интегралы которых симметричны относительно квантовой группы, обычно имеют непериодические граничные условия [20, 21]. Однако имеется возможность сохранить периодичность при использовании специфических топологических построений [22]. Хорошо известна связь уравнения Янга–Бакстера и уравнений отражения с группами отражений Кокстера. Было бы интересно установить полезные алгебраические структуры и для других групп Кокстера (*см.* [23]).

Для того чтобы привести некоторые простые явные формулы мы начнем с рассмотрения твистования конечномерных (супер)алгебр Ли и постоянных решений уравнения Янга–Бакстера.

2. Твист алгебр Хопфа

Напомним определение твиста алгебр Хопфа. Алгебра Хопфа $\mathcal{A}(m, \Delta, \varepsilon, S)$ с умножением $m: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, копроизведением $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, коединицей $\varepsilon: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, и антиподом $S: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (см. определения в [2, 3]) может быть преобразована с помощью обратимого элемента $\mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{F} = \sum f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}$ в твистованную алгебру Хопфа $\mathcal{A}_t(m, \Delta_t, \varepsilon, S_t)$ [22]. Эта алгебра Хопфа $\mathcal{A}_t$ имеет те же самые отображения умножения и коединицы и твистованные копроизведение и антипод

$$\Delta_t(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1}, \quad S_t(a) = vS(a)v^{-1},$$
$$v = \sum f_i^{(1)} S(f_i^{(2)}), \quad a \in \mathcal{A}.$$

Твист $\mathcal{F}$ должен удовлетворять уравнениям

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}\,)(\mathcal{F}) = (\mathrm{id}\, \otimes \varepsilon)(\mathcal{F}) = 1, \tag{4}$$

$$\mathcal{F}_{12}(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{23}(\mathrm{id}\, \otimes \Delta)(\mathcal{F}). \tag{5}$$

Квазитреугольная алгебра Хопфа $\mathcal{A}(m, \Delta, \varepsilon, S, \mathcal{R})$ дополнительно имеет универсальную R-матрицу $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ [2], связывающую копроизведение Δ с противоположным копроизведением Δ^{op} преобразованием подобия

$$\Delta^{op}(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}, \quad a \in \mathcal{A}\,.$$

Твистованная квазитреугольная квантовая алгебра Хопфа $\mathcal{A}_t(m, \Delta_t, \varepsilon, S_t, \mathcal{R}_t)$ имеет твистованную универсальную R-матрицу

$$\mathcal{R}_t = \tau(\mathcal{F})\,\mathcal{R}\,\mathcal{F}^{-1}\,, \qquad \tau(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{2\,1} = \sum f_i^{(2)} \otimes f_i^{(1)}\,, \tag{6}$$

где τ обозначает перестановку тензорных множителей.

Заметим, что можно определить композицию подходящих твистов $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$. Элемент $\mathcal{F}_1$ должен удовлетворять уравнению твиста с копроизведением исходной алгебры Хопфа, тогда как $\mathcal{F}_2$ должно быть решением этого уравнения с копроизведением Δ_{t_1} промежуточной алгебры Хопфа, твистованной элементом $\mathcal{F}_1$. В частности, если $\mathcal{F}$ даёт решение уравнения твиста (5), то $\mathcal{F}^{-1}$ удовлетворяет этому уравнению но с $\Delta \to \Delta_t$. Твист определяет отношение эквивалентности на множестве алгебр Хопфа.

Важный подкласс факторизованных твистов состоит из твистующих элементов, удовлетворяющих уравнениям

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}\,, \tag{7}$$

$$(id \otimes \Delta_t)(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\,. \tag{8}$$

Приведём несколько примеров твистующих элементов для универсальных обёртывающих алгебр некоторых (супер)алгебр Ли.

Жорданов твист алгебры Ли $sl(2)$ с генераторами h, X : $[h, X] = 2X$ определется элементом $\mathcal{F}$ [25] вида

$$\mathcal{F}^{(j)} = \exp\left(\frac{1}{2} h \otimes \ln(1 + 2\xi\, X)\right) = e^{h\otimes\sigma}. \tag{9}$$

Так как картановский элемент h примитивен в $sl(2) : \Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes h$, а σ примитивен в жордановой алгебре $\mathcal{U}_\xi(sl(2)) : \Delta_t(\sigma) =$

$\sigma\otimes 1+1\otimes\sigma$, то уравнение твиста (коцикла) (5) выполнено, также как и уравнения (7) и (8).

Расширенный жорданов твист для $sl(N)$ [26]. Можно показать, что элемент $\mathcal{F}^{(j)}$ (9) может быть расширен дополнительным множителем $\mathcal{F}^{(ej)}=\mathcal{F}^{(e)}\mathcal{F}^{(j)}$ до твиста универсальной обёртывающей алгебры Ли $sl(N)$. Для $\mathcal{U}(sl(N))$ твистующий элемент $\mathcal{F}^{(ej)}$ можно выбрать в виде

$$\mathcal{F}^{(ej)}=\mathcal{F}^{(e)}\mathcal{F}^{(j)}=\exp\left(H_{1N}\otimes\sigma\right)\prod_{j=2}^{N-1}\exp\left(2\xi E_{1j}\otimes E_{jN}e^{-2\sigma}\right)\,,$$

где

$$H_{1N}=E_{11}-E_{NN},\quad \sigma=\frac{1}{2}\ln(1+2\xi\, E_{1N}).$$

Этот твист универсальной обёртывающей алгебры $\mathcal{U}(sl(N))$ порождается твистом алгебры $\mathcal{U}(\mathbf{B}^\vee)$ (здесь $\mathbf{B}^\vee$ ограниченная борелевская подалгебра алгебры Ли $sl(N)$ с базисом

$$\{H_{1N},E_{1N},E_{1j},E_{jN}\}_{j=2,\ldots,N-1}),$$

что порождает алгебру Хопфа $\mathcal{U}_\xi(\mathbf{B}^\vee)$ с исходными перестановочными соотношениями (умножением), но с твистованным копроизведением $\Delta_t(E_{i\,j})$, которое можно записать явно в виде конечных сумм из $E_{i\,j}$ и $\exp(\pm\sigma)$ [26]. Возможно также значительное усложнение твистов такого типа при росте ранга алгебры Ли [27].

Твист супералгебры $osp(1|2)$. Квазитреугольная супералгебра Хопфа $\mathcal{U}_q(osp(1|2))$ порождается тремя элементами $\{h,v_-,v_+\}$ (h – чётный, $v_\pm$ – нечётные), подчиняющимися, так же как и в случае универсальных обёртывающих алгебр для $osp(1|2)$ $sl(2)$, соотношениям

$$[h,v_\pm]=\pm\,v_\pm,\quad [v_+,v_-]=-\frac{1}{4}\,(q^h-q^{-h})/(q-q^{-1}), \tag{10}$$

где коммутатор $[\,,]$ понимается как Z_2-градуированный

$$[a,b]=ab-(-1)^{p(a)p(b)}ba,$$

где $p(a)=0,1$ четность элемента. Копроизведение имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_q(h)&=h\otimes 1+1\otimes h,\\ \Delta_q(v_\pm)&=v_\pm\otimes q^{h/2}+q^{-h/2}\otimes v_\pm.\end{aligned} \tag{11}$$

Перестановочные соотношения супералгебры Ли $osp(1|2)$ следуют из (10) в пределе $q \to 1$ и при добавлении $X_\pm = \pm 4(v_\pm)^2$ в качестве генераторов супералгебры Ли. Отметим, что тогда как $sl(2)$ вложена в $osp(1|2)$, аналогичное вложение алгебры $sl_q(2)$ в $osp_q(1|2)$ отсутствует.

Жорданов твист $\mathcal{F}^{(j)}$ (9) сохраняя алгебраические соотношения между генераторами универсальной обёртывающей алгебры $\mathcal{U}(osp(1|2))$, порождает новое копроизведение Δ_j [28]

$$\begin{aligned} \Delta_j(h) &= h \otimes e^{-2\sigma} + 1 \otimes h, \\ \Delta_j(v_+) &= v_+ \otimes e^{\sigma} + 1 \otimes v_+, \\ \Delta_j(v_-) &= v_- \otimes e^{-\sigma} + 1 \otimes v_- + \xi\, h \otimes v_+ e^{-2\sigma}. \end{aligned} \tag{12}$$

Процедура сжатия из [25], применённая к R-матрице супералгебры $osp_q(1|2)$, приводит к элементу твиста $\mathcal{F}^{(sj)}$ с дополнительным вкладом, связанным с нечётным генератором v_+. Этот твистующий элемент факторизуется $\mathcal{F}^{(sj)} = \mathcal{F}^{(s)}\mathcal{F}^{(j)}$. Супертвистующий элемент $\mathcal{F}^{(s)}$ имеет вид

$$\mathcal{F}^{(s)} = \exp\left(-2\xi\,(v \otimes v)\,\varphi(\sigma \otimes 1\,, 1 \otimes \sigma)\right)\,,$$

где $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ функция, симметричная по своим аргументам, которая может быть определена последовательно, порядок за порядком, из сплетающего соотношения $\mathcal{F}^{(s)}\Delta_j(v_+) = \Delta_{s\,j}(v_+)\mathcal{F}^{(s)}$ [28].

Постоянные решения уравнения Янга–Бакстера в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, $n = 2, 3$ найдены в [29]. Обсуждение их канонического вида ограничивается преобразованием подобия вида $R \to Ad(M)^{\otimes 2} R$, (кограничный твист) [4]. Возможно существующие твисты достаточно общего вида, связывающие эти решения, могут значительно уменьшить число независимых решений. В частности, три постоянные R-матрицы, связанные с бозонизированным вариантом q-деформированной алгебры $gl(1|1)$, порождают несколько различающиеся свободные фермионные модели (см. ниже).

Ввиду вложимости универсальных обёртывающих алгебр $\mathcal{U}(g)$ в соответствующие янгианы $\mathcal{Y}(g)$ имеется возможность твистовать эти янгианы путём построения универсальных элементов $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(g)^{\otimes 2}$. Эта техника порождает конкретные дополнительные деформации интегрируемых моделей [30]. Используя твист можно регуляризовать предельные переходы от эллиптических R-матриц к тригонометрическим при сохранении сплетающих векторов [31]. Для бесконечномерных квантовых групп также известны твисты явного вида *см., например,* [14, 32].

3. Применение твиста к интегрируемым моделям

Универсальный элемент твиста $\mathcal{F}$ определяет преобразование подобия для любого числа итераций копроизведений

$$\Delta_t = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}\,, \qquad \Delta_t^{(n)} = \Omega^{(n)}\Delta^{(n)}\left(\Omega^{(n)}\right)^{-1}\,,$$

где $\Delta^{(2)} = \Delta$, $\Delta^{(3)} = (\Delta \otimes \mathrm{id}\,)\,\Delta$, и т.д., так что $\Delta^{(n)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\otimes n}$ и

$$\Omega^{(3)} = \mathcal{F}_{1\,2}\,(\Delta \otimes \mathrm{id}\,)\,\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1\,2}\mathcal{F}_{1\,2,\,3}\,,$$
$$\Omega^{(n)} = \Omega^{(n-1)}\,(\Delta^n \otimes \mathrm{id})\,\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1\,2}\mathcal{F}_{1\,2,\,3}\cdots\mathcal{F}_{1\,2\ldots\,n-1,\,n}\,.$$

Уравнение твиста (коцикла) порождает много идентичных выражений для $\Omega^{(n)}$. В частности, твистованная $\widehat{R}^{(t)}_{i\,i+1}$ и исходная $\widehat{R}_{i\,i+1}$ R-матрицы связаны преобразованием подобия порождаемым как $F_{i\,i+1} = (\rho_i \otimes \rho_{i+1})\mathcal{F}$ так и $M^{(n)} = (\prod_{i=1}^{n} \otimes \rho_i)\,\Omega^{(n)}$ Следовательно, гамильтонианы интегрируемых моделей со свободными концами, связанных преобразованием твиста, подобны

$$H_n^{(t)} = \Omega^{(n)} H_n (\Omega^{(n)})^{-1} = Ad(\Omega^{(n)}) H_n.$$

Используя взаимнооднозначное соответствие решений Z_2-градуированного варианта супер уравнения Янга–Бакстера с решениями обычного [4], рассмотрим постоянное решение уравнения Янга–Бакстера, получаемое из универсальной R-матрицы квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(gl(1|1))$ подходящим твистом $\mathcal{F}$

$$\widehat{R}(q,\xi) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & q^{-1} & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}\,, \quad \omega = q - q^{-1}\,, \xi \in \mathbb{C}.$$

Твист $\mathcal{F}$ универсальной R-матрицы универсальной обёртывающей алгебры $\mathcal{U}_q(gl(1|1))$ порождается центральным элементом c и h, $X_\pm$, и задаётся действием твиста $\mathcal{F}^{(1)} = \exp(\alpha c \otimes h)$, сказывающимся на примитивности $\Delta(X_-)$, и последующим применением твиста $\mathcal{F}^{(2)} = exp(\xi X_- \otimes X_-)$. Эта R-матрица записана в виде $\widehat{R} = \mathcal{P}\widehat{R}$, связанном с группой кос, и удовлетворяет уравнению

$$\widehat{R}_{1\,2}\widehat{R}_{2\,3}\widehat{R}_{1\,2} = \widehat{R}_{2\,3}\widehat{R}_{1\,2}\widehat{R}_{2\,3}\,.$$

Она удовлетворяет также условию Гекке–Ивахори $\widehat{R}^2 = \omega\widehat{R} + I$,. Следовательно, процедура бактеризации приводит к решению уравнения Янга–Бакстера в форме, соотношения из группы кос и содержащему спектральный параметр

$$\widehat{R}(u;q,\xi) = u\widehat{R}(q,\xi) - \frac{1}{u}\widehat{R}^{-1}(q,\xi)\,.$$

L-оператор для соответствующей интегрируемой цепочки спинов совпадает с R-матрицей

$$R(u;q,\xi) = \mathcal{P}\widehat{R} = \begin{pmatrix} a(u) & & & \\ & qb(u) & \omega u^{-1} & \\ & u\omega & b(u)q^{-1} & \\ \xi b(u) & & & d(u) \end{pmatrix},$$

где $a(u) = uq - (uq)^{-1}$, $b(u) = u - u^{-1}$, $d(u) = q/u - u/q$. Хотя эта R-матрица не квазиклассическая, она всё ещё регулярна [4], т.е. $R(\pm1) \sim \mathcal{P}$, и соответствующие интегралы движения локальны, например, $H = \sum_n h_{nn+1}$,

$$h_{nn+1} = \mathcal{P}\frac{dR}{du}(1) = 2\left(q\sigma^+_{n+1}\sigma^-_n + +\frac{1}{q}\sigma^-_{n+1}\sigma^+_n\right) +$$

$$+q\sigma^z_n + \frac{1}{q}\sigma^z_{n+1} + 2\xi\sigma^-_n\sigma^-_{n+1}.$$

Отсутствие квадратичных по σ^z_n членов означает, что мы имеем дело с моделью свободных фермионов: после применения преобразования Йордана–Вигнера гамильтониан H описывается квадратичной формой по фермиевским операторам c_n, $c^\dagger_n$. Этот гамильтониан можно диагонализовать преобразованиями Фурье и Боголюбова, однако мы будем следовать рецепту КМОЗ [1, 4, 8]. Используя локальные L-операторы $L_{an}(u)$, можно построить матрицу перехода (монодромии) $T^{(N)}(u)$, соответствующую цепочке с N узлами,

$$T^{(N)}(u) = L_{aN}(u)L_{aN-1}(u)\ldots L_{a1}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},$$

где $A(u),\ldots,D(u)$ операторы в пространстве состояний N спинов: $\otimes_{n=1}^N C^2$.

Как и в XXX_ξ случае, модель связана с твистованным янгианом $\mathcal{Y}_\xi(sl(2))$ [30]. Неэрмитов член $\xi\sigma^-_n\sigma^-_{n+1}$ не влияет на спектр гамильтониана и трансфер матрицы $t(u) = \operatorname{tr} T^{(N)}(u) = A(u) + B(u)$:

$$\operatorname{spec} t(u; q, \xi) = \operatorname{spec} t(u; q, 0).$$

В модели отсутствует вырождение голого вакуума для $\xi \neq 0$,

$$\Omega = \otimes_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_n , \quad A(u)\Omega = (qb(u))^n \Omega, \quad D(u)\Omega = (d(u))^n \Omega.$$

Собственные значения трансфер матрицы имеют вид

$$\Lambda(u; \{v_j\}) = (qb(u))^N \prod_j \frac{a(u/v_j)}{qb(u/v_j)} + (d(u))^N \prod_j \frac{d(v_j/u)}{qb(v_j/u)}.$$

Введя аддитивные переменные $q = e^\gamma$, $u = e^\lambda$, $v = e^\nu$ и используя явный вид функций $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$, $d(u)$, получаем

$$\Lambda(\lambda; \{\nu_j\}) = \big(2q \sinh^N(\lambda + \gamma) +$$

$$+ (-1)^M 2q \sinh^N(\lambda - \gamma)\big) \prod_j^M \frac{\sinh(\lambda - \nu_j + \gamma)}{q \sinh(\lambda - \nu_j)}.$$

Квази-импульсы ν_j, $j = 1, 2, \ldots, M$ удовлетворяют уравнению Бёте

$$\left(\frac{q \sinh(\nu_j + \gamma)}{\sinh(\gamma - \nu_j)} \right)^N = (-1)^{M+1}.$$

Соответствующие собственные векторы получаются действием операторов рождения $C(\nu_j)$ на голый вакуум Ω [1,4,8,30].

Довольно сложные уравнения Бёте с нетривиальной правой частью и с числом наборов квази-импульсов $(\nu_j^{(k)})_{j=1}^{M_k}$, $k = 1, 2, \ldots, \operatorname{rank} g$ равным рангу соответствующей простой (супер)алгебры Ли приведён в [33, 34]. Алгебраический анзац Бёте для эллиптических квантовых групп построен в [35].

Применяя процедуру бакстеризации к другому постоянному решению уравнения Янга–Бакстера, имеющему восемь ненулевых элементов [29]

$$\widehat{R} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega + 2 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & s & 0 \\ 0 & s & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 & \omega - 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \omega = q - \dfrac{1}{q} \\ s = q + \dfrac{1}{q} \end{matrix},$$

получаем R-матрицу, зависящую от спектрального параметра,

$$\widehat{R}(u,q) = u\widehat{R} - \frac{1}{u}\widehat{R}^{-1}\,.$$

Полученная R-матрица $R(u) = \mathcal{P}\widehat{R}$ $(u = \exp\lambda)$

$$R(u,q) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & \widetilde{a} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a &= \omega \mathrm{ch}\,\lambda + 2\mathrm{sh}\,\lambda\,, \\ \widetilde{a} &= \omega \mathrm{ch}\,\lambda - 2\mathrm{sh}\,\lambda\,, \\ b &= s\mathrm{sh}\,\lambda\,, \\ c &= \omega \mathrm{ch}\,\lambda\,, \end{aligned}$$

тоже регулярна $(R(\pm 1, q) \sim \mathcal{P})$. В силу условия Гекке для $\widehat{R}$ плотность гамильтониана $h_{n\,n+1}$ совпадает с $\widehat{R}_{n\,n+1}$ и с точностью до постоянного члена равна

$$h_{n\,n+1} = \sigma_n^z + \sigma_{n+1}^z + q\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + \frac{1}{q}\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y\,,$$

так что снова получаем вариант известной модели свободных фермионов.

Несмотря на неэрмитовость большинства гамильтонианов, получающихся в результате твистования, они находят применение при описании нестационарных процессов с несохранением частиц [36, 37].

Более сложные спиновые модели соответствуют универсальным твистующим элементам связывающим квантовые группы Дринфельда–Джимбо с квантовыми группами Кремера–Жерве [38, 39].

Литература

1. L. D. Faddeev, *How algebraic Bethe Ansatz works for integrable models.* In: Les Houches Session LXIV (1995), *Quantum symmetries*, eds A. Connes, K. Gawedzki and J. Zinn-Justin, Elsevie Science (1998) pp. 149–219.
2. V. G. Drinfeld, *Quantum Groups.* in: *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 798, Berkeley, California, Academic Press, New York (1986).
3. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, — Алгебра и Анализ **1** (1989) 178. Engl. transl.: Leningrad Math. J., **1** (1990) 193.
4. P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, — Lect. Notes Phys. **151** (1982) 69.
5. M. Jimbo (ed.), *Yang–Baxter Equation in Integrable Systems.* Singapore: WS (1990).
6. M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe.* Paris: Masson, (1983).

7. F. A. Smirnov, *Form factors in completely integrable models of quantum field theory*. Singapore, WS (1992).
8. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*. Наука, М. (1992).
9. M. Jimbo and T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*. Preprint CBMS/85N, (1994).
10. A. Montorsi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1730, Zap. Nauch. Semin. POMI **251** (1998) 69.
11. D. Arnaudon, *Algebraic approach to q-deformed supersymmetric variants of the Hubbard model with pair hopping*. Preprint ENSLAPP-A-650/97 (1997).
12. P. P. Kulish, *Yang–Baxter equation and reflection equations in integrable models*. Proc. Intern. Universitatswochen für Kern- und Teilchenphysik, Schladming, eds H. Grosse and L. Pittner, Springer-Verlag, (1996) 125.
13. J.-M. Maillet and J. Sanchez de Santos, *Drinfeld twists and algebraic Bethe Ansatz*. q-alg/9612012 (1996).
14. O. Babelon, D. Bernard, and E. Billey, — Phys. Lett. B. **375** (1966) 89.
M. Jimbo, H. Konno, S. Odake and J. Shiraishi, *Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups*. q-alg/9712029, (1997).
D. Arnaudon, E. Buffenoire, E. Ragoucy, and Ph. Roche, — Lett. Math. Phys. **44** (1998) 201.
15. E. K. Sklyanin, *Quantum inverse scattering method: selected topics*. In: *Quantum group and quantum integrable systems*, ed. M.-L. Ge, Singapore, WS, (1992).
E. K. Sklyanin, — Comm. Math. Phys. **142** (1992) 123.
16. V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin, — J. Phys. A. **31** (1998) 2241.
17. Р. Кашаев, И. Корепанов, С. Сергеев, — ТМФ **117** (1998) 370.
18. A. P. Isaev and P. P. Kulish, — Mod. Phys. Lett. **A12** (1997) 427.
19. P. P. Kulish and R. Sasaki, — Prog. Theor. Phys. **89** (1993) 741.
20. P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, — J. Phys. A. **A24** (1991) L435.
21. L. Mezincescu, R. I. Nepomechie, and V. Rittenberg, — Phys. Lett. A. **147** (1990) 70.
L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, — J. Phys. A. **24** (1991) L17.
L. Mezincescu and R. I. Nepomechie, — Int. J. Mod. Phys. **A 6** (1991) 5231; *ibid.* **A 7** (1992) 5657.
22. M. Karowski and A. Zapletal, — Nucl. Phys. **B419** (1994) 567.
23. M.-L. Ge and Q. Zhao, — Phys. Lett. **A175** (1993) 199.
24. В. Г. Дринфельд, — ДАН СССР **273** (1983) 531.
В. Г. Дринфельд, — Алгебра и Анализ **1** (1990) 1419.
25. M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, and S. Schack, In: *Quantum Groups. Proc. EIMI.* ed. P. P. Kulish 1990, *Lect. Notes Math.* **1510**, Springer-Verlag, (1992) 9.
O. V. Ogievetsky, In *Proc. Winter School Geometry and Physics*, Zidkov, *Suppl. Rendiconti cir. Math. Palermo, Serie II* No. 37 (1993) 185.
26. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, and A. I. Mudrov, — J. Math. Phys. **40** (1999) 4569.
27. P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, and M. A. del Olmo, — J. Phys. A. **32** (1999) 8671.
28. E. Celeghini and P. P. Kulish, — J. Phys. A. **31** (1998) L79.

P. P. Kulish, *Super-jordanian deformation of the orthosymplectic Lie superalgebras.* Preprint DFF 315/6/98 (1998), math.QA/9806104 (1998).

29. J. Hietarinta, — J. Math. Phys. **34** (1993) 1725.
H. Ewen and O. Ogievetsky, *Classification of $GL(3)$ quantum matrix groups.* Preprint MPI-PhT/94-93 (1993).
M. Gerstenhaber and A. Giaquinto, — Lett. Math. Phys. **44** (1998) 131.
30. P. P. Kulish and A. Stolin, — Czech. Jour. Phys. **47**, No. 1 (1997) 123; *ibid.* **47**, No. 12 (1997) 1207.
31. A. Antonov, K. Hasegawa and A. Zabrodin, — Nucl. Phys. B. **503** (1997) 747.
32. B. Enriquez and G. Felder, *A construction of Hopf algebra cocycles for the double Yangian $DY(SL_2)$.* q-alg/9703012 (1997).
33. P. P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin, — J. Phys. A. **16** (1983) L591.
34. E. Ogievetsky, N. Yu. Reshetikhin, and P. B. Wiegmann, — Nucl. Phys. **B280** (1987) 45.
35. G. Felder and A. Varchenko, *Algebraic Bethe ansatz for the elliptic quantum group $E_{\tau,\eta}(sl_2)$.* q-alg/9605024 (1996).
36. F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, and V. Rittenberg, — Ann. Phys. **230** (1994) 250.
37. H. Hinrichsen and V. Rittenberg, — Phys. Lett. B. **275** (1992) 350.
38. P. P. Kulish and A. I. Mudrov, — Lett. Math. Phys. **47** (1999) 137.
39. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. Чайчиан, — ТМФ **116**, No. 1 (1998) 101. q-alg/9712016.

Damaskinsky E. V., Kulish P. P. Symmetries related to Yang–Baxter equation and reflection equations.

The short review of some of the main achievements obtained recently in investigations of the symmetry properties of systems solved by the quantum inverse scattering methods and connected with the Yang–Baxter equation and reflection equations are reviewed. Special attention is devoted to the twist procedure. Twist relates three constant R-matrices corresponding to Lie super-algebra $gl(1|1)$.

Военный инженерный
технический университет

Поступило 28 февраля 2000 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН