Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов

О СТРУКТУРЕ КОГРАНИЧНЫХ R-МАТРИЦ КЛАССИЧЕСКИХ СЕРИЙ

**Посвящается светлой памяти
Анатолия Георгиевича Изергина**

1. Введение

Важным инструментом метода обратной задачи, как классической так и квантовой, является R-матрица, знание которой позволяет, в принципе, проинтегрировать ассоциированную с такой R-матрицей динамическую систему [1, 2]. В этом смысле поиск новых интегрируемых моделей связан с поиском новых R-матриц. В алгебраическом контексте R-матрица возникает как объект, определяющий почти кокоммутативную алгебру Хопфа [3]. Точнее, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta, \varepsilon, S)$ есть алгебра Хопфа с коумножением Δ, коединицей ε и антиподом S. Обозначим $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$ противоположное коумножение в $\mathcal{A}$, где τ оператор перестановки $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Обратимый элемент $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ такой, что

$$\Delta^{op} = \mathcal{R} \Delta \mathcal{R}^{-1}, \tag{1}$$

называют универсальной R-матрицей. Если имеют место соотношения

$$\mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{23}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\mathcal{R}), \quad \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{21} = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}, \tag{2}$$

то алгебра $\mathcal{A}$ (как и сама R-матрица) называется кограничной. Если вместо (2) $\mathcal{R}$ удовлетворяет соотношениям

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{3}$$

то она называется квазитреугольной. Наконец, если квазитреугольная алгебра удовлетворяет второму из соотношений (2), то

Работа выполнялась при поддержке Российского Фонда Фудаментальных исследований, гранты 97-01-01152, 98-01-00310.

она называется треугольной. Квазитреугольная R-матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{4}$$

Выполнение уравнения Янга–Бакстера является одной из причин наибольшей изученности квазитреугольных алгебр Хопфа. В настоящее время, известно достаточно много решений этого уравнения. С другой стороны, кограничным R-матрицам уделялось меньше внимания, хотя их значение для метода обратной задачи также велико. Существует рецепт по которому каждой квазитреугольной R-матрице $\mathcal{R}$ однозначно сопоставляется кограничная R-матрица $\mathcal{R}^c$ [3]:

$$\mathcal{R} \to \mathcal{R}^c = (\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{21})^{-1/2}\mathcal{R}. \tag{5}$$

Обратное утверждение неверно, так как класс кограничных R-матриц шире. В формулировке теории квантовых матричных групп Фаддеева, Решетихина и Тахтаджяна [4] центральную роль играют числовые R-матрицы, являющиеся представлениями универсальных R-матриц $R = \rho(\mathcal{R})$ в $Mat(n, C) \otimes Mat(n, C)$. Важное свойство любой кограничной R-матрицы R^c, порожденной некоторой квазитреугольной (5), состоит в том, что она определяет те же перестановочные соотношения для генераторов матричной квантовой группы, что и исходная R-матрица. Действительно, соотношение (1) эквивалентно матричному (ФРТ)-уравнению для генераторов дуальной к $\mathcal{A}$ квантовой группы $Fun(\mathcal{A})$ [4]

$$RT_1T_2 = T_2T_1R. \tag{6}$$

Здесь

$$R = R_{12} = \rho(\mathcal{R}), \qquad T_1 = T \otimes \mathbb{1}, \qquad T_2 = \mathbb{1} \otimes T,$$

где $\mathbb{1}$ – единичная матрица. Из соотношения (1) следует

$$\Delta = \tau \circ \Delta^{op} = \mathcal{R}_{21}\Delta^{op}\mathcal{R}_{21}^{-1} = \mathcal{K}_{21}\Delta\mathcal{K}_{21}^{-1}, \tag{7}$$

$$\text{где} \quad \mathcal{K}_{21} = \mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12} \quad \text{и} \quad \tau \circ \mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{21}.$$

Таким образом имеем

$$\Delta\mathcal{K}_{21} = \mathcal{K}_{21}\Delta. \tag{8}$$

Аналогично, имеем

$$\Delta^{op} = \mathcal{K}_{12}\Delta^{op}\mathcal{K}_{12}^{-1},$$

$$\Delta^{op}\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{12}\Delta^{op}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}_{12} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{21}. \tag{9}$$

Ясно, что любой полином $F(\mathcal{K}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})$ удовлетворяет тому же соотношению (8)

$$\Delta F(\mathcal{K}_{21}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = F(\mathcal{K}_{21}, \mathbb{1}_{\mathcal{A}})\Delta.$$

Это уравнение (и уравнение (9)) эквивалентно дуальному уравнению

$$F(K_{21}, \mathbb{1})T_1T_2 = T_1T_2F(K_{21}, \mathbb{1}),$$

где $K = \rho(\mathcal{K})$. Отсюда следует, что ФРТ-уравнение инвариантно относительно преобразования R-матрицы:

$$R \to F(K, \mathbb{1})R.$$

В случае компактной квантовой группы, $F(K, \mathbb{1})$ можно рассматривать как бесконечный сходящийся ряд по K и $\mathbb{1}$. В частности, при матрице K достаточно близкой к единичной, можем положить

$$F(K, \mathbb{1}) = K^{-\frac{1}{2}} = (\mathbb{1} + (K - \mathbb{1}))^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, перестановочные соотношения генераторов квантовой группы определенные ФРТ-уравнением с квазитреугольной R-матрицей тождественны соотношениям определенным с когpаничной R-матрицей $R^c = K^{-\frac{1}{2}}R$.

Так как класс когpаничных R-матриц шире класса квазитреугольных, то можно предположить что в этом классе существуют R-матрицы простой структуры и просто связанные с соответствующими классическими r-матрицами (например – экспоненциально). Чтобы изучить этот вопрос, в настоящей заметке рассматриваются когpаничные числовые R-матрицы, соответствующие в фундаментальном представлении квазитреугольным R-матрицам простых алгебр Ли классических серий. Будет показано, что в этих случаях когpаничные R-матрицы действительно могут быть представлены как произведение матричных экспоненциальных множителей с показателями связанными с классическими r-матрицами.

Начнем с простейшего примера группы $SL_q(2)$.

2. R-матрица квантовой группы $SL_q(2)$

Квазитреугольная числовая R-матрица с параметром деформации q (который будем считать достаточно близким к 1) для группы $SL_q(2)$ имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & 1 & . & . \\ . & \lambda & 1 & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\lambda = q - 1/q$. В дальнейшем мы будем использовать также следующие обозначения: $\omega = q + 1/q$, $\lambda_{[a]} = q^a - 1/q^a$, $\omega_{[a]} = q^a + 1/q^a$.

Имеем

$$K = R_{12}R_{21} = R_{12}PR_{12}P = \begin{pmatrix} q^2 & . & . & . \\ . & 1 & \lambda & . \\ . & \lambda & 1+\lambda^2 & . \\ . & . & . & q^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

матрица перестановки.

Вычислим $\sqrt{R_{12}R_{21}}$ и обратную ей матрицу, выбирая ветвь, на которой $K^{1/2}\big|_{q=1} = \mathbb{1}$ - единичная матрица,

$$K^{1/2} = \begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & \dfrac{2}{\omega} & \dfrac{\lambda}{\omega} & . \\ . & \dfrac{\lambda}{\omega} & \dfrac{2+\lambda^2}{\omega} & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix},$$

$$K^{-1/2} = \begin{pmatrix} q^{-1} & . & . & . \\ . & \dfrac{2+\lambda^2}{\omega} & -\dfrac{\lambda}{\omega} & . \\ . & -\dfrac{\lambda}{\omega} & \dfrac{2}{\omega} & . \\ . & . & . & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Кограничную R-матрицу получаем преобразованием Дринфельда (5)

$$R^c = K^{-1/2} R = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & \dfrac{2}{\omega} & -\dfrac{\lambda}{\omega} & . \\ . & \dfrac{\lambda}{\omega} & \dfrac{2}{\omega} & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Положим $\dfrac{2}{\omega} = \cos h$. В этом случае $\sin h = \dfrac{\lambda}{\omega}$, $\operatorname{tg} h = \lambda/2$ и R^c (12) переписывается в виде

$$R^c = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & \cos h & -\sin h & . \\ . & \sin h & \cos h & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Матрица (13) может быть представлена в экспоненциальной форме

$$R^c(h) = \exp(hr^c), \quad \text{где} \quad r^c = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & 1 & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Матрица r^c, фигурирующая в экспоненте, получается антисимметризацией $r^c = 1/2(r - PrP)$ классической r-матрицы

$$r = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & 2 & . & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

соответствующей группе $SL_q(2)$, и, в отличии от последней, уже не удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера

$$[[r, r]] \equiv [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \tag{16}$$

Для того чтобы показать, что матрица r^c является кограничной, рассмотрим алгебру Ли $\mathbf{g} = sl(2, C)$ ц перестановочным соотношениям

$$[H, X^{(\pm)}] = \pm 2X^{(\pm)}, \qquad [X^{(+)}, X^{(-)}] = H.$$

Введем элемент $\mathbf{r}^c = X^{(-)} \otimes X^{(+)} - X^{(+)} \otimes X^{(-)}$ принадлежащий $\mathbf{g} \wedge \mathbf{g}$. Матрица (14), в этом случае, есть $\rho(\mathbf{r}^c)$, где ρ – фундаментальное представление алгебры $sl(2, C)$. Вычисление скобки Схоутена $[[\mathbf{r}^c, \mathbf{r}^c]]$ дает элемент

$$[[\mathbf{r}^c, \mathbf{r}^c]] = H \wedge X^{(-)} \wedge X^{(+)},$$

принадлежащий $\wedge^3 \mathbf{g}$ и, следовательно, ad^3-инвариантный. Напомним, что как раз такой элемент и называется классической кограничной r-матрицей [3, 5].

Заметим, что матрица (13) может быть записана в виде произведения $R^c_{12} = F_{21} F^{-1}_{12}$,

$$R^c_{12} = F_{21} F^{-1}_{12} = \tag{17}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & 1 & \dot{1} & . \\ . & \operatorname{tg} h & \dfrac{1}{\cos h} & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & \cos h & -\sin h & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix},$$

напоминающего выражение R-матрицы через твист.

Формулу (17) можно использовать для вычисления структурных констант копроизведения с помощью твиста.

Применяя вычисления, аналогичные проведенным выше, к многопараметрической R-матрице

$$R_{pk} = \begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & p & . & . \\ . & \dfrac{q^2 - pk}{q} & k & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix} \tag{18}$$

(где параметр q является несущественным) получаем многопараметрическую кограничную R-матрицу

$$R^c_{pk} = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & \dfrac{2qp}{q^2 + pk} & -\dfrac{q^2 - pk}{q^2 + pk} & . \\ . & \dfrac{q^2 - pk}{q^2 + pk} & \dfrac{2kq}{q^2 + pk} & . \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

В семействе матриц (19) можно выделить две однопараметрические подгруппы $R^c_{1\,k}$ и $R^c_{p\,1}$ (т.е. в первом случае $q = 1$, $p = 1$, а во втором – $q = 1$, $k = 1$). Для $R^c_{1\,k}$ закон умножения имеет вид

$$R^c_{1\,k_1} R^c_{1\,k_2} = R^c_{1\,k_3},$$

где

$$k_3 = k_1 * k_2 = \frac{2(1+k_1)(1+k_2)}{4-(1-k_1)(1-k_2)} - 1. \tag{20}$$

Для подгруппы определяемой матрицей $R^c_{p\,1}$ закон умножения такой же как и в (2.10) с заменой k на p.

3. R-матрицы квантовых групп $SL_q(n)$

Рассмотренный выше пример может быть легко обобщен на R-матрицы соответствующие стандартно квантованным группам $SL_q(n)$. Квазитреугольные R-матрицы для этих групп имеют вид [4]:

$$R_{SL_q(n)} = \sum_{i\neq j}^{n} e_{ii}\otimes e_{jj} + q\sum_{i=1}^{n} e_{ii}\otimes e_{ii} + \lambda\sum_{i>j} e_{ij}\otimes e_{ji}. \tag{21}$$

Здесь и далее e_{ij} – матричные единицы размера $n\times n$ (который мы далее не будем указывать, так как он ясен из контекста) с единственным ненулевым элементом: $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем

$$R^c_{SL_q(n)} = (R_{12}R_{21})^{-1/2} R =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_{ii}\otimes e_{ii} + \frac{2}{\omega}\sum_{i\neq j}^{n} e_{ii}\otimes e_{jj} + \frac{\lambda}{\omega}\sum_{i>j}^{n} e_{ij}\wedge e_{ji}. \tag{22}$$

Как и в случае $SL_q(2)$, эту матрицу можно получить экспоненциировав антисимметричную часть соответствующей классической r-матрицы

$$r = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}\otimes e_{ii} + 2\sum_{i<j} e_{ji}\otimes e_{ij}. \tag{23}$$

Полученная после антисимметризации матрица

$$r^c = \frac{1}{2}(r_{12} - r_{21}) = \sum_{i>j} e_{ij}\wedge e_{ji} \tag{24}$$

представляет собой сумму взаимно коммутирующих r-матриц вида

$$r^c = \sum_{i>j} r_{ij}; \quad r_{ij} = e_{ij} \wedge e_{ji}; \quad [r_{ij}, r_{mn}] = 0, \quad i > j,\, m > n. \tag{25}$$

R-матрица (22) получается как произведение экспоненциальных множителей

$$R^c_{SL_q(n)} = \exp(hr^c) = \prod_{i>j} \exp(hr_{ij}), \tag{26}$$

каждый из которых имеет вид

$$\exp(hr_{ij}) = \left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & . & & & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & \cos h & & . & & -\sin h & & \\
 & & & 1 & . & & & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & . & 1 & & & \\
 & & \sin h & & . & & \cos h & & \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & . & & & & 1
\end{array}\right),$$

где h тот же параметр, что и в случае $SL_q(2) : \cos h = \frac{2}{\omega}$, а тригонометрические функции стоят на пересечении строк и столбцов с номерами i и j.

4. R-МАТРИЦЫ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГРУПП

Переходя к примерам R-матриц, определяющих квантовые группы серий B_{qn}, C_{qn} и D_{qn}, начнем со случая $SO_q(3)$. Имеем

$$R_{SO_q(3)} = \begin{pmatrix}
q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda\sqrt{q} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda(1-1/q) & 0 & -\lambda\sqrt{q} & 0 & 1/q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q
\end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $\lambda = q - q^{-1}$. Вычисляя кограничную R-матрицу, получаем

$$R^c_{SO_q(3)} = \begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot & -\frac{\lambda}{\omega} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot & \frac{2\lambda_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & \frac{\lambda^2_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{\lambda}{\omega} & \cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{2\lambda_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & \frac{4}{\omega} - 1 & \cdot & \frac{2\lambda_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot & -\frac{\lambda}{\omega} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{\lambda^2_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & -\frac{2\lambda_{[1/2]}}{\omega} & \cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\lambda}{\omega} & \cdot & \frac{2}{\omega} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Перестановкой строк и столбцов матрицу (28) можно привести к блочно-диагональному виду. Среди её нетривиальных блоков есть два 2×2 блока, знакомых по группам $SL_q(n)$, и один 3×3 блок (его элементы в матрице (28) находятся на пересечении строк и столбцов с номерами 3, 5, 7) представляющий собой ортогональную матрицу. Как и в случае $SL_q(n)$, матрицу (28) можно представить в виде произведения экспонент. Здесь, однако, не удается обойтись одним линейным параметром. Чтобы воспроизвести $R^c_{SO_q(3)}$, представим соответствующую антисимметризованную часть классической r-матрицы в виде

$$r^c_{SO_q(3)} = r_{21} + r_{32} + r^d_{SO_q(3)},$$

где, как и в предыдущем пункте, $r_{ij} = e_{ij} \wedge e_{ji}$, а

$$r^d_{SO_q(3)} = e_{12} \wedge e_{32} - e_{21} \wedge e_{23}.$$

Отметим, что матрицы $r^d_{SO_q(3)}$ и r_{ij} коммутируют. Для записи матрицы (28) в экспоненциальном виде введём, кроме параметра h, новый параметр h', связанный с ним соотношением

$$\cos\sqrt{2}h' = 2\cos h - 1. \tag{29}$$

Тогда получаем

$$R^c_{SO_q(3)} = \exp(hr_{21})\exp(hr_{32})\exp\left(h' r^d_{SO_q(3)}\right) \tag{30}$$

или в развернутой форме

$$R^c_{SO_q(3)} = \tag{31}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos h & \cdot & -\sin h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos^2 \dfrac{h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \dfrac{\sin\sqrt{2}h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \sin^2 \dfrac{h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sin h & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\dfrac{\sin\sqrt{2}h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \cos\sqrt{2}h' & \cdot & \dfrac{\sin\sqrt{2}h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & -\sin h & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sin^2 \dfrac{h'}{\sqrt{2}} & \cdot & -\dfrac{\sin\sqrt{2}h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \cos^2 \dfrac{h'}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sin h & \cdot & \cos h & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на нелинейную связь параметров h, h', матрица (31) имеет в качестве классического предела матрицу $r^c_{SO_q(3)}$:

$$R^c_{SO_q(3)} = \mathbb{1} + hr^c_{SO_q(3)} + o(h^3).$$

Случай R-матрицы группы $SO_q(4)$ оказывается проще, так как вводить второй параметр нет необходимости:

$$R^c_{SO_q(4)} = \exp(hr^c_{SO_q(4)}) =$$

$$= \exp(hr_{21})\exp(hr_{31})\exp(hr_{42})\exp(hr_{43})\exp(-hr^d_{SO_q(4)}), \tag{32}$$

где $r^c_{SO_q(4)}$ антисимметризованная классическая r-матрица для $SO_q(4)$

$$r^c_{SO_q(4)} = r_{21} + r_{31} + r_{42} + r_{43} - r^d_{SO_q(4)},$$
$$r^d_{SO_q(4)} = e_{21} \wedge e_{34} + e_{31} \wedge e_{24} + e_{42} \wedge e_{13} + e_{43} \wedge e_{12}.$$

Связь между параметрами h и q такая же как в случае $SL_q(2)$:

$$\frac{2}{\omega} = \cos h, \qquad \frac{\lambda}{\omega} = \sin h.$$

На симплектическом случае остановимся чуть подробне. R-матрица квантовой группы $Sp_q(4)$:

$$R_{Sp_q(4)} = \begin{pmatrix}
q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \lambda & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\lambda/q & \cdot & \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \lambda/q^3 & \cdot & \cdot & \lambda X & \cdot & \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \lambda Y & \cdot & \cdot & \lambda/q^3 & \cdot & \cdot & -\lambda/q & \cdot & \cdot & q^{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q
\end{pmatrix}, \qquad (33)$$

где

$$X = (1 + q^{-2}) \, , \; Y = (1 + q^{-4})$$

порождает кограничную R-матрицу следующего вида

$$R^c_{Sp_q(4)} =$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cos h & \cdot & \cdot & -\sin h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & A & \cdot & \cdot & B & \cdot & \cdot & C & \cdot & \cdot & D & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \sin h & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & E & \cdot & \cdot & A & \cdot & \cdot & F & \cdot & \cdot & C & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin h & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \sin h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot & -D & \cdot & \cdot & A & \cdot & \cdot & B & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot & -\sin h & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & -F & \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot & E & \cdot & \cdot & A & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sin h & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sin h & \cdot & \cdot & \cos h & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Как и в случае группы $SO_q(3)$, в матрице (34) выделяются обычные $SL_q(2)$-блоки и блок 4×4 представляющий собой ортогональную матрицу. Параметр h в (34) такой же как и в случае $SL_q(2)$, а остальные более сложно связаны с параметром деформации q:

$$A = \cos r \cos b \quad C = \cos r \sin b$$

$$B = -\frac{\sin r}{\sqrt{1+\omega^2}}(\cos b + \omega \sin b) \quad D = \frac{\sin r}{\sqrt{1+\omega^2}}(\omega \cos b - \sin b)$$

$$E = \frac{\sin r}{\sqrt{1+\omega^2}}(\cos b - \omega \sin b) \quad F = \frac{\sin r}{\sqrt{1+\omega^2}}(\omega \cos b + \sin b)$$

$$\cos r = \frac{2}{\omega\sqrt{\omega_{[2]}-1}} \quad \cos b = \frac{\omega_{[2]}}{\omega\sqrt{\omega_{[2]}-1}} \quad \sin b = -\frac{\lambda}{\omega\sqrt{\omega_{[2]}-1}}.$$

Рассмотрим антисимметризованную классическую r-матрицу для $Sp_q(4)$

$$r^c_{Sp_q(4)} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= e_{21} \wedge e_{12} + e_{31} \wedge e_{13} + e_{42} \wedge e_{24} + e_{43} \wedge e_{34} \\ r_2 &= -e_{21} \wedge e_{24} - e_{43} \wedge e_{12}, \\ r_3 &= e_{31} \wedge e_{24} + e_{42} \wedge e_{13}, \\ r_4 &= 2e_{32} \wedge e_{23} + 2e_{41} \wedge e_{14}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R^c_{Sp_q(4)} &= \exp hr_1 \exp br_3 \exp(ar_2 + cr_4) = \\ &= \exp(hr_1 + ar_2 + br_3 + cr_4). \end{aligned} \tag{36}$$

5. Заключение

Приведённые выше примеры показывают, что, по крайней мере некоторые, кограничные R-матрицы для алгебр Ли классических серий имеют более простую структуру по сравнению с порождающими их квазитреугольными. К сожалению, вычисление кограничных R-матриц ортогональных и симплектических групп более высоких порядков наталкивается на трудности связанные с извлечением квадратного корня из матриц (несмотря на то что существует алгоритм такого вычисления, см., например [9]). Можно, тем не менее, предположить, что для таких матриц при больших n структура остается экспоненциальной. Такое предположение подкрепляется примерами матриц, порождающими нестандартно квантованные группы. Рассмотрим, например, так называемую жорданову R-матрицу [6, 7] (определяющую перестановочные соотношения квантовой группы $GL_h(2)$)

$$R_j = \begin{pmatrix} 1 & -h & h & h^2 \\ 0 & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

и ее обобщение на размерность 3 (пример $R_{4.2}$ в [8]) при $c=-h$, $p=\exp h$, $q=y=0$, $a=-h^2$

$$R_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & -h^2 \\ 0 & e^h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & e^{-h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Эти матрицы (37), (38) являются треугольными $R_{12}R_{21}=1$ (и, поэтому, кограничными) и удовлетворяют функциональному соотношению

$$R(h_1)R(h_2) \;=\; R(h_1+h_2). \tag{39}$$

Таким образом, их представление в экспоненциальной форме выглядит совершенно естественным. Имеем $R=\exp{(hr)}$, где

$$R_j = \exp{(hr_j)}, \quad \text{где} \quad r_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

и

$$R_J = \exp{(hr_J)},$$

где

$$r_J = e_{11}\wedge e_{22} - e_{22}\wedge e_{33} + e_{11}\wedge e_{13} - e_{13}\wedge e_{33}. \tag{41}$$

Очевидно, что интересным является изучение явного вида универсальных кограничных матриц. Кограничные алгебры Хопфа с кограничными R-матрицами обсуждались также в [10] в связи с возможным использованием квантовых групп в качестве калибровочных. Интересно, также, изучить кограничные R-матрицы зависящие от спектрального параметра. Это мы планируем провести в ближайшее время.

Литература

1. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, М. (1986) .
2. Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Наука, М. (1992) .
3. V. G. Drinfeld, *Quantum Groups.* in: *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 798, Berkeley, California, Academic Press, New York (1986) .
4. L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L.A.Takhtajan, — Algebra Analiz, **1** (1989) 178 (in Russian). Engl. transl.: Leningrad Math. J., **1** (1990) 193 .
5. V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge Univ. Press (1994) .
6. E. E. Demidov, Yu. Manin, E. E. Mukhin, and D. V. Zhadanovich, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102**, 203 (1990) .
7. S.Zakrzewski, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 287 .
8. J. Hietarinta, *The upper triangular solutions to the three-state constant quantum Yang–Baxter equation.* Turku-Fl-P7 (1993) .
9. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М. (1988) .
10. S. Zakrzewski, *A characterization of coboundary Poisson Lie groups and Hopf algebras.* in: *Quantum Groups and Quantum Spaces*, Banach Center Publications **40** (1997), 273 .

Damaskinsky E. V., Kulish P. P., and Sokolov M. A. On the structure of coboundary R-matrices for classical series.

Coboundary R-matrix for quantum algebras associated with simple Lie algebras of classical series are computed. In the fundamental representations these R-matrices are equal to exponents of the related classical r-matrices.

Поступило 28 февраля 2000 г.

Военный инженерный
технический университет

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский институт
машиностроения